CÁNH CỬA MỞ RỘNG

TỦ SÁCH HỢP TÁC
VỚI NHÀ TOÁN HỌC **NGÔ BẢO CHÂU**
VÀ NHÀ VĂN **PHAN VIỆT**

17 PHƯƠNG TRÌNH THAY ĐỔI THẾ GIỚI

17 equations that changed the world

$$E = mc^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$F - E + V = 2$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$i^2 = -1$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Ian Stewart

$$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$$

$$dS \geq 0$$

$$H = -\sum p(x) \log p(x)$$

$$\log xy = \log x + \log y$$



NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

CÁNH CỬA MỞ RỘNG
TỦ SÁCH HỢP TÁC
VỚI NHÀ TOÁN HỌC **NGÔ BẢO CHÂU**
VÀ NHÀ VĂN **PHAN VIỆT**

$$E = mc^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

17 PHƯƠNG TRÌNH THAY ĐỔI THẾ GIỚI

$$F - E + V = 2$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$i^2 = -1$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

17 equations that changed the world

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Ian Stewart

$$x_{t+1} = k x_t (1 - x_t)$$

$$dS \geq 0$$

$$H = -\sum p(x) \log p(x)$$



NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

$$\log xy = \log x + \log y$$



Tủ sách hợp tác giữa

nhà toán học Ngô Bảo Châu, nhà văn Phan Việt với Nhà xuất bản Trẻ

Tủ sách CÁNH CỬA MỞ RỘNG được thực hiện nhằm mục đích giới thiệu những đầu sách có giá trị của thế giới và trong nước đến bạn đọc Việt Nam, đặc biệt là bạn đọc trẻ, góp phần thúc đẩy việc đọc sách, tinh thần hiếu học, coi trọng tri thức và những giá trị sống. Các tựa sách trong tủ do nhà toán học Ngô Bảo Châu và nhà văn Phan Việt tuyển chọn và giới thiệu.

Tủ sách được phân thành ba mảng: văn học, khoa học xã hội - kinh tế, và khoa học tự nhiên; trước mắt cấu tạo tủ sách gồm 80% các sách có khả năng tiếp cận đông đảo bạn đọc và 20% cho các sách chuyên ngành.

BIỂU GHI BIÊN MỤC TRƯỚC XUẤT BẢN DO THƯ VIỆN KHTH TP.HCM THỰC HIỆN
General Sciences Library Cataloging-in-Publication Data

Stewart, Ian, 1945-
17 phương trình thay đổi thế giới / Ian Stewart ; Phạm Văn Thiều, Nguyễn Duy Khánh dịch. - T.P. Hồ Chí Minh : Trẻ, 2015.
521 tr. ; 20 cm. - (Cánh cửa mở rộng).
Nguyên bản : 17 equations that changed the world.

1. Phương trình -- Lịch sử. 2. Toán học -- Lịch sử. 3. Vật lý -- Lịch sử. I. Phạm Văn Thiều. II. Nguyễn Duy Khánh. III. Ts. IV. Ts: Mười bảy phương trình thay đổi thế giới. V. Ts: 17 equations that changed the world. VI. Ts: Seventeen equations that changed the world.

512.94 -- ddc 23
S849

17 PHƯƠNG TRÌNH THAY ĐỔI THẾ GIỚI

Ian Stewart

Phạm Văn Thiều - Nguyễn Duy Khánh ***dịch***

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Mục lục

LỜI GIỚI THIỆU

của Nhà toán học
NGÔ BẢO CHÂU

Quãng đường càng xa thì đi càng lâu. Nhận xét này thật hiển nhiên, nhưng nếu cả ba đại lượng quãng đường, thời gian và vận tốc dở chứng, cùng biến thiên một lúc, thì đầu chúng ta sẽ rối tung lên. Chúng sẽ trở nên ngoan ngoãn, ngăn nắp trở lại chỉ khi ta viết ra phương trình chuyển động đều của một vật điểm.

Có nhiều người đã hỏi tôi vẻ đẹp toán học là gì, nó nằm ở đâu. Để trả lời đầy đủ có lẽ phải viết cả một pho sách. Nếu buộc phải trả lời vắn tắt thì tôi sẽ nói vẻ đẹp của toán học nằm ở các phương trình. Thay vì nói "đường càng xa, đi càng lâu", chúng ta viết ra một công thức toán học đơn giản, chính xác và mạch lạc.

Một phần công việc của các nhà khoa học chính là diễn đạt những nhận xét mang tính trực quan "đường càng xa, đi càng lâu" thành những công thức toán học. Chính vì vậy mà những người làm nên vẻ đẹp toán học thường lại không phải là những nhà toán học mà là các nhà khoa học. Công việc của các nhà toán học thường khiêm tốn hơn, họ chuẩn bị ngôn ngữ toán học để các nhà khoa học có thể viết ra phương trình của mình. Và họ chuẩn bị công cụ toán học để giải những phương trình đó, hoặc như trong phần lớn các trường hợp,

khi phương trình không giải được, thì vẫn rút ra được một số thông tin từ phương trình. Thường thì những thông tin rút ra được từ phương trình nhờ vào các công cụ toán học không phải những gì ta có thể cảm nhận được một cách trực quan, tuy thế chúng vẫn là chân lý, chân lý không hơn, không kém phương trình ban đầu. Và thường thì những thông tin chắc chắn, nhưng không hiển nhiên, là những thông tin quý giá nhất.

Xin giới thiệu với bạn đọc của tủ sách *Cánh cửa mở rộng* quyển *17 phương trình thay đổi thế giới* của Ian Stewart. Tác giả là một trong những người viết tài hoa nhất trong thể loại sách toán dành cho những người không chuyên về toán. Ông đã có tiền án làm cho không ít người ghét toán trở thành người yêu toán. Qua 17 phương trình tiêu biểu: từ định lý Pythagor, qua số ảo căn bậc hai của âm một, qua phương trình truyền sóng, đến phương trình Shannon về độ phức tạp của thông tin và cuối cùng phương trình Black-Scholes định giá những công cụ tài chính phái sinh, ông dẫn chúng ta đi qua những địa hạt mà dù nằm trong hay ngoài toán học, ở đó vẻ đẹp toán học luôn được thể hiện một cách thuần khiết nhất.

Bằng việc giới thiệu cuốn sách này, tôi muốn chia sẻ với bạn đọc niềm tin: vẻ đẹp toán học nằm ở mọi nơi, toán học là cần thiết để thấu hiểu thế giới.

Để tránh sự lặp lại một cách nhàm chán của cụm từ “bằng nhau”, tôi sẽ đặt, như tôi vẫn thường làm, một cặp đường song song, hay hai đường sinh đôi có chiều dài bằng nhau: =, bởi lẽ không có hai thứ gì bằng nhau hơn thế.

Robert Recorde, *The Whetstone of Witte*, 1557

Tại sao lại là các phương trình?

Các phương trình là máu huyết của toán học, khoa học và công nghệ. Không có chúng, thế giới của chúng ta sẽ không tồn tại dưới dạng hiện nay. Tuy nhiên, các phương trình thường làm cho người ta sợ hãi: các nhà xuất bản của Stephen Hawking đã nói với ông rằng mỗi một phương trình sẽ làm số lượng bán của cuốn *Lược sử thời gian* giảm đi một nửa, nhưng sau đó họ đã lờ đi ý kiến của chính họ và cho phép đưa vào phương trình $E = mc^2$ mà nếu cắt bỏ nó đi người ta cho rằng có thể sẽ bán được thêm 10 triệu bản nữa. Tôi đứng về phía Hawking. Các phương trình quá quan trọng nên không thể giấu biến chúng đi. Nhưng các nhà xuất bản cũng có quan điểm của họ: các phương trình chỉ là hình thức, chúng khô khan, trông rất phức tạp, và thậm chí nhiều người trong số chúng tôi, những người yêu các phương trình, đôi lúc cũng phải lảng tránh khi bị chúng tra tấn tới tấp.

Trong cuốn sách này, tôi xin có đôi lời giãi bày. Vì nó nói về các phương trình nên tôi không thể tránh đưa chúng vào, cũng như tôi không thể viết một cuốn sách về leo núi mà lại không được dùng từ “núi” vậy. Tôi muốn khẳng định với các bạn rằng các phương trình đã đóng vai trò sống còn trong thế giới sáng tạo ngày hôm nay, từ lập bản đồ tới hệ thống dẫn đường bằng vệ tinh (*sat nav*), từ âm nhạc tới truyền hình, từ

phát hiện ra châu Mỹ tới khám phá các mặt trăng của Mộc tinh. Thật may mắn, bạn không cần phải là một nhà khoa học thiên tài để đánh giá hết chất thơ và vẻ đẹp của một phương trình quan trọng.

Trong toán học có hai loại phương trình mà nhìn bề ngoài chúng tương tự nhau. Một loại biểu diễn các mối quan hệ giữa các đại lượng toán học khác nhau và nhiệm vụ của các nhà toán học là chứng minh phương trình đó đúng. Loại còn lại cung cấp thông tin về một đại lượng chưa biết và nhiệm vụ là *giải* nó, tức là tìm ra đại lượng chưa biết đó. Sự phân biệt hai loại phương trình này không hoàn toàn rạch ròi vì đôi khi chính một phương trình lại được dùng theo cả hai cách, nhưng đó lại là một sự chỉ hướng rất hữu ích. Bạn có thể tìm thấy cả hai loại phương trình ấy trong cuốn sách này.

Các phương trình trong toán học thuần túy nói chung thuộc loại thứ nhất: chúng phát lộ những hình mẫu sâu xa và đẹp cùng với những quy luật rõ ràng. Chúng hợp thức bởi vì với các giả thiết cơ sở đã cho về cấu trúc logic của toán học, không có một khả năng thay thế nào khác. Định lý Pythagor, cũng là một phương trình được diễn đạt theo ngôn ngữ hình học, là một ví dụ. Nếu ta chấp nhận những giả thiết cơ sở về hình học của Euclid, thì định lý này là *đúng*.

Các phương trình trong toán học ứng dụng và vật lý toán thường thuộc loại thứ hai. Chúng mã hóa thông tin về thế giới thực; chúng biểu diễn các tính chất vũ trụ, mà về nguyên tắc có thể rất khác nhau. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton là một ví dụ tốt. Nó cho chúng ta biết rằng lực hút giữa hai vật phụ thuộc vào khối lượng của chúng như thế nào và vào khoảng cách giữa chúng ra sao. Việc giải các phương

trình có được sẽ cho chúng ta biết các hành tinh quay quanh Mặt Trời như thế nào, hoặc phải thiết kế quỹ đạo của các con tàu thăm dò không gian ra sao. Nhưng định luật của Newton không phải là một định lý toán học; nó đúng là vì các lý do vật lý, cụ thể là nó phù hợp với quan sát. Định luật hấp dẫn có thể khác đi. Thật vậy, thuyết tương đối rộng của Einstein đã hoàn thiện định luật của Newton vì nó phù hợp hơn với một số quan sát, trong khi lại không làm xáo trộn những quan sát mà chúng ta biết định luật của Newton phù hợp với chúng.

Diễn tiến của lịch sử loài người đã được định hướng lại, mỗi một lần bởi một phương trình. Các phương trình đều có những sức mạnh ẩn giấu. Chúng phát lộ những bí mật sâu kín nhất của tự nhiên. Sử dụng các phương trình không phải là cách truyền thống của các nhà sử học để thiết lập nên những thăng trầm của các nền văn minh. Các vị vua và hoàng hậu cũng như các cuộc chiến tranh và những tai họa đầy rẫy trong những cuốn sách lịch sử, nhưng các phương trình thì rất ít được đề cập tới. Thật chẳng công bằng chút nào. Ở thời Victoria, có lần Michael Faraday đã chứng minh mối liên hệ giữa điện và từ cho cử tọa ở Viện Hoàng gia London. Tương truyền, vị thủ tướng William Gladstone đã hỏi rằng từ mối quan hệ đó liệu có hệ quả nào áp dụng được cho thực tiễn không. Người ta kể rằng Faraday đáp: "Có đấy, thưa ngài. Một ngày nào đó, ngài sẽ phải đóng thuế cho nó". Nếu quả là ông đã nói như vậy, thì ông đã đúng. James Clerk Maxwell đã chuyển đổi những quan sát thực nghiệm và các định luật thực nghiệm trước đó về điện và từ thành một hệ các phương trình của điện từ trường. Trong số rất nhiều các hệ quả của nó có radio, radar và truyền hình.

Một phương trình có được sức mạnh của nó từ một khởi nguồn đơn giản. Nó nói với chúng ta rằng hai phép tính, bề ngoài tưởng như khác nhau, nhưng lại cho cùng một đáp số. Ký hiệu then chốt là dấu bằng (=). Nguồn gốc của đa số các ký hiệu toán học hoặc là đã thất lạc trong những đám sương mù dày đặc của thời cổ đại hoặc là mới đến nỗi không ai thắc mắc rằng nó tới từ đâu. Dấu bằng là một trường hợp khác thường bởi vì niên đại của nó vào khoảng hơn 450 năm trước, hơn nữa chúng ta không chỉ biết ai đã đặt ra nó mà thậm chí còn biết *tại sao*. Người đã đặt ra ký hiệu này là Robert Recorde, vào năm 1557, trong cuốn *The Whetstone of Witte*. Ông đã dùng hai đường song song (ông đã dùng một từ cổ là *gemowe* có nghĩa là song sinh) để tránh sự lặp lại một cách nhàm chán của cụm từ "bằng nhau". Ông đã chọn ký hiệu đó vì "không có hai thứ gì bằng nhau hơn". Quả là sự lựa chọn tuyệt vời. Ký hiệu của ông đã được dùng mãi trong suốt 450 năm qua.

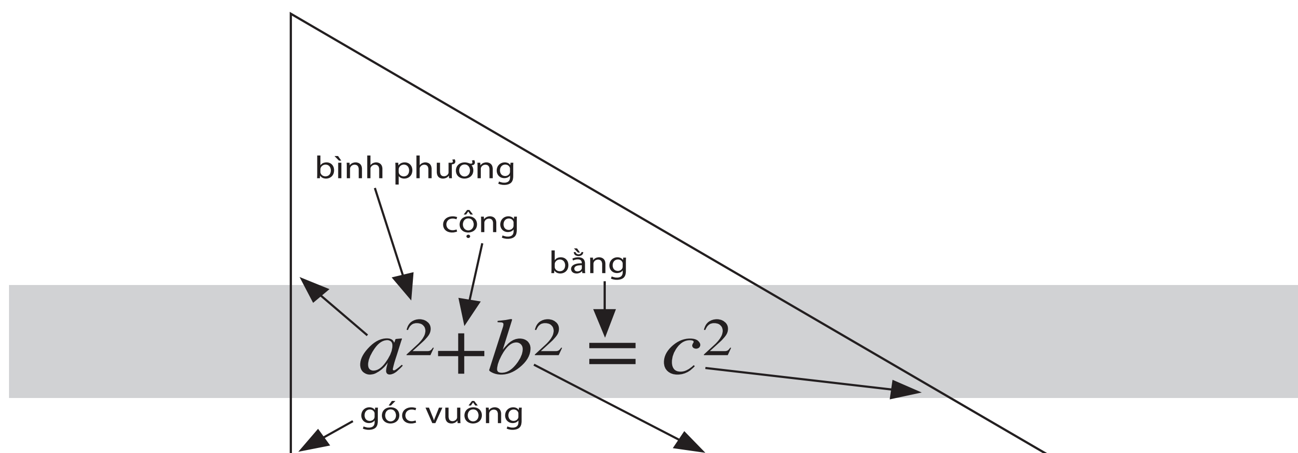
Sức mạnh của các phương trình nằm trong sự tương ứng đầy khó khăn về mặt triết học giữa toán học, một sáng tạo của trí tuệ con người, và thực tại vật lý bên ngoài. Các phương trình mô hình hóa các hình mẫu nằm sâu trong thế giới bên ngoài. Bằng cách học đánh giá các phương trình, và đọc các câu chuyện mà chúng kể, chúng ta có thể khám phá ra những đặc điểm của thế giới xung quanh ta. Về nguyên tắc, có thể có những cách khác để đạt tới cùng một kết quả. Nhiều người thích dùng từ ngữ hơn là các ký hiệu, vì ngôn ngữ cũng cho chúng ta sức mạnh chế ngự thế giới xung quanh. Nhưng lời phán quyết của khoa học và công nghệ là: các từ ngữ quá không chính xác và cũng quá hạn chế để cung cấp cho chúng

ta một con đường hiệu quả đi tới những phương diện sâu xa của thực tại. Đã vậy, chúng lại còn được tô vẽ bởi những giả thuyết ở thang bậc con người. Chỉ từ ngữ thôi thì không thể cung cấp cho chúng ta những hiểu biết sâu sắc được.

Nhưng các phương trình thì có thể. Chúng đã là động lực chính trong nền văn minh nhân loại hàng ngàn năm nay. Trong suốt chiều dài lịch sử, các phương trình đã âm thầm chi phối xã hội. Giấu mình ở phía sau sân khấu, chắc chắn là thế – nhưng ảnh hưởng của chúng thì vẫn hiện diện ở đó, bất kể chúng có được chú ý hay không. Đây là câu chuyện về sự thăng tiến của loài người, được kể thông qua 17 phương trình.

1 Người đàn bà trên tấm da hà mã

Định lý Pythagor



Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nó biểu diễn mối liên hệ giữa ba cạnh của tam giác vuông.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó cung cấp một mối liên kết quan trọng giữa hình học và đại số, cho phép chúng ta tính toán khoảng cách theo các tọa độ. Nó cũng khơi nguồn cảm hứng cho lượng giác.

Nó đã dẫn tới những gì?

Nó giúp chúng ta khảo sát, định vị, và đặc biệt gần đây là thuyết tương đối hẹp và rộng – lý thuyết tuyệt vời nhất hiện nay về không gian, thời gian, và hấp dẫn.

Khi yêu cầu bất kỳ một học sinh phổ thông nào nêu tên một nhà toán học lừng danh, câu trả lời thông thường sẽ là Pythagor. Nếu không, sẽ là Archimedes. Ngay cả Isaac Newton danh tiếng cũng phải chịu xếp sau hai siêu sao của thế giới cổ đại này. Archimedes là một người khổng lồ về trí tuệ, và có lẽ Pythagor không được như thế, nhưng ông xứng đáng được hưởng nhiều hơn so với những gì mà ông thường nhận được. Không phải vì những thành công của ông, mà là vì những thứ mà ông đã khởi phát.

Pythagor sinh ở đảo Samos, Hy Lạp, phía đông Aegean, vào khoảng năm 570 trước Công nguyên (TCN). Ông là một triết gia và là một nhà hình học. Những điều ít ỏi mà chúng ta biết được về cuộc đời của ông là từ các học giả rất lâu sau đó và tính chuẩn xác lịch sử của chúng vẫn còn rất đáng ngờ, tuy nhiên những sự kiện chính thì có lẽ là chính xác. Khoảng năm 530 TCN, ông tới Croton, một thuộc địa của Hy Lạp, bây giờ là nước Ý. Tại đây ông tổ chức một nhóm triết học-tôn giáo, những người theo trường phái Pythagor, những người tin rằng vũ trụ dựa trên nền tảng các con số. Sự nổi tiếng của người sáng lập trường phái này ngày nay dựa trên một định lý mang tên ông. Nó đã được dạy hơn 2000 năm nay, và đã đi vào văn hóa đại chúng. Bộ phim *Merry Andrew* năm 1958, với ngôi sao Danny Kaye, có một bài hát mở đầu như sau:

Bình phương độ dài cạnh huyền,
của một tam giác vuông
thì bằng với
tổng bình phương
của hai cạnh kề còn lại.

Bài hát tiếp tục với các câu ẩn ngữ, về việc không để các phân từ của bạn đong đưa, liên kết Einstein, Newton, và anh em nhà Wright với định lý nổi tiếng đó. Hai người đầu tiên hét lên “Eureka!”; không, đó là Archimedes. Bạn sẽ suy ra rằng lời nhạc không chính xác về mặt lịch sử, nhưng đó là Hollywood mà. Tuy nhiên, trong chương 13, ta sẽ thấy rằng người viết lời (Johny Mercer) đã rất chính xác với Einstein, có lẽ hơn cả những gì ông đã biết.

Định lý Pythagor xuất hiện trong một chuyện đùa nổi tiếng, với sự chơi chữ tồi tệ về người đàn bà trên da con hà mã. Chuyện vui này có thể tìm thấy khắp nơi trên Internet nhưng rất khó có thể tìm thấy nguồn gốc của nó[1]. Cũng có cả phim hoạt hình, áo phông và con tem về định lý Pythagor, như hình 1.



Hình 1 Con tem Hy Lạp mô tả định lý Pythagor

Mặc dù ồn ào như thế, nhưng chúng ta không biết chắc Pythagor có thực sự đã *chứng minh* định lý mang tên ông hay không. Thực tế, chúng ta cũng không biết đó có phải là định lý của ông hay không. Rất có thể nó được chứng minh bởi một đệ tử của Pythagor, hay một viên thư lại người Babylon hay Sumer cũng nên. Nhưng Pythagor được nổi tiếng, và tên ông được gắn với định lý đó. Cho dù nguồn gốc là thế nào đi nữa thì định lý này và hệ quả của nó đã có ảnh hưởng vô cùng to lớn đến lịch sử loài người. Nó đã thực sự mở ra thế giới của chúng ta.

Người Hy Lạp không diễn tả định lý Pythagor như một phương trình với các ký hiệu hiện đại. Điều đó đến sau theo sự phát triển của đại số. Vào thời cổ đại, định lý này được diễn tả bằng lời và bằng hình học. Nó đã đạt tới dạng hoàn chỉnh nhất, và phép chứng minh đầu tiên được ghi lại là trong bản thảo của Euclid xứ Alexandria. Vào khoảng năm 250 TCN, Euclid trở thành nhà toán học hiện đại đầu tiên khi ông viết tác phẩm nổi tiếng *Cơ sở (Elements)*, bộ sách giáo khoa toán học có ảnh hưởng lớn nhất từ trước tới nay. Euclid đã chuyển hình học thành logic bằng cách đưa ra những giả định cơ bản hiển nhiên và viện đến chúng để đưa ra những chứng minh hệ thống cho tất cả các định lý của ông. Ông đã xây dựng một tòa tháp các khái niệm, với nền tảng là các điểm, đường thẳng và đường tròn, mà đỉnh cao của nó là sự tồn tại của năm khối đa diện đều.

Một trong những viên ngọc trên vương miện của Euclid chính là thứ mà ngày nay chúng ta gọi là định lý Pythagor: Mệnh đề 47 của quyển 1 trong bộ *Cơ sở*. Trong bản dịch nổi tiếng của Sir Thomas Heath mệnh đề này phát biểu: “Trong

một tam giác vuông, bình phương của cạnh chắn góc vuông thì bằng với bình phương của các cạnh góc vuông”.

Khi đó, không có con hà mã, cũng chẳng có cạnh huyền. Thậm chí không có cả “cộng” hay “thêm vào”. Chỉ có mỗi từ “chắn” ngồ ngộ, về cơ bản có nghĩa là “đối diện với”. Tuy nhiên, định lý Pythagor rõ ràng đã diễn tả một phương trình, vì nó có chứa một từ cốt tử, đó là từ *bằng*.

Vì các mục đích của toán học cao cấp hơn, người Hy Lạp làm việc với các đường thẳng và diện tích thay vì các con số. Vì thế Pythagor và những người kế tục ông đã giải mã định lý này như là một đẳng thức của các diện tích: “Diện tích của một hình vuông dựng trên cạnh dài nhất của tam giác vuông bằng tổng diện tích của các hình vuông dựng trên hai cạnh còn lại”. Cạnh dài nhất chính là cạnh huyền nổi tiếng, có nghĩa là “căng ra bên dưới”, điều sẽ xảy ra nếu bạn vẽ hình theo định hướng phù hợp, như hình 2 (bên trái).

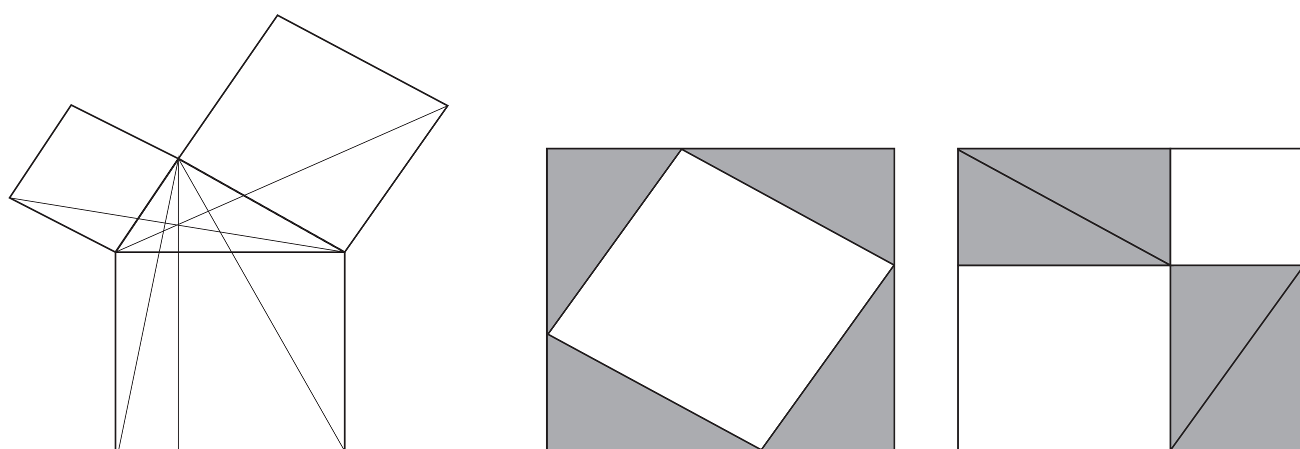
Trong vòng 2000 năm, định lý Pythagor được viết lại dưới dạng phương trình đại số:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

với c là độ dài của cạnh huyền, a và b là độ dài của hai cạnh còn lại, và số mũ 2 có nghĩa là bình phương. Theo ngôn ngữ đại số, bình phương của một số là lấy số đó nhân với chính nó, và chúng ta đều biết diện tích của hình vuông bất kỳ thì bằng bình phương độ dài cạnh của nó. Do đó phương trình Pythagor, như tôi đặt lại tên cho nó, nói lên chính xác điều mà Euclid đã nói – ngoại trừ một số vấn đề tâm lý có liên quan với việc người cổ đại đã tư duy như thế nào về các khái niệm toán học căn bản như số và diện tích, những điều mà tôi sẽ không đề cập tới.

Phương trình Pythagor có nhiều ứng dụng và hệ quả. Nó giúp bạn tính độ dài cạnh huyền một cách trực tiếp nhất, nếu biết trước hai cạnh còn lại. Chẳng hạn, giả sử rằng $a = 3$, $b = 4$. Khi đó $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Do đó, $c = 5$. Đó là tam giác 3–4–5 nổi tiếng, rất phổ biến trong toán học phổ thông, và là ví dụ đơn giản nhất về bộ ba số Pythagor: một danh sách bộ ba số nguyên thỏa mãn phương trình Pythagor. Ví dụ đơn giản tiếp theo, không phải ở dạng bội số như 6–8–10, là tam giác 5–12–13. Có vô hạn các bộ ba số như vậy, và người Hy Lạp biết cách xây dựng tất cả các bộ số như thế. Chúng vẫn còn giữ được sự quan tâm nhất định trong lý thuyết số, và ngay cả trong thập niên gần đây người ta vẫn còn phát hiện được các đặc điểm mới.

Thay vì sử dụng a và b để tìm c, bạn có thể tiến hành một cách gián tiếp, và giải phương trình để thu được a nếu biết b và c. Bạn cũng có thể trả lời các câu hỏi tinh tế hơn, như bạn sẽ nhanh chóng thấy dưới đây.



Hình 2 *Trái:* Dựng thêm các đường trong phép chứng minh định lý Pythagor của Euclid. *Giữa và phải*: Một cách chứng minh khác của định lý này. Các hình vuông bên ngoài của hai hình có diện tích bằng nhau và tất cả các hình tam giác sẫm màu cũng có diện tích bằng nhau. Do đó, hình vuông trắng nghiêng (hình giữa) có cùng diện tích với hai hình vuông trắng khác (hình phải) hợp lại.

Tại sao định lý này lại đúng? Chứng minh của Euclid khá phức tạp, phải vẽ thêm tới 5 đường phụ như trên hình 2 (bên trái), và sử dụng vài định lý đã được chứng minh từ trước. Các học sinh nam thời Victoria (ngày đó có rất ít nữ sinh được học hình học) gọi định lý này một cách bất kính là cái quần lót của Pythagor. Một chứng minh đơn giản và trực quan, mặc dù không phải là hoàn hảo nhất, sử dụng bốn bản sao của một tam giác để liên hệ hai lời giải của cùng một trò chơi ghép hình toán học như hình 2 (bên phải). Bức vẽ hoàn toàn thuyết phục, nhưng để điền các chi tiết logic vào đòi hỏi ta phải suy nghĩ. Chẳng hạn, làm sao chúng ta biết hình nghiêng trắng ở giữa hình vẽ là hình vuông?

Có bằng chứng như trêu ngươi rằng định lý Pythagor đã được biết đến rất lâu trước Pythagor. Một bảng đất sét[2] của người Babylon hiện ở bảo tàng Anh quốc có ghi một bài toán và câu trả lời, dưới dạng chữ viết hình nêm mà ta có thể viết lại như sau:

4 là chiều dài và 5 là đường chéo. Chiều rộng là bao nhiêu?
4 nhân 4 là 16.
5 nhân 5 là 25.
Lấy đi 16 từ 25 ta được 9.
Phải lấy mấy nhân với mấy để thu được 9?
3 nhân 3 là 9.
Vậy chiều rộng là 3.

Như vậy rõ ràng là người Babylon đã biết về tam giác 3–4–5 một ngàn năm trước Pythagor.

Một bảng khác, mang ký hiệu YBC 7289, thuộc bộ sưu tập Babylon của Đại học Yale, được trình bày trên hình 3 (bên

trái). Trên đó có vẽ một hình vuông với cạnh 30, và các đường chéo được đánh dấu bằng hai dãy số: 1, 24, 51, 10 và 42, 25, 35. Người Babylon sử dụng hệ đếm cơ số 60, do đó dãy số đầu tiên thực sự có nghĩa là $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$ và bằng 1,4142129 trong hệ cơ số 10. Lưu ý rằng căn bậc hai của 2 là 1,4142135. Dãy số thứ hai bằng 30 lần của số đó. Như vậy, người Babylon đã biết rằng đường chéo của hình vuông bằng cạnh của nó (30) nhân với căn bậc hai của 2. Vì $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$, đây cũng là một ví dụ về định lý Pythagor.





Hình 3 *Trái:* YBC 7289. *Phải:* Plimpton 322.

Còn đáng chú ý hơn nữa, mặc dù cũng bí ẩn hơn, là bảng Plimpton 322 thuộc bộ sưu tập của George Arthur Plimpton ở Đại học Columbia, hình 3 (bên phải). Đó là bảng các số, với 4 cột và 15 hàng. Cột cuối cùng liệt kê số thứ tự các hàng từ 1 đến 15. Vào năm 1945, hai sử gia về khoa học, Otto Neugebauer và Abraham Sachs[3] đã nhận thấy rằng trong mỗi hàng, bình phương của số (gọi là c) trong cột ba trừ đi bình phương của số (gọi là b) trong cột hai thì cũng cho ra bình phương của một số (gọi là a). Suy ra, $a^2 + b^2 = c^2$, cho nên đây là bảng số ghi lại các bộ ba số Pythagor. Chí ít điều này là

đúng nếu như bốn lỗi rành rành trong đó được sửa lại. Tuy nhiên, không có gì chắc chắn rằng Plimpton 322 có liên quan với các bộ ba số Pythagor, và nếu ngay cả khi có, thì nó có thể cũng chỉ là một danh sách tiện lợi các tam giác có diện tích dễ dàng tính được. Chúng có thể được tập hợp lại để đưa ra những xấp xỉ tốt cho các tam giác khác và các dạng hình học khác, có lẽ để phục vụ cho việc đo đạc đất đai.

Một biểu tượng văn minh cổ đại khác là Ai Cập. Có một số bằng chứng cho thấy, khi còn trẻ, Pythagor đã từng tới thăm Ai Cập và một số người đã đưa ra giả thuyết rằng đó là nơi mà ông đã học được định lý của mình. Những ghi chép còn sót lại của nền toán học Ai Cập đã cung cấp những bằng chứng không đủ để hỗ trợ giả thuyết này, chúng quá ít và khá chuyên biệt. Thông tin được đề cập chủ yếu trong ngữ cảnh về các kim tự tháp, rằng người Ai Cập cổ đại đã dựng các góc vuông bằng cách sử dụng tam giác 3–4–5 tạo thành từ sợi dây với các nút thắt ở 12 khoảng bằng nhau, và các nhà khảo cổ đã tìm ra các dây loại đó. Tuy nhiên, không khẳng định nào mang nhiều ý nghĩa. Các kỹ thuật như thế không đáng tin cậy cho lắm, bởi vì các sợi dây có thể bị kéo dãn và các nút phải được đặt ở những vị trí cực kỳ chính xác. Sự chính xác trong việc xây dựng kim tự tháp ở Giza cao hơn tất cả những gì mà ta có thể thu được với một sợi dây như vậy. Các công cụ có tính thực tiễn hơn nhiều, chẳng hạn như chiếc thước eke của thợ mộc, cũng đã được tìm thấy. Các nhà Ai Cập học chuyên về toán học Ai Cập cổ đại không phát hiện thấy có ghi chép nào nói về việc sử dụng sợi dây 12 nút để tạo thành một tam giác 3–4–5 và không có ví dụ nào về việc sợi dây như thế tồn tại. Vì thế câu chuyện này, mặc dù có vẻ khá quyến rũ, gần như chắc chắn chỉ là một huyền thoại.

Nếu có thể đưa Pythagor tới sống ở thế giới ngày nay thì hẳn ông sẽ thấy rất nhiều khác biệt. Vào thời ông, các kiến thức y học còn rất sơ đẳng, ánh sáng thu được từ nến và đuốc, và dạng truyền thông nhanh nhất là người đưa tin cưỡi ngựa hay đèn hiệu trên đỉnh đồi. Thế giới được biết đến bao gồm hầu hết châu Âu, châu Á, và châu Phi, chứ chưa có châu Mỹ, châu Úc, Bắc Cực và Nam Cực. Nhiều nền văn minh khác nhau cho rằng thế giới là dạng phẳng: một đĩa tròn hay một hình vuông được gióng theo bốn hướng chính. Bất chấp những phát minh của các nhà khoa học Hy Lạp cổ đại, niềm tin này vẫn tồn tại cho đến tận thời kỳ trung cổ, dưới dạng các bản đồ *orbis terrae*, hình 4.



Hình 4 Bản đồ thế giới được nhà lập bản đồ người Maroc al-Idrisi vẽ năm 1100 cho Vua Roger ở Sicily.

Vậy ai là người đầu tiên đã nhận ra thế giới có dạng tròn? Theo Diogenes Laertius, một nhà chuyên viết tiểu sử người Hy Lạp ở thế kỷ thứ 3, thì đó là Pythagor. Trong cuốn sách

Cuộc sống và quan điểm của các triết gia lỗi lạc (Lives and Opinions of Eminent Philosophers) của ông, một tuyển tập các châm ngôn và tiểu sử, và là nguồn lịch sử chính của chúng ta về đời sống riêng tư của các triết gia Hy Lạp cổ đại, ông viết: "Pythagor là người đầu tiên gọi Trái Đất là tròn, mặc dù Theophratus gán điều này cho Parmenides và Zeno gán cho Hesiod". Người Hy Lạp cổ thường tuyên bố rằng các khám phá trọng đại thường do các bậc tổ tiên nổi tiếng của họ tìm ra, bất chấp thực tế lịch sử, vì thế chúng ta không thể vội vàng tin ngay vào tuyên bố đó của họ, nhưng có một điều không còn tranh cãi gì nữa, đó là từ thế kỷ thứ 5 TCN, các nhà triết học và toán học Hy Lạp danh tiếng đều xem Trái Đất có dạng tròn. Ý tưởng này có vẻ như được khởi nguồn vào thời Pythagor, và rất có thể nó xuất phát từ một trong số những môn đồ của ông. Hoặc cũng có thể đó là điều phổ biến, ai cũng biết, dựa trên những bằng chứng như cái bóng tròn của Trái Đất trên Mặt Trăng trong thời gian xảy ra nguyệt thực, hay sự tương tự với điều hiển nhiên là Mặt Trăng tròn.

Mặc dù vậy, ngay cả với người Hy Lạp, Trái Đất vẫn là trung tâm của vũ trụ và mọi thứ khác đều quay xung quanh nó. Sự đạo hàng (dẫn đường trong hàng hải) được thực hiện bằng cách quan sát các vì sao và dựa theo đường bờ biển. Phương trình Pythagor đã làm thay đổi tất cả những điều này. Nó đưa loài người bước lên con đường đến với những hiểu biết hiện nay về địa lý trên hành tinh của chúng ta và vị trí của nó trong hệ Mặt Trời. Đó là bước quan trọng đầu tiên để hướng tới các kỹ thuật hình học cần thiết cho việc vẽ bản đồ, đạo hàng và đo đạc địa hình. Nó cũng cho ta chìa khóa để mở ra mối quan hệ cực kỳ quan trọng giữa hình học và đại số. Con đường phát triển này đi thẳng từ thời kỳ cổ đại tới thuyết tương đối

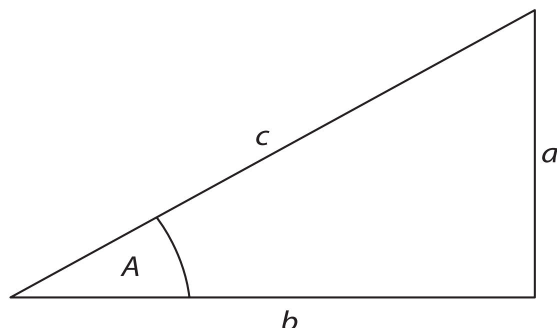
rộng và vũ trụ học hiện đại (xem chương 13). Phương trình Pythagor mở ra những hướng khám phá hoàn toàn mới cho con người, cả về mặt nghĩa bóng lẫn nghĩa đen. Nó hé lộ hình dạng thế giới của chúng ta và vị trí của nó trong vũ trụ.

Rất nhiều các tam giác mà ta gặp trong đời sống hằng ngày không phải là tam giác vuông, bởi vậy các ứng dụng trực tiếp của phương trình này có vẻ khá hạn chế. Tuy nhiên, bất kỳ tam giác nào cũng có thể cắt được thành hai tam giác vuông như hình 6 (trang 28), và bất kỳ hình đa giác nào cũng có thể cắt được thành các tam giác. Vì thế các tam giác vuông là then chốt: nó chứng tỏ rằng có mối liên hệ hữu ích giữa hình dạng của một tam giác và độ dài các cạnh của nó. Môn học được phát triển từ cái nhìn sâu sắc đó là lượng giác học: phép "tam giác đạc".

Tam giác vuông là cơ sở của lượng giác và đặc biệt nó xác định các hàm lượng giác cơ bản như sin, cos, tan. Những tên gọi này có nguồn gốc Ả Rập, và các hàm này và những hàm tiền thân của chúng đã trải qua quá trình phát triển phức tạp mới đưa đến phiên bản ngày nay. Tôi sẽ rút gọn lại và chỉ diễn giải kết cục thôi. Một tam giác vuông có, dĩ nhiên, một góc vuông, nhưng hai góc còn lại là tùy ý, dù vậy tổng của chúng bằng 90^{o}. Liên quan tới một góc bất kỳ có ba hàm số, đó là những quy tắc để tính toán một con số liên quan. Với góc được ký hiệu là *A* trong hình 5, sử dụng các ký hiệu truyền thống *a, b, c* cho ba cạnh, ta định nghĩa sine (sin), cosine (cos), và tang (tan) như sau:

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \tan A = \frac{a}{b}$$

Các đại lượng này chỉ phụ thuộc vào góc A, bởi vì tất cả các tam giác vuông với một góc A cho trước là đồng dạng, chỉ khác nhau về kích cỡ.



Hình 5 Lượng giác học dựa trên một tam giác vuông.

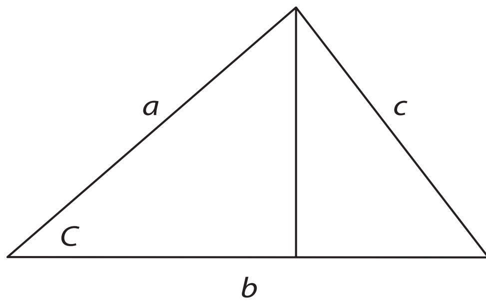
Hệ quả là, có thể lập bảng các giá trị của sin, cos, và tan cho một khoảng các góc, và sau đó sử dụng chúng để tính toán các đặc trưng của các tam giác vuông. Một ứng dụng tiêu biểu, đã có từ thời cổ đại, là tính toán độ cao của một cây cột chỉ sử dụng các phép đo được thực hiện tại mặt đất. Giả sử rằng, ở khoảng cách 100m, góc nhìn đỉnh cao nhất của cột là 22°. Lấy $A = 22^\circ$ trong hình 5, như vậy a là chiều cao của cột. Khi đó, theo định nghĩa của hàm tan, ta có:

$$\tan 22^\circ = \frac{a}{100}$$

do đó

$$a = 100\tan 22^\circ$$

Vì $\tan 22^\circ = 0{,}404$, chính xác tới 3 chữ số sau dấu phẩy, ta suy ra $a = 40{,}4$m.



Hình 6 Chia một tam giác thành hai tam giác vuông

Một khi đã có các hàm lượng giác, ta có thể mở rộng định lý Pythagor cho trường hợp tam giác không có góc vuông. Hình 6 trình bày một tam giác với góc *C* và các cạnh *a, b, c*. Chia đôi tam giác thành hai tam giác vuông như trên hình. Khi đó áp dụng định lý Pythagor hai lần (cho hai tam giác vuông) và sau một vài tính toán đại số[4] ta được:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$$

một phương trình tương tự với công thức Pythagor, ngoại trừ số hạng $-2ab\cos C$. Định lý hàm số cos này có cùng vai trò như định lý Pythagor, đó là liên hệ *c* với *a* và *b*, nhưng bây giờ chúng ta phải thêm vào các thông tin về góc *C*.

Định lý hàm số cos là một trong những rường cột của lượng giác học. Nếu ta biết hai cạnh của tam giác và góc xen giữa chúng, ta có thể sử dụng chúng để tính cạnh còn lại. Các phương trình khác cho phép ta tính được các góc còn lại. Tất cả các phương trình này đều có thể truy nguyên tận cùng về tam giác vuông.

Được trang bị các phương trình lượng giác và dụng cụ đo lường thích hợp, chúng ta có thể tiến hành trắc lượng và lập nên các bản đồ chính xác. Đây không phải là ý tưởng gì mới lạ, nó đã xuất hiện trong Rhind Papyrus, một tập hợp các kỹ

thuật toán học của người Ai Cập có niên đại từ năm 1650 TCN. Nhà triết học Hy Lạp Thales đã sử dụng hình học trong tam giác để đánh giá chiều cao các kim tự tháp ở Giza vào khoảng năm 650 TCN. Hero xứ Alexandria đã mô tả chính kỹ thuật đó vào năm 50 SCN. Vào khoảng năm 240 TCN, nhà toán học Hy Lạp Eratosthenes đã tính toán kích thước Trái Đất dựa vào quan sát góc của Mặt Trời với mặt đất vào giữa trưa ở hai nơi khác nhau: Alexandria và Syene (bây giờ là Aswan), Ai Cập. Một hậu bối của các học giả Ả Rập đã bảo tồn và phát triển các phương pháp này và ứng dụng chúng đặc biệt cho các đo đạc thiên văn như đo kích thước của Trái Đất.

Công việc trắc lượng được bắt đầu vào năm 1533 khi người vẽ bản đồ người Hà Lan Gemma Frisius giải thích cách sử dụng lượng giác để lập ra một bản đồ chính xác trong tác phẩm *Cuốn sách liên quan đến vấn đề mô tả vị trí (Libellus de Locorum Describendorum Ratione)*. Tin đồn về phương pháp này lan truyền khắp châu Âu và đến tai nhà quý tộc, nhà thiên văn học người Đan Mạch Tycho Brahe. Năm 1579, Tycho đã sử dụng nó để vẽ một bản đồ chính xác của hòn đảo Hven, nơi đặt đài thiên văn của ông. Năm 1615, nhà toán học người Hà Lan Willebrord Snellius (Snel van Royen) đã phát triển phương pháp này, về cơ bản, thành dạng hiện đại của nó: tam giác đạc. Khu vực cần vẽ bản đồ được phủ bởi một mạng các tam giác. Bằng cách đo một chiều dài ban đầu một cách thật cẩn thận, và đo các góc, ta có thể tính được vị trí các góc của tam giác, và từ đó có thể tính được các đặc trưng thú vị khác bên trong chúng. Snellius đã tính được khoảng cách giữa hai thị trấn của Hà Lan, Alkmaar và Bergen op Zoom, khi sử dụng mạng 33 tam giác. Sở dĩ ông chọn hai thị trấn này là

vì chúng nằm cùng trên một kinh tuyến, và cách nhau chính xác một độ cung. Biết được khoảng cách giữa chúng, ông tính được kích thước của Trái Đất, kết quả này được ông công bố trong cuốn *Eratosthenes của Hà Lan (Eratosthenes Batavus)* vào năm 1617. Nó đạt độ chính xác khoảng 4%. Ông cũng thay đổi các phương trình của lượng giác để phản ánh bản chất cầu của bề mặt Trái Đất, một bước quan trọng trong việc hướng tới sự đạo hàng hiệu quả hơn.

Tam giác đạc là một phương pháp gián tiếp để tính toán khoảng cách nhờ sử dụng góc. Khi khảo sát một vùng đất phẳng, một khu công trình hay một quốc gia, vấn đề thực tiễn chính cần quan tâm là, đo góc thì dễ dàng hơn đo khoảng cách. Phép tam giác đạc cho phép ta đo rất ít khoảng cách nhưng đo rất nhiều góc, sau đó mọi thứ còn lại được suy ra từ các phép tính lượng giác. Phương pháp này bắt đầu từ việc kẻ một đường thẳng giữa hai điểm, gọi là đường cơ sở, và đo độ dài của nó một cách trực tiếp với độ chính xác rất cao. Sau đó chúng ta chọn một điểm nhô lên trong vùng đất mà có thể nhìn thấy từ cả hai đầu của đường cơ sở và đo các góc từ cả hai đầu của đường cơ sở này tới điểm đó. Bây giờ chúng ta có một tam giác và chúng ta biết một cạnh của nó và hai góc, những điều này cố định hình dạng và kích cỡ của tam giác. Sau đó, chúng ta có thể sử dụng lượng giác để tính toán hai cạnh còn lại.

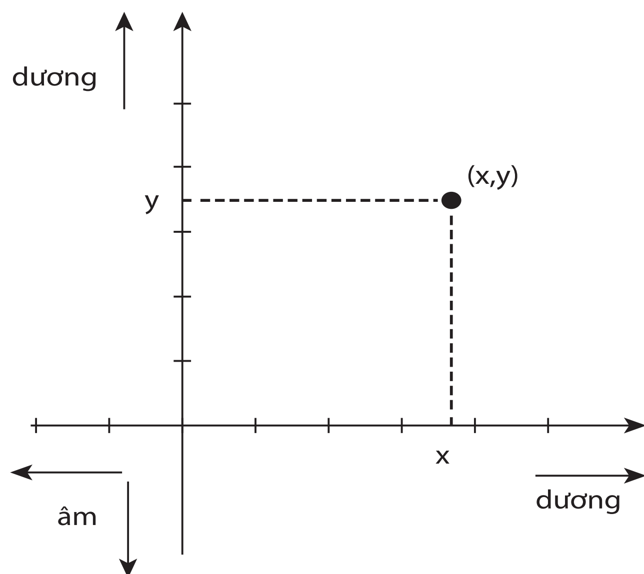
Thực tế, bây giờ chúng ta có thêm hai đường cơ sở nữa: các cạnh mới tính được của tam giác. Từ các cạnh đó, chúng ta có thể đo được các góc tới các điểm khác, ở xa hơn. Tiếp tục quá trình này để tạo nên một mạng các tam giác phủ kín cả vùng đất cần vẽ bản đồ. Bên trong mỗi tam giác, quan sát các góc tới tất cả các điểm đáng chú ý – tháp nhà thờ, ngã tư, vân vân. Cùng một mẹo lượng giác như trên, ta có thể xác định vị

trí chính xác của chúng. Ở bước cuối cùng, sự chính xác của toàn bộ quá trình đo đạc có thể được kiểm tra bằng cách đo trực tiếp một trong những cạnh cuối cùng.

Vào cuối thế kỷ 18, phép tam giác đạc được sử dụng thường xuyên trong công việc đo vẽ bản đồ. Bắt đầu từ 1783, Cục bản đồ Anh quốc phải mất 70 năm mới hoàn thành nhiệm vụ này. Bản đồ lượng giác lớn của Ấn Độ, trong đó bao gồm việc lập bản đồ của cả dãy Himalaya và xác định chiều cao của đỉnh Everest, được bắt đầu từ 1801. Đến thế kỷ 21, hầu hết các bản đồ cỡ lớn được thực hiện nhờ sử dụng các ảnh vệ tinh và GPS (hệ thống định vị toàn cầu). Phép tam giác đạc cụ thể không còn được sử dụng nữa. Nhưng nó vẫn còn đó, ẩn đằng sau các phương pháp được sử dụng để tính toán vị trí từ dữ liệu vệ tinh.

Định lý Pythagor cũng đóng vai trò sống còn đối với việc phát minh ra hình học giải tích. Đây là một cách để biểu diễn các hình hình học bằng các con số, nhờ sử dụng hệ thống các đường, được gọi là các trục tọa độ, trên đó đánh dấu bởi các con số. Hệ thống được biết đến nhiều nhất có lẽ là hệ tọa độ Descartes trong mặt phẳng, tên gọi này là nhằm vinh danh nhà toán học, triết học người Pháp René Descartes, một trong những người tiên phong vĩ đại trong lĩnh vực này – mặc dầu ông không phải là người đầu tiên. Hãy vẽ hai đường thẳng: một đường nằm ngang, được đánh dấu là x, và một đường thẳng đứng, được đánh dấu là y. Các đường này gọi là các trục tọa độ, và giao điểm của chúng gọi là gốc tọa độ. Đánh dấu các điểm dọc trên hai trục dựa theo khoảng cách của chúng đến gốc tọa độ, giống như những vạch trên chiếc thước kẻ vậy: các số dương nằm ở bên phải (trên trục x) và phía trên (trên trục y), số âm nằm ở bên trái (trên trục x) và

phía dưới (trên trục *y*). Bây giờ chúng ta có thể xác định bất kỳ điểm nào trên mặt phẳng theo hai số *x* và *y*, gọi là các tọa độ của nó, bằng cách nối điểm đó với các trục như trên hình 7. Cặp số *(x, y)* hoàn toàn xác định vị trí của điểm đó.



Hình 7 Hai trục và tọa độ của một điểm.

Các nhà toán học vĩ đại của châu Âu thế kỷ 17 đã nhận ra rằng, trong phạm vi này, một đường thẳng hay đường cong trong mặt phẳng sẽ tương ứng với tập các nghiệm *(x, y)* của một phương trình nào đó với biến *x* và *y*. Chẳng hạn, phương trình $y = x$ xác định một đường chéo từ bên trái phía dưới tới bên phải phía trên, bởi vì *(x, y)* nằm trên đường thẳng đó nếu và chỉ nếu $y = x$. Tổng quát, một phương trình tuyến tính – có dạng $ax + by = c$ với *a, b, c* là các hằng số – tương ứng với một đường thẳng, và ngược lại.

Vậy phương trình nào tương ứng với một đường tròn? Đó chính là nơi phương trình Pythagor xuất hiện. Nó ngụ ý rằng khoảng cách *r* từ gốc tọa độ tới điểm *(x, y)* thỏa mãn phương trình:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

và chúng ta có thể giải phương trình này theo *r* để thu được:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vì tập tất cả các điểm nằm cách gốc tọa độ một khoảng *r* không đổi chính là đường tròn bán kính *r* với tâm nằm ở gốc tọa độ, do đó chính phương trình này xác định một đường tròn. Tổng quát hơn, đường tròn bán kính *r* với tâm ở *(a, b)* tương ứng với phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

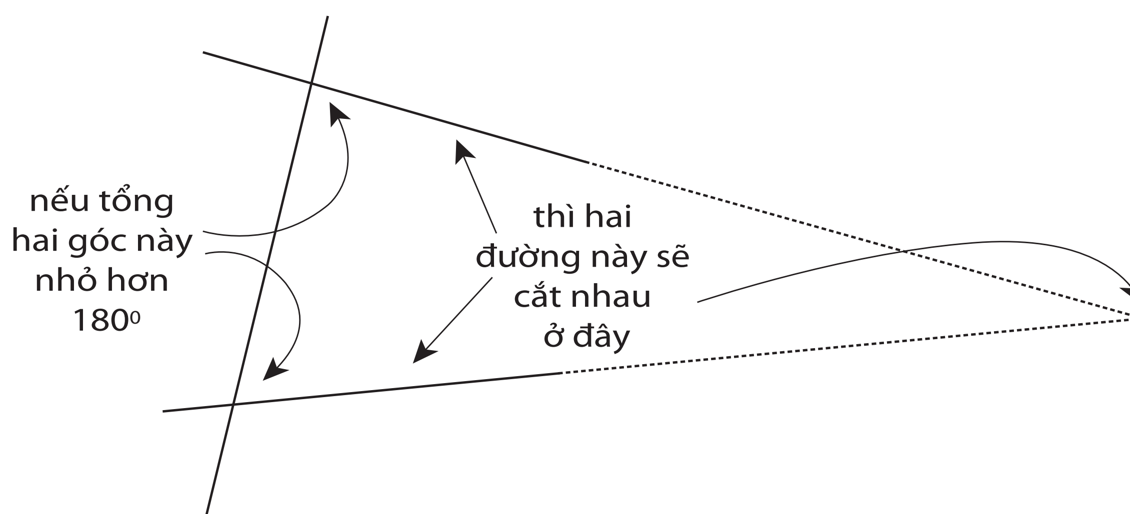
và cũng chính phương trình đó xác định khoảng cách *r* giữa 2 điểm *(x, y)* và *(a, b)*. Do đó định lý Pythagor cho ta biết hai điều quan trọng: các phương trình nào xác định đường tròn, và làm thế nào tính được khoảng cách khi biết các tọa độ.

Bản thân định lý Pythagor đã là rất quan trọng, nhưng nó thậm chí còn phát huy tầm ảnh hưởng mạnh hơn thông qua những tổng quát hóa của mình. Ở đây tôi sẽ chỉ tiếp tục theo đuổi một nhánh của các phát triển sau này, để dẫn tới kết nối với thuyết tương đối mà chúng ta sẽ trở lại ở chương 13.

Phép chứng minh định lý Pythagor trong bộ *Cơ sở* của Euclid đã đặt nó vào trong địa hạt của hình học Euclid một cách vững chắc. Đã có thời gian cụm từ đó có thể thay thế chỉ bằng từ "hình học", bởi vì khi đó người ta coi hình học Euclid là hình học đích thực của không gian vật lý. Đó là hiển nhiên, giống như hầu hết các điều được coi là hiển nhiên, nhưng rồi hóa ra lại là sai lầm.

Euclid rút ra tất cả các định lý của ông từ một số lượng nhỏ các giả thiết cơ bản, mà ông phân loại chúng như là các định nghĩa, tiên đề và các khái niệm chung. Công trình của

ông hết sức hài hòa, trực quan và cô đọng, chỉ với một ngoại lệ, đó là tiên đề thứ năm của ông: “Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng tạo thành các góc trong cùng phía nhỏ hơn hai lần góc vuông, thì hai đường thẳng đó, nếu được kéo ra vô hạn, sẽ cắt nhau ở phía mà tổng các góc là nhỏ hơn hai vuông”. Hơi dài dòng một chút, hình 8 có thể sẽ có ích đối với bạn.

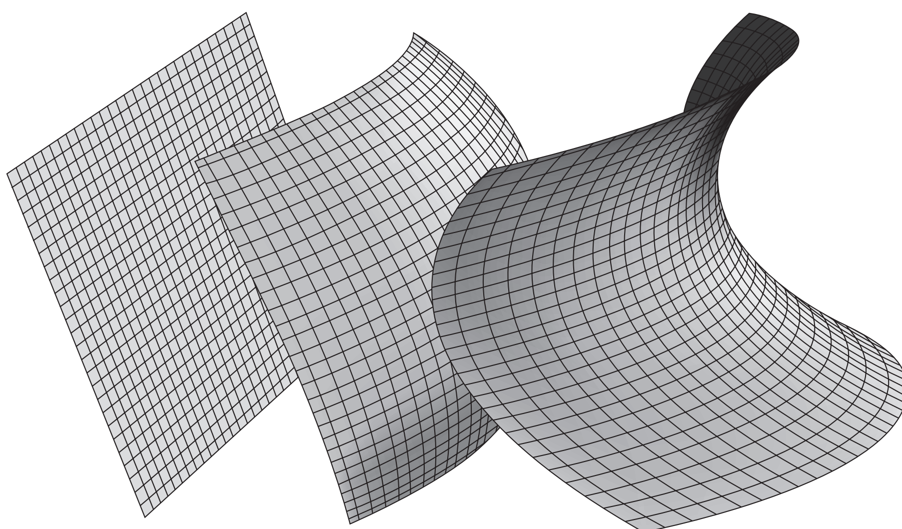


Hình 8 Tiên đề đường thẳng song song của Euclid.

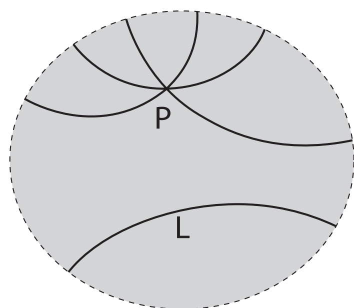
Trong hơn một ngàn năm, các nhà toán học đã tìm cách sửa chữa cái mà họ coi là một khuyết điểm. Họ không chỉ tìm kiếm điều gì đó đơn giản hơn và trực quan hơn mà vẫn đạt được cùng kết quả, mặc dù một vài trong số họ đã tìm thấy những thứ như thế. Mà họ muốn tìm cách từ bỏ hoàn toàn tiên đề vụng về này bằng cách chứng minh nó. Sau một vài thế kỷ, cuối cùng các nhà toán học đã nhận ra rằng có những hình học khác, “phi Euclid”, nghĩa là chứng minh đó không tồn tại. Các loại hình học mới này cũng nhất quán về mặt logic như hình học Euclid, và chúng cũng tuân theo tất cả các tiên đề của Euclid ngoại trừ tiên đề đường thẳng song song. Chúng có thể được diễn giải như hình học của các đường trắc

địa – đường ngắn nhất – trên các mặt cong, hình 9. Điều này đã thu hút sự chú ý đến ý nghĩa của độ cong.

Mặt phẳng của Euclid là phẳng, có độ cong bằng 0. Một mặt cầu có độ cong như nhau ở mọi điểm và dương: ở lân cận bất kỳ điểm nào trông cũng giống như một mái vòm. (Một điểm kỹ thuật tinh tế: các đường tròn lớn gặp nhau ở hai điểm, chứ không phải một điểm như các tiên đề của Euclid đòi hỏi, như vậy hình học cầu được sửa đổi bằng cách đồng nhất các điểm đối cực trên mặt cầu – coi chúng như một. Mặt cong bây giờ trở thành cái gọi là mặt phẳng xạ ảnh và hình học trên đó được gọi là hình học elliptic.) Cũng tồn tại các mặt có độ cong âm không đổi: ở lân cận bất cứ điểm nào trông cũng giống như chiếc yên ngựa. Mặt như thế được gọi là mặt hyperbolic, và nó có thể biểu diễn nôm na bằng nhiều cách. Có lẽ cách đơn giản nhất là xem nó như phần trong của một đĩa tròn, và định nghĩa "đường thẳng" là một cung tròn cắt biên của đĩa dưới một góc vuông (Hình 10).



Hình 9 Độ cong của một mặt. *Trái*: độ cong 0; *Giữa*: độ cong dương; *Phải*: độ cong âm.



Hình 10 Mô hình đĩa của mặt hyperbolic. Cả ba đường thẳng đi qua *P* đều không cắt đường *L*.

Dường như trong khi hình học phẳng có thể là "phi Euclid", thì điều đó lại là bất khả đối với hình học của không gian. Bạn có thể bẻ cong một mặt bằng cách đẩy nó vào chiều thứ ba, nhưng bạn không thể bẻ cong không gian bởi vì không còn chiều dư nào để đẩy vào nữa. Tuy nhiên, đây là một quan điểm ngây thơ. Chẳng hạn, chúng ta có thể mô hình hóa không gian hyperbolic ba chiều bằng cách sử dụng phần trong của mặt cầu. Các đường thẳng được mô hình hóa bởi các cung tròn cắt biên dưới một góc vuông, còn mặt phẳng là các phần của những mặt cầu tạo với biên một góc vuông. Hình học này là ba chiều, thỏa mãn tất cả các tiên đề của Euclid ngoại trừ tiên đề thứ năm, và theo nghĩa nào đó có thể khẳng định nó xác định một không gian cong ba chiều. Nhưng nó không cong xung quanh bất kỳ thứ gì, hay cong theo một hướng mới nào.

Nó chỉ cong mà thôi.

Với tất cả các hình học mới sẵn có này, một quan điểm mới bắt đầu chiếm vị trí trung tâm – nhưng là trong vật lý chứ không phải toán học. Vì không gian không nhất thiết phải là Euclid, vậy nó có hình dạng như thế nào? Các nhà khoa học nhận ra rằng thực tế họ không hề biết. Năm 1813, Gauss, khi biết rằng trong một không gian cong tổng các góc

trong của một tam giác không bằng 180^o, đã đo các góc của một tam giác tạo thành từ ba đỉnh núi Brocken, Hohehagen và Inselberg. Ông thu được một tổng lớn hơn 180^o là 15 giây cung. Nếu kết quả này chính xác, nó ngụ ý rằng không gian (chí ít là trong vùng đó) có độ cong dương. Nhưng bạn sẽ cần một tam giác lớn hơn rất nhiều và các công cụ đo chính xác hơn nữa để loại bỏ các sai số do quan sát. Vì vậy những quan sát của Gauss chưa đủ thuyết phục. Không gian vẫn có thể là Euclid, và cũng có thể không.

Nhận xét của tôi rằng không gian hyperbolic ba chiều "chỉ cong thôi" phụ thuộc vào quan điểm mới về độ cong, cũng khởi nguồn từ Gauss. Mặt cầu có độ cong dương không đổi, còn mặt phẳng hyperbolic có độ cong âm không đổi. Nhưng độ cong của một mặt không nhất thiết phải là hằng số. Nó có thể cong rất mạnh ở chỗ này, nhưng cong ít hơn ở những chỗ khác. Thực tế, nó có thể có độ cong dương ở một số vùng, nhưng lại âm ở những vùng khác. Độ cong có thể biến thiên liên tục từ vị trí này tới vị trí khác. Nếu một mặt trông giống như khúc xương chó thì hai bầu tròn ở hai đầu có độ cong dương nhưng phần nối chúng lại có độ cong âm.

Gauss đã tìm kiếm một công thức để đặc trưng cho độ cong của một mặt ở một điểm bất kỳ. Khi ông tìm ra và công bố nó trong cuốn *Nghiên cứu tổng quan về các mặt cong (Disquisitiones Generales Circa Superficies Curva)* vào năm 1828, ông đã đặt tên nó là "định lý đáng chú ý". Vậy điều gì là đáng chú ý ở đây? Gauss đã xuất phát từ quan điểm ngây thơ về độ cong: nhúng mặt đó vào không gian ba chiều và tính toán xem nó bị cong như thế nào. Nhưng kết quả tính toán chỉ cho ông thấy rằng không gian xung quanh không có

ảnh hưởng gì cả. Nó không có mặt trong công thức. Ông viết: "Công thức... tự bản thân nó dẫn tới định lý đáng chú ý: Nếu một mặt cong được phát triển trên bất kỳ mặt cong nào khác, thì độ cong tại mỗi điểm đều không thay đổi." Chữ "được phát triển" ở đây theo ý ông có nghĩa là "được cuốn quanh".

Hãy lấy một tờ giấy phẳng, độ cong bằng 0. Bây giờ cuốn nó quanh một cái chai. Nếu cái chai là hình trụ thì tờ giấy sẽ cuốn hoàn hảo quanh đó mà không bị nhăn, kéo căng hay bị xé rách. Nhìn bên ngoài thì nó bị uốn cong, nhưng đây là sự uốn cong tầm thường, bởi vì nó không làm thay đổi dạng hình học của tờ giấy theo bất kỳ cách nào. Nó chỉ làm thay đổi cách liên hệ của tờ giấy với không gian xung quanh. Vẽ một tam giác vuông trên tờ giấy phẳng, đo các cạnh của nó, kiểm tra định lý Pythagor. Bây giờ cuốn hình vẽ quanh cái chai. Độ dài các cạnh *được đo dọc theo tờ giấy* không thay đổi. Định lý Pythagor vẫn còn đúng.

Tuy nhiên, mặt cầu có độ cong khác 0. Vì vậy không thể cuốn khít một tờ giấy quanh nó mà không phải gấp, phải kéo dãn ra, hay làm rách giấy. Hình học trên mặt cầu khác biệt một cách căn bản với hình học phẳng. Ví dụ, điểm giao giữa xích đạo của Trái Đất với các kinh tuyến 0^0 và 90^0 nối tới điểm cực bắc của nó xác định một tam giác có ba góc vuông và ba cạnh bằng nhau (giả sử rằng Trái Đất là hình cầu). Như vậy định lý Pythagor không còn đúng nữa.

Ngày nay chúng ta gọi độ cong theo nghĩa nội tại của nó là "độ cong Gauss". Sử dụng một sự tương tự sống động, Gauss đã giải thích vì sao nó lại quan trọng, và lời giải thích này vẫn được dùng đến ngày nay. Hãy tưởng tượng một con kiến bị giới hạn trên mặt đang xét. Làm cách nào con kiến có thể

phát hiện ra bề mặt đó có bị cong hay không? Nó không thể bước ra bên ngoài bề mặt để xem mặt đó có cong hay không. Nhưng nó có thể sử dụng công thức của Gauss để thực hiện các đo đạc phù hợp chỉ thuần túy trên bề mặt đó. Chúng ta có cùng vị thế như con kiến khi cố gắng tìm ra dạng hình học thực sự cho không gian của mình. Chúng ta không thể bước ra bên ngoài không gian đó. Tuy nhiên, trước khi có thể tranh đua đo đạc với con kiến, chúng ta cần có một công thức tính độ cong của một không gian ba chiều. Gauss không có nó. Nhưng một trong các học trò của ông, đầy táo bạo, tuyên bố rằng anh đã có trong tay công thức đó.

Người học trò đó là Georg Bernhard Riemann, và anh ta đang cố gắng giành được học vị mà các đại học ở Đức gọi là Habilitation, bước tiếp sau của học vị tiến sĩ. Vào thời của Riemann, có được học vị đó có nghĩa là bạn có thể thu phí của sinh viên cho bài giảng của bạn. Từ đó cho tới bây giờ, để nhận được Habilitation đòi hỏi phải trình bày nghiên cứu của bạn trong một bài giảng đại chúng đồng thời cũng là một bài thi. Ứng viên sẽ đưa ra vài chủ đề và người chấm thi, trong trường hợp của Riemann là Gauss, sẽ chọn một trong số đó. Riemann, một tài năng toán học lỗi lạc, đã liệt kê ra vài chủ đề chính thống mà ông biết là đã lạc hậu, nhưng như một tia sáng vụt lóe trong tâm trí, ông cũng đề xuất *Về những giả thuyết trong cơ sở của hình học* (*On the hypotheses which lies at the foundation of geometry*). Gauss đã quan tâm tới chủ đề này từ lâu và lẽ tự nhiên, ông đã chọn nó cho bài thi của Riemann.

Trong một thoáng, Riemann hối hận vì đã đưa ra một chủ đề đầy thử thách như vậy. Ông vốn rất không thích nói ở chỗ đông người, vả lại ông cũng chưa suy nghĩ sâu sắc, chi tiết về

mặt toán học cho đề tài này. Ông mới chỉ có vài ý tưởng mơ hồ, mặc dù hấp dẫn, về không gian bị uốn cong, *bất kể* với số chiều thế nào. Những gì Gauss đã làm cho trường hợp hai chiều, với định lý đáng chú ý của ông, thì Riemann cũng muốn làm như thế cho số chiều bất kỳ. Và bây giờ ông phải trình bày, và phải làm nhanh. Bài giảng hiện ra lờ mờ. Áp lực gần như làm cho ông suy nhược về tinh thần, và công việc hằng ngày của ông là trợ tá cho Wilhelm Weber, một đồng nghiệp của Gauss, với các thí nghiệm về điện xem ra chẳng giúp được gì cho ông lúc này. Nhưng khoan, có thể là có đấy, vì trong khi Riemann nghĩ về mối liên hệ giữa lực điện và lực từ trong công việc hằng ngày, ông nhận ra rằng lực có thể liên quan tới độ cong. Lần ngược trở lại, ông có thể sử dụng toán học của các lực để định nghĩa độ cong, như bài thi của ông đòi hỏi.

Năm 1854, Riemann trình bày bài giảng của ông và không hề ngạc nhiên, nó đã được chào đón một cách nồng nhiệt. Ông bắt đầu với việc định nghĩa một "đa tạp" (*manifold*). Một cách hình thức, một "đa tạp" được xác định bởi một hệ rất nhiều các tọa độ, cùng với một công thức để xác định khoảng cách giữa các điểm lân cận, bây giờ được gọi là metric Riemann. Nói một cách đơn giản, một đa tạp là một không gian đa chiều với tất cả những tính chất đẹp đẽ của nó. Đỉnh cao trong bài giảng của Riemann là một công thức tổng quát cho định lý đáng chú ý của Gauss: nó định nghĩa độ cong của đa tạp chỉ theo metric của đa tạp đó. Và tại đây câu chuyện trở thành một vòng tròn khép kín giống như con rắn Orobouros nuốt chính cái đuôi của nó, bởi vì metric này chứa đựng những vết tích rõ ràng của định lý Pythagor.

Ví dụ, giả sử ta có một đa tạp ba chiều. Tọa độ của một điểm trên đó là (x, y, z) và $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ là tọa độ một

điểm lân cận, với d có nghĩa là "phần rất nhỏ" (chẳng hạn, dx là "phần rất nhỏ của x"). Nếu không gian là Euclid, với độ cong bằng 0, thì khoảng cách ds giữa hai điểm thỏa mãn phương trình:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

và đây chẳng qua chỉ là định lý Pythagor giới hạn cho các điểm gần nhau. Nếu không gian bị uốn cong, với độ cong biến thiên từ điểm này tới điểm khác, công thức tương tự, tức metric, sẽ có dạng sau:

$$ds^2 = X dx^2 + Y dy^2 + Z dz^2 + 2U dx dy + 2V dx dz + 2W dy dz$$

Ở đây *X, Y, Z, U, V, W* có thể phụ thuộc vào *x, y* và *z*. Công thức này trông có vẻ hơi dài dòng, nhưng giống như định lý Pythagor, nó bao gồm tổng các bình phương (và các tích đại loại như dxdy) cộng với vài đại lượng nhỏ lẻ nữa. Các số 2 xuất hiện bởi vì công thức trên có thể gói gọn về dạng bảng 3×3 hay ma trận:

$$\begin{pmatrix} X & U & V \\ U & Y & W \\ V & W & Z \end{pmatrix}$$

với *X, Y, Z* xuất hiện một lần nhưng *U, V, W* xuất hiện hai lần. Bảng này đối xứng theo đường chéo; theo ngôn ngữ của hình học vi phân thì nó là một tensor đối xứng. Sự tổng quát hóa của Riemann cho định lý đáng chú ý của Gauss là một công thức cho độ cong của đa tạp, tại bất kỳ điểm nào cho trước, biểu diễn theo tensor này. Trong trường hợp đặc biệt khi định lý Pythagor áp dụng được, độ cong trở thành 0. Do đó, sự hữu hiệu của phương trình Pythagor chính là một phép thử để kiểm tra sự vắng mặt của độ cong.

Giống như công thức của Gauss, biểu thức độ cong của Riemann chỉ phụ thuộc vào metric của đa tạp. Một con kiến bị cầm tù trên đa tạp có thể biết được metric bằng cách đo đạc các tam giác rất nhỏ và tính toán độ cong. Độ cong là một tính chất nội tại của một đa tạp, độc lập với không gian xung quanh. Thật vậy, metric đã xác định hình học rồi, vì thế không cần tới không gian xung quanh nữa. Đặc biệt, người-kiến chúng ta có thể đặt câu hỏi về hình dạng của vũ trụ bao la và đầy bí ẩn này, và hy vọng tìm ra câu trả lời bằng cách thực hiện các quan sát mà không cần phải bước ra ngoài vũ trụ. Quả là tin tức tốt lành, vì chúng ta không thể làm được điều đó.

Riemann khám phá ra công thức của mình bằng cách sử dụng lực để định nghĩa hình học. Năm mươi năm sau, Einstein đã đảo ngược ý tưởng của Riemann, ông sử dụng hình học để định nghĩa lực hấp dẫn trong thuyết tương đối rộng, và khơi nguồn các ý tưởng mới về hình dạng của vũ trụ (xem chương 13). Đây là một sự tiến triển đáng ngạc nhiên của các sự kiện. Phương trình Pythagor xuất hiện lần đầu tiên cách đây khoảng 3500 năm để đo đạc đất đai. Nó được mở rộng cho trường hợp tam giác không có góc vuông và tam giác trên mặt cầu, cho phép chúng ta vẽ bản đồ các lục địa và đo đạc Trái Đất. Và một sự tổng quát hóa đáng chú ý cho phép chúng ta tìm hiểu hình dạng của vũ trụ. Các ý tưởng lớn thường có những khởi đầu nhỏ bé như thế đó.

2 Rút ngắn các thủ tục tính toán

Logarit

nhân cộng

$$\log xy = \log x + \log y$$

logarit

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Cách nhân hai số bằng cách cộng hai số khác có liên quan.

Tại sao nó lại quan trọng?

Vì phép cộng đơn giản hơn phép nhân nhiều.

Nó đã dẫn tới những gì?

Các phương pháp hiệu quả hơn trong việc tính toán các hiện tượng thiên văn như thiên thực và quỹ đạo các hành tinh. Các phương pháp tính nhanh trong tính toán khoa học. Thước logarit: người bạn trung thành của các kỹ sư. Phương pháp tính độ phân rã phóng xạ và *psychophysics (tâm vật lý)* của tri giác con người.

Những con số bắt nguồn từ các vấn đề thực tiễn: ghi chép tài sản, như số lượng động vật hay đất đai, và các giao dịch tài chính như thu thuế và kế toán. Bên cạnh các thẻ gỗ khắc các vạch đơn giản như ||||, các ký hiệu số cổ xưa nhất được biết đến hiện nay đã được tìm thấy bên ngoài các vỏ bao bằng đất sét. Năm 8000 TCN, các nhân viên kế toán ở Mesopotamia* đã sử dụng các thẻ nhỏ bằng đất sét với nhiều hình dạng khác nhau để lưu giữ thông tin. Nhà khảo cổ Denise Schmandt-Besserat nhận ra rằng mỗi hình dạng biểu diễn một mặt hàng cơ bản: hình cầu cho thóc lúa, hình trứng cho lọ dầu, v.v. Để bảo mật, các thẻ được niêm phong bằng bao đất sét. Nhưng sẽ thật phiền toái nếu phải phá vỡ bao bì đất sét để xem có bao nhiêu thẻ ở bên trong, vì thế các nhân viên kế toán thời cổ đại vạch các ký hiệu bên ngoài để chỉ số lượng bên trong. Cuối cùng họ nhận ra rằng một khi đã có các ký hiệu này, họ có thể loại bỏ các thẻ. Kết quả là xuất hiện một chuỗi ký hiệu các con số – nguồn gốc của tất cả các ký hiệu số sau này, và có thể của cả chữ viết nữa.

Xuất hiện cùng với các con số là số học: các phương pháp cộng, trừ, nhân và chia các số. Những dụng cụ như bàn tính đã được sử dụng để tính tổng, sau đó kết quả được ghi lại

---

* Lưỡng Hà, thuộc lưu vực sông Tigris và Euphrates, ngày nay là Iraq, một phần đông bắc của Syria, đông nam Thổ Nhĩ Kỳ và tây bắc của Iran – ND

dưới dạng ký hiệu. Theo thời gian, con người đã tìm ra những phương thức sử dụng các ký hiệu để tiến hành tính toán mà không cần sự trợ giúp cơ học, mặc dù bàn tính vẫn được sử dụng rộng rãi ở nhiều nơi trên thế giới, trong khi máy tính tay điện tử đã thay thế cho những tính toán bằng bút và giấy ở hầu hết các nước khác.

Số học cũng đã chứng minh tầm quan trọng của mình theo nhiều cách khác, đặc biệt là trong thiên văn và trắc địa. Khi những đường nét cơ bản của khoa học vật lý bắt đầu hình thành, các nhà khoa học trẻ cần thực hiện những tính toán, bằng tay, phức tạp hơn rất nhiều. Thông thường, công việc đó lấy đi của họ rất nhiều thời gian, có khi là nhiều tháng hoặc nhiều năm, cản trở những hoạt động sáng tạo hơn của họ. Rốt cục, việc đẩy nhanh tốc độ của quá trình tính toán đã trở nên cần thiết. Rất nhiều các máy tính cơ học đã được phát minh, tuy nhiên bước đột phá quan trọng nhất vẫn là về nhận thức: suy nghĩ trước, tính toán sau. Sử dụng toán học một cách thông minh, bạn có thể biến các tính toán phức tạp trở nên dễ dàng hơn nhiều.

Những ngành toán học mới nhanh chóng phát triển một cách tự thân, và cuối cùng đã có được những hệ quả sâu sắc cả về mặt lý thuyết cũng như thực tiễn. Ngày nay, những ý tưởng đầu tiên đó đã trở thành công cụ không thể thay thế xuyên suốt khoa học, thậm chí cả trong tâm lý học và các khoa học nhân văn. Chúng được sử dụng rộng rãi cho tới tận những năm 1980, khi các máy vi tính biến chúng thành lỗi thời đối với các mục đích thực hành, dù vậy, tầm quan trọng của chúng trong toán học và khoa học vẫn tiếp tục phát triển.

Ý tưởng trung tâm là một kỹ thuật toán học gọi là logarit.

Người sáng tạo ra nó là một điền chủ người Scotland, nhưng phải cần tới một giáo sư hình học rất quan tâm tới hàng hải và thiên văn học, thì mới thay thế ý tưởng xuất sắc nhưng còn nhiều sai sót của vị điền chủ kia bằng một ý tưởng tốt hơn nhiều.

Vào tháng 3 năm 1615, Henry Briggs đã viết một lá thư cho James Ussher, ghi lại một thời khắc quan trọng của lịch sử khoa học:

> Napper, huân tước Markinston, đã đặt vào đầu và tay tôi một công trình với ý tưởng mới và đáng ngưỡng mộ của ông về logarit. Tôi hy vọng có thể gặp ông ấy vào hè này, cầu Chúa phù hộ, vì tôi chưa từng gặp quyển sách nào làm tôi hài lòng hay ngạc nhiên hơn.

Briggs là giáo sư hình học đầu tiên ở đại học Gresham, London, và "Napper, huân tước Markinston" là John Napier, vị huân tước đời thứ 8 của Merchiston, nay là một phần của thành phố Edinburgh ở Scotland. Napier có vẻ hơi bí ẩn; ông quan tâm nhiều tới thần học, chủ yếu tập trung vào sách Khải Huyền. Đối với ông, công trình quan trọng nhất của mình là *Một khám phá minh bạch về toàn bộ sách Khải Huyền của thánh John (A Plaine Discovery of the Whole Revelation of St John)* – cuốn sách đã đưa ông tới dự đoán rằng ngày tàn của thế giới là vào năm 1688 hay 1700. Ông được cho là có dính líu tới cả thuật giả kim lẫn thuật gọi hồn, và những mối quan tâm của ông đối với thế giới huyền bí đã khiến ông được biết đến như một phù thủy. Theo lời đồn, ông luôn mang một con nhện đen trong một cái hộp nhỏ tới mọi nơi mà ông đến, và ông cũng có một "người thân", hay người bạn ma thuật: một con gà trống tơ đen. Theo Mark Napier, một hậu duệ của

ông, ông đã dùng nó để bắt những người giúp việc hay trộm cắp. Ông giam những kẻ tình nghi vào một căn phòng cùng với con gà tơ đen, lệnh cho họ vuốt ve nó và nói với họ rằng con chim ma thuật của ông sẽ phát hiện chính xác kẻ trộm. Nhưng hoạt động thần bí của Napier có cốt lõi duy lý, mà trong ví dụ cụ thể này, thể hiện ở chỗ ông rắc trên con gà một lớp bồ hóng mỏng. Một người giúp việc vô tội sẽ đủ tự tin để vuốt ve con gà như được chỉ dẫn và sẽ có dấu bồ hóng trên tay. Trong khi đó, một kẻ phạm tội, do sợ hãi bị phát hiện, sẽ tránh đụng vào con gà. Và vậy là, trớ trêu thay, bàn tay sạch sẽ lại chứng minh mình phạm tội.

Napier đã dành nhiều thời gian cho toán học, đặc biệt là những phương pháp đẩy nhanh tốc độ các phép tính số học phức tạp. Một phát minh của ông là bảng tính Napier, một tập hợp gồm 10 que gỗ có đánh dấu các số, dùng để đơn giản hóa quá trình thực hiện các phép nhân dài. Một khám phá thậm chí còn tuyệt vời hơn đã mang lại cho ông danh tiếng và tạo ra một cuộc cách mạng trong khoa học: không phải cuốn sách của ông về Khải Huyền, như ông đã hy vọng, mà là cuốn *Mô tả về sức mạnh kỳ diệu của logarit (Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)* xuất bản năm 1614. Lời nói đầu của nó cho thấy Napier biết chính xác cái mà ông đã tạo ra và nó hữu ích cho việc gì.[1]

> Thưa các nhà toán học đồng nghiệp, trong việc thực hành nghệ thuật toán học, không có gì tẻ nhạt hơn sự chậm trễ trong buồn tẻ khi thực hiện các phép nhân chia dài lê thê, rồi tìm các tỉ số, khai căn bậc hai và bậc ba, và... rất nhiều lỗi có thể phát sinh. Vì vậy, tôi đã vắt óc suy nghĩ, với một kỹ thuật chắc chắn và nhanh chóng, tôi có thể cải thiện

> những khó khăn nói trên. Cuối cùng, sau khi suy nghĩ rất nhiều, tôi đã tìm ra một phương pháp đáng ngạc nhiên để rút ngắn các thủ tục tính toán… Và tôi hân hạnh giới thiệu phương pháp này để các nhà toán học cùng sử dụng.

Khoảnh khắc mà Briggs nghe về logarit, ông như bị bỏ bùa. Cũng như nhiều nhà toán học cùng thời, ông đã mất rất nhiều thời gian để thực hiện các tính toán thiên văn. Chúng ta biết được điều này nhờ một lá thư khác mà ông gửi cho Ussher, đề năm 1610, có nhắc tới những tính toán thiên thực, và do Briggs trước đó đã xuất bản hai cuốn sách về các bảng số, một liên quan tới Bắc Cực và một tới hàng hải. Tất cả các công trình này đều đòi hỏi một khối lượng tính toán khổng lồ về số học và lượng giác phức tạp. Phát minh của Napier đã tiết kiệm được rất nhiều thời gian phải mất cho các công việc tẻ nhạt đó. Nhưng càng đọc tác phẩm của Napier, Briggs càng tin chắc rằng mặc dù chiến lược của Napier thật tuyệt vời, nhưng ông lại có chiến thuật sai lầm. Briggs đã đưa ra một cải tiến đơn giản nhưng hiệu quả và ông đã thực hiện một chuyến hành trình dài tới Scotland. Khi gặp nhau, "hai người đã nhìn nhau đầy ngưỡng mộ trong gần mười lăm phút trước khi mở lời"[2].

Điều gì đã tạo nên sự ngưỡng mộ to lớn đó? Một nhận xét rất quan trọng và hiển nhiên với bất kỳ ai đã từng học số học, đó là phép cộng thì tương đối dễ, nhưng phép nhân thì không. Phép nhân đòi hỏi nhiều thao tác số học hơn phép cộng. Chẳng hạn, việc cộng hai số có mười chữ số bao gồm mười bước đơn giản, nhưng để nhân chúng thì đòi hỏi tới 200 bước. Với các máy tính hiện đại, vấn đề này vẫn còn quan trọng,

nhưng giờ đây chúng ẩn mình đằng sau các thuật toán được sử dụng cho phép nhân. Nhưng trong thời kỳ của Napier, tất cả đều phải làm bằng tay. Không phải là rất tuyệt vời hay sao khi có một thủ pháp toán học cho phép chuyển đổi các phép nhân khó chịu thành phép cộng nhanh và dễ dàng hơn? Nghe ra quá hay đến mức không thật, nhưng Napier nhận thấy là có thể thực hiện được. Thủ pháp ở đây là làm việc với lũy thừa của một số cố định.

Trong đại số, lũy thừa của một biến x được biểu thị bởi một số nhỏ trên đầu bên phải. Tức là $xx = x^2$, $xxx = x^3$, $xxxx = x^4$,… và cứ tiếp tục như thế. Ở đây như thường lệ trong đại số, đặt hai chữ cái cạnh nhau nghĩa là thực hiện phép nhân giữa chúng. Do đó, chẳng hạn $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$. Bạn không nhất thiết phải mày mò lâu với các biểu thức như thế trước khi khám phá ra một cách đơn giản để tính toán, chẳng hạn $10^4 \times 10^3$. Chỉ cần viết:

$$\begin{aligned} 10000 \times 1000 &= (10 \times 10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) \\ &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 10.000.000 \end{aligned}$$

Số chữ số 0 trong kết quả là 7, bằng với 4 + 3. Bước đầu tiên trong phép tính này là chỉ ra *tại sao* nó lại là 4 + 3: chúng ta gắn 4 số 10 và 3 số 10 cạnh nhau. Một cách ngắn gọn:

$$10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$$

Hoàn toàn tương tự, bất kể giá trị của x là bao nhiêu đi nữa, nếu ta nhân lũy thừa a và lũy thừa b của nó với nhau, với a và b là số nguyên, thì ta sẽ thu được lũy thừa $a + b$:

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

Đây có vẻ như một công thức vô thưởng vô phạt, nhưng vế trái của nó là phép nhân hai đại lượng với nhau, trong khi ở vế phải, bước chính là cộng *a* và *b*, rõ ràng là đơn giản hơn.

Giả sử bạn muốn nhân 2,67 với 3,51. Bằng một phép nhân dài dòng, bạn sẽ nhận được 9,3717, chính xác tới hai chữ số thập phân là 9,37. Điều gì sẽ xảy ra nếu bạn thử dùng công thức ở trên? Mẹo ở đây nằm trong cách chọn x. Nếu ta lấy $x = 1{,}001$, khi đó sau một ít tính toán số học ta thấy:

$$(1{,}001)^{983} = 2{,}67$$
$$(1{,}001)^{1256} = 3{,}51$$

chính xác tới hai chữ số thập phân. Công thức trên nói với chúng ta rằng $2{,}67 \times 3{,}51$ bằng

$$(1{,}001)^{1256+983} = (1{,}001)^{2239}$$

kết quả chính xác tới 2 chữ số thập phân chính là 9,37.

Điểm cốt lõi của phép tính này chỉ là một phép cộng đơn giản, 1256 + 983 = 2239. Tuy nhiên, nếu bạn thử kiểm tra các phép tính số học của tôi, bạn sẽ nhanh chóng nhận ra những gì tôi đã làm khiến cho vấn đề trở nên khó hơn, chứ không hề dễ hơn. Để tính ra $(1{,}001)^{983}$ bạn phải nhân 1,001 với chính nó 983 lần. Và để khám phá ra 983 là lũy thừa chính xác cần sử dụng, bạn còn phải làm nhiều việc hơn nữa. Do đó, thoạt nhìn thì đây có vẻ như là một ý tưởng khá vô nghĩa.

Napier với tầm nhìn vô cùng sâu sắc của mình thì không cho là thế. Nhưng để khắc phục nó, một vài người kiên cường đã phải tính toán rất nhiều lũy thừa của 1,001, bắt đầu từ $1{,}001^2$ và lên tới một số nào đó, đại loại như $1{,}001^{10000}$. Sau đó họ có thể công bố một bảng gồm tất cả các lũy thừa như thế. Đến đây gần như toàn bộ công việc coi như đã hoàn thành.

Bạn chỉ cần di chuyển ngón tay xuống lần lượt các lũy thừa cho tới khi bạn thấy 2,67 bên cạnh 983; tương tự bạn cũng xác định được vị trí của 3,51 bên cạnh 1256. Sau đó, bạn cộng hai số này để thu được 2239. Hàng tương ứng của bảng số chỉ cho bạn biết rằng lũy thừa này của 1,001 là 9,37. Thế là xong.

Những kết quả thực sự chính xác đòi hỏi lũy thừa của số nào đó thực sự gần với 1, như 1,000001 chẳng hạn. Nó sẽ làm cho bảng trở lên lớn hơn nhiều, với một triệu lũy thừa hoặc hơn thế. Thực hiện các tính toán để lập nên bảng đó là cả một núi công việc. *Nhưng chỉ phải làm nó một lần thôi*. Nếu một vài thiện nhân tình nguyện hy sinh thì những thế hệ tiếp sau sẽ bớt được một khối lượng tính toán khổng lồ.

Trong bối cảnh của ví dụ này, chúng ta có thể nói rằng lũy thừa 983 và 1256 là các logarit của các số 2,67 và 3,51 mà chúng ta muốn nhân. Tương tự, số 2239 là logarit của tích số 9,37 của chúng. Viết tắt logarit là log, những gì chúng ta đã làm được viết lại dưới dạng phương trình:

$$\log ab = \log a + \log b$$

điều này đúng với mọi a và b. Sự lựa chọn 1,001 khá tùy ý được gọi là cơ số. Nếu chúng ta chọn cơ số khác, các logarit mà chúng ta tính toán cũng sẽ khác đi, nhưng với bất kỳ một cơ số cố định nào, mọi thứ đều diễn ra y như thế.

Đây là điều mà lẽ ra Napier nên làm. Nhưng bởi nhiều lý do mà chúng ta chỉ có thể phỏng đoán, ông đã thực hiện hơi khác đi. Briggs, tiếp cận kỹ thuật này với cái nhìn tươi mới hơn, đã phát hiện ra hai cách khác nhau để cải thiện ý tưởng của Napier.

Vào cuối thế kỷ 16, khi Napier bắt đầu nghĩ về lũy thừa của các số, ý tưởng về việc quy phép nhân về phép cộng thực ra đã được lan truyền giữa các nhà toán học. Một phương pháp hơi phức tạp hơn được biết đến dưới cái tên "*prosthapheiresis*" dựa trên một công thức có liên quan đến các hàm lượng giác, đã được sử dụng ở Đan Mạch[3]. Bị hấp dẫn bởi phương pháp đó, nhưng Napier đã đủ sáng suốt để nhận ra rằng các lũy thừa của một số cố định cũng có thể làm được y như vậy một cách đơn giản hơn. Những bảng cần thiết còn chưa tồn tại – nhưng điều đó cũng dễ dàng khắc phục thôi. Một người có tinh thần vì lợi ích chung phải thực hiện công việc này. Và Napier đã tình nguyện nhận nhiệm vụ đó, nhưng ông đã mắc một sai lầm về chiến lược. Thay vì sử dụng một cơ số hơi lớn hơn 1, ông lại dùng một cơ số hơi nhỏ hơn 1. Hệ quả là, dãy các lũy thừa bắt đầu với các số lớn, nhưng nhỏ dần về sau. Điều này khiến cho các tính toán trở nên cồng kềnh hơn.

Briggs ý thức được vấn đề này và đã tìm ra cách xử lý nó: sử dụng một cơ số hơi lớn hơn 1. Ông cũng phát hiện ra một vấn đề tinh tế hơn và cũng đã xử lý nó. Nếu phương pháp của Napier được cải tiến để làm việc với các lũy thừa của một số nào đó như 1,0000000001, thì sẽ không có mối liên hệ trực tiếp nào giữa logarit của 12,3456 và 1,23456 chẳng hạn. Do vậy mà hoàn toàn không rõ là khi nào bảng có thể *dừng lại*. Nguyên nhân của vấn đề này là giá trị của log 10, bởi vì:

$$\log 10x = \log 10 + \log x$$

Thật không may, log10 rất rối rắm: với cơ số 1,0000000001, logarit của 10 là 23.025.850.929. Briggs nghĩ sẽ tốt hơn nhiều nếu cơ số có thể được chọn sao cho log10 = 1. Khi đó $\log 10x = 1 + \log x$, do đó cho dù log1,23456 bằng bao nhiêu đi

nữa, bạn chỉ cần cộng thêm 1 để có log12,3456. Bây giờ bảng các logarit chỉ cần chạy từ 1 đến 10. Nếu gặp phải các số lớn hơn, bạn chỉ cần cộng thêm vào một số nguyên phù hợp.

Để đặt log10 = 1, bạn hãy làm như Napier đã làm, sử dụng cơ số 1,0000000001, nhưng sau đó bạn chia mỗi logarit cho con số bất thường 23.025.850.929. Bảng kết quả thu được bao gồm các logarit cơ số 10 mà tôi sẽ ký hiệu là $\log_{10}x$. Chúng thỏa mãn:

$$\log_{10}xy = \log_{10}x + \log_{10}y$$

như trước, nhưng đồng thời thỏa mãn:

$$\log_{10}10x = \log_{10}x + 1$$

Hai năm sau, Napier mất, và Briggs đã bắt tay tính toán lập ra bảng các logarit cơ số 10. Năm 1617, ông cho xuất bản cuốn *Logarit của thiên niên kỷ đầu tiên* (*Logarithmorum Chilias Prima*), chứa logarit của các số nguyên từ 1 đến 1000 chính xác tới 14 chữ số thập phân. Năm 1624 ông tiếp tục cho ra cuốn *Số học của các logarit* (*Arithmetic Logarithmica)*, một bảng logarit cơ số 10 của các số từ 1 đến 20.000 và từ 90.000 tới 100.000 với cùng độ chính xác. Những người khác nhanh chóng tiếp bước Briggs, lấp đầy những khoảng trống, và phát triển các bảng phụ trợ như logarit của các hàm lượng giác, chẳng hạn như log sin x.

Những ý tưởng tương tự lấy cảm hứng từ logarit cho phép chúng ta định nghĩa hàm lũy thừa x^a của một biến dương x với a không phải là các số nguyên dương. Tất cả những điều chúng ta phải làm là nhấn mạnh rằng các định nghĩa của chúng ta phải nhất quán với phương trình $x^a x^b = x^{a+b}$.

Để tránh các tính toán khó chịu, tốt nhất là giả sử x dương, và định nghĩa x^a sao cho nó cũng dương. (Với x âm, cách tốt nhất là đưa ra các số phức, xem chương 5.)

Ví dụ, x^0 là gì? Hãy nhớ rằng $x^1 = x$, theo công thức trên, x^0 phải thỏa mãn $x^0x = x^{0+1} = x$. Chia cho x ta thấy rằng $x^0 = 1$. Vậy bây giờ x^{-1} bằng bao nhiêu? Công thức chỉ ra $x^{-1}x = x^{-1+1} = x^0 = 1$. Chia cho x ta được $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Tương tự $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ v.v.

Mọi thứ bắt đầu trở nên thú vị và hữu ích khi chúng ta nghĩ về $x^{1/2}$. Nó phải thỏa mãn $x^{1/2}x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x^1 = x$. Do vậy $x^{1/2}$ nhân với chính nó thì bằng x. Số duy nhất có tính chất này là căn bậc hai của x. Do đó $x^{1/2} = \sqrt{x}$. Tương tự, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, căn bậc ba của x. Tiếp tục với cách này, chúng ta có thể định nghĩa $x^{p/q}$ cho mọi phân số p/q. Sau đó, sử dụng các phân số để xấp xỉ các số thực, chúng ta có thể định nghĩa x^a cho bất kỳ số thực a nào, mà vẫn thỏa mãn phương trình $x^ax^b = x^{a+b}$.

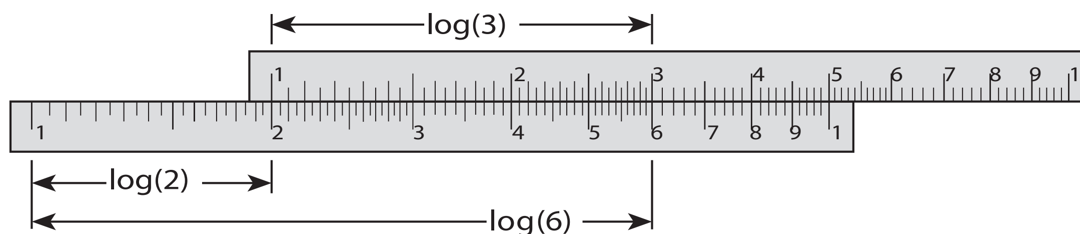
Đồng thời ta cũng suy ra rằng $\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$, và $\log\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log x$ do đó chúng ta có thể tính căn bậc hai và bậc ba một cách dễ dàng thông qua việc sử dụng bảng logarit. Ví dụ, muốn tính căn bậc hai của một số ta lấy logarit của nó, chia cho 2 và sau đó tìm số nào cho ta cùng logarit như thế. Với căn bậc ba, chúng ta làm tương tự nhưng chia cho 3. Những phương pháp truyền thống cho các vấn đề này rất tẻ nhạt và phức tạp. Bạn có thể thấy tại sao Napier lại nhắc đến căn bậc hai và căn bậc ba trong lời nói đầu cuốn sách của mình.

Ngay sau khi các bảng logarit hoàn chỉnh đã sẵn sàng, chúng đã trở thành công cụ không thể thay thế đối với các nhà khoa học, kỹ sư, những nhân viên trắc địa và các nhà hàng hải. Họ tiết kiệm được thời gian, sức lực, và tăng độ chính xác của các phép toán. Ban đầu, thiên văn học là đối tượng hưởng lợi lớn

nhất, bởi vì các nhà thiên văn thường xuyên phải thực hiện các tính toán dài và khó. Nhà toán học, thiên văn học Pháp Pierre Simon de Laplace nói rằng việc phát minh ra logarit đã giúp cho "lao động của nhiều tháng thu lại chỉ còn ít ngày, nhân đôi tuổi thọ của nhà thiên văn, giúp họ tránh được nhiều sai sót và sự chán ghét". Và cùng với việc sử dụng máy móc trong sản xuất ngày càng tăng, các kỹ sư bắt đầu phải sử dụng toán học ngày càng nhiều – để thiết kế các bánh răng phức tạp, phân tích độ ổn định của các cây cầu và nhà cao tầng, thiết kế xe hơi, xe tải, tàu thuyền và máy bay. Logarit là phần "cứng" trong chương trình giảng dạy toán học ở phổ thông từ một vài thập kỷ trước. Và các kỹ sư luôn mang theo vật mà thực tế tương tự với phương pháp logarit, một thể hiện vật lý của phương trình cơ bản đối với logarit với mục đích sử dụng tại chỗ. Họ gọi nó là thước logarit, và sử dụng nó thường xuyên trong các ứng dụng khác nhau từ kiến trúc tới thiết kế máy bay.

Thước logarit (hay thước trượt) đầu tiên được nhà toán học người Anh William Oughtred chế tạo vào năm 1630, dùng thang đo tròn. Sau đó, ông cải tiến mẫu thiết kế này vào năm 1632, bằng cách dùng hai thước thẳng, đó là thước trượt đầu tiên. Ý tưởng rất đơn giản: Khi bạn đặt hai thước tiếp nối với nhau thì chiều dài của chúng sẽ được cộng lại. Nếu hai thước được đánh dấu dùng thang logarit với các số được đặt cách nhau theo logarit của chúng, khi đó các số tương ứng được nhân với nhau. Ví dụ, đặt vạch số 1 ở thước thứ nhất trên vạch số 2 của thước thứ hai. Khi đó ứng với mỗi số x ở thước thứ nhất, chúng ta sẽ tìm thấy $2x$ ở thước thứ hai. Tương ứng với 3 ta thấy 6, và cứ như thế, (xem hình 11). Nếu các số phức tạp hơn, chẳng hạn 2,67 và 3,51, chúng ta đặt 1 đối diện 2,67

và số tương ứng với 3,51 chính là 9,37 (tích của 2,67 và 3,51). Quả là đơn giản và dễ dàng.



Hình 11 Nhân 2 và 3 trên thước logarit.

Các kỹ sư đã nhanh chóng phát triển những loại thước logarit phức tạp hơn với các hàm lượng giác, căn bậc hai, các thang log-log (logarit của logarit) để tính toán các lũy thừa, v.v. Cuối cùng, mặc dù bây giờ logarit đã phải chịu ngồi chiếu sau máy tính kỹ thuật số, nhưng nó vẫn có vai trò to lớn trong khoa học và công nghệ, bên cạnh người bạn đồng hành không thể tách rời của nó là hàm mũ. Với logarit cơ số 10, đó là hàm 10^x; với cơ số tự nhiên, đó là hàm số e^x với e xấp xỉ bằng 2,71828. Ở mỗi cặp, hai hàm số là nghịch đảo của nhau. Nếu bạn lấy một số, tính logarit của nó, và sau đó lại lấy lũy thừa của số vừa nhận được, bạn sẽ thu được số ban đầu.

Tại sao chúng ta vẫn cần logarit trong khi bây giờ chúng ta đã có máy tính?

Vào năm 2011, trận động đất 9 độ ngoài khơi bờ biển phía đông Nhật Bản là nguyên nhân của một cơn sóng thần khổng lồ, đã tàn phá một khu vực dân cư lớn và lấy đi sinh mạng của 25.000 người. Trên bờ biển có một nhà máy điện hạt nhân, Fukushima Dai-ichi (Fukushima số 1, để tránh nhầm lẫn nó với một nhà máy điện hạt nhân khác đặt gần đó). Nhà máy này gồm sáu lò phản ứng hạt nhân: ba trong số đó đang hoạt động khi sóng thần ập đến; ba lò còn lại đang tạm ngưng hoạt

động và nhiên liệu của chúng đã được chuyển sang bể chứa nước bên ngoài lò phản ứng nhưng vẫn ở bên trong các tòa nhà chứa lò.

Sóng thần đã chôn vùi hệ thống bảo vệ của lò phản ứng và cắt đứt nguồn cung cấp điện. Ba lò phản ứng (số 1, 2, 3) đang hoạt động đã được cho dừng ngay như một biện pháp an toàn, nhưng hệ thống làm lạnh của chúng vẫn còn cần phải hoạt động để chấm dứt sự nóng chảy của nhiên liệu. Tuy nhiên, sóng thần cũng đã làm hỏng các máy phát điện dự phòng dùng để cấp điện cho hệ thống làm lạnh và một số hệ thống an toàn quan trọng khác. Cấp độ dự phòng tiếp theo, các acquy, cũng nhanh chóng hết điện. Do hệ thống làm lạnh ngừng hoạt động, nhiên liệu hạt nhân trong một vài lò phản ứng bắt đầu trở nên quá nóng. Để ứng phó, điều hành viên đã sử dụng xe cứu hỏa để bơm nước biển vào ba lò phản ứng, nhưng nó lại phản ứng với lớp phủ ziriconi ở các thanh nhiên liệu tạo thành hydro. Sự gia tăng của khí hydro gây ra một vụ nổ trong tòa nhà chứa lò phản ứng số 1. Lò số 2 và số 3 cũng sớm chịu chung số phận. Nước ở trong bể của lò số 4 bị thất thoát, khiến cho nhiên liệu của lò bị phơi lộ. Vào thời gian đó, có vẻ như các điều hành viên đã lấy lại được phần nào kiểm soát, nhưng ít nhất một ngăn chứa lò đã bị nứt, và phóng xạ đã rò rỉ ra môi trường địa phương. Nhà chức trách Nhật Bản đã phải sơ tán 200.000 người dân ở khu vực xung quanh bởi vì phóng xạ đã vượt xa ngưỡng an toàn cho phép. Sáu tháng sau, TEPCO, công ty vận hành các lò phản ứng, khẳng định rằng tình hình vẫn còn rất nghiêm trọng, và cần phải làm rất nhiều việc trước khi các lò phản ứng có thể được kiểm soát hoàn toàn, nhưng họ tuyên bố sự rò rỉ phóng xạ đã ngừng lại.

Tôi không muốn phân tích ưu thế hay bất cứ điều gì khác về năng lượng hạt nhân ở đây, nhưng tôi muốn chỉ ra bằng cách nào mà logarit trả lời được một câu hỏi cực kỳ quan trọng: nếu bạn biết lượng chất phóng xạ đã bị thoát ra và thuộc loại nào, thì nó sẽ tồn tại bao lâu trong môi trường, nơi nó có thể nguy hại?

Các nguyên tố phóng xạ phân rã; tức là, chúng chuyển thành các nguyên tố khác thông qua các quá trình hạt nhân, đồng thời phát ra các hạt hạt nhân. Chính các hạt này tạo thành bức xạ. Mức phóng xạ giảm dần theo thời gian giống như nhiệt độ của một vật nóng chuyển dần sang lạnh: cụ thể là theo hàm mũ. Như vậy, theo đơn vị phù hợp mà tôi sẽ không thảo luận ở đây, độ phóng xạ $N(t)$ ở thời điểm t thỏa mãn phương trình:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

với N_0 là độ phóng xạ ban đầu, và k là hằng số phụ thuộc vào nguyên tố phóng xạ. Chính xác hơn, nó phụ thuộc vào đồng vị của nguyên tố mà ta đang xem xét.

Một thước đo thuận tiện về thời gian tồn tại của phóng xạ là chu kỳ bán rã, một khái niệm được đề xuất lần đầu năm 1907. Nó là khoảng thời gian cần để độ phóng xạ ban đầu N_0 giảm xuống còn một nửa. Để tính chu kỳ bán rã, chúng ta giải phương trình:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-kt}$$

bằng cách lấy logarit của cả hai vế. Kết quả là:

$$t = \frac{\log 2}{k} = \frac{0{,}6931}{k}$$

và chúng ta có thể tính cụ thể kết quả vì k là số đã biết trước từ thực nghiệm.

Chu kỳ bán rã là một công cụ tiện lợi để đánh giá thời gian phóng xạ tồn tại. Giả sử rằng chu kỳ bán rã là một tuần, chẳng hạn. Khi đó theo tốc độ ban đầu, chất phóng xạ giảm một nửa sau một tuần, giảm xuống còn một phần tư sau hai tuần, một phần tám sau ba tuần, v.v. Phải mất 10 tuần để giảm xuống còn một phần nghìn của mức ban đầu (chính xác là 1/1024), và 20 tuần để giảm xuống còn một phần triệu.

Trong những tai nạn với các lò phản ứng hạt nhân thông thường, những sản phẩm phóng xạ quan trọng nhất là iot-131 (một đồng vị phóng xạ của iot) và xesi-137 (một đồng vị phóng xạ của xesi). Chất đầu tiên có thể gây ung thư tuyến giáp, bởi vì tuyến giáp tập trung iot. Chu kỳ bán rã của iot-131 chỉ là tám ngày, do đó nó gây ra ảnh hưởng nhỏ nếu có phương pháp đúng đắn, và sự nguy hiểm của nó giảm khá nhanh, trừ phi nó tiếp tục bị rò rỉ. Cách điều trị tiêu chuẩn là phát cho mọi người các viên iot nhằm làm cho cơ thể giảm hấp thụ đồng vị iot phóng xạ, nhưng biện pháp khắc phục hiệu quả nhất là ngừng uống sữa bị ô nhiễm.

Nhưng xesi-137 thì rất khác: nó có chu kỳ bán rã là 30 năm. Sẽ phải mất 200 năm để độ phóng xạ ban đầu giảm xuống còn một phần một trăm, do đó nó sẽ gây hại trong một thời gian rất dài. Vấn đề thực tế chủ yếu trong một tai nạn lò phản ứng là sự ô nhiễm của đất và các tòa nhà. Khử ô nhiễm tới một mức độ nào đó thì khả thi, nhưng rất đắt. Chẳng hạn, đất có thể được loại bỏ, mang đi, và đặt ở nơi nào đó an toàn. Nhưng nó tạo ra một số lượng lớn rác thải phóng xạ ở mức độ thấp.

Phân rã phóng xạ chỉ là một lĩnh vực trong số rất nhiều lĩnh vực mà logarit của Napier và Briggs còn tiếp tục phục vụ khoa học và nhân loại. Nếu bạn lật qua vài chương tiếp theo

bạn sẽ thấy chúng xuất hiện cả trong nhiệt động lực học và lý thuyết thông tin. Ngay cả những máy tính cực nhanh vốn đã khiến cho logarit trở nên thừa đối với mục đích ban đầu của nó là tính nhanh, thì logarit vẫn còn là trung tâm đối với khoa học vì những lý do nhận thức chứ không phải tính toán.

Một ứng dụng khác của logarit đến từ những nghiên cứu về tri giác của con người: chúng ta cảm nhận thế giới xung quanh ta như thế nào. Những người tiên phong về vật lý tâm thần của tri giác đã thực hiện những nghiên cứu rất sâu rộng về thị giác, thính giác và xúc giác, và họ đã phát hiện ra một số quy tắc toán học khá hấp dẫn.

Vào những năm 1840, một bác sĩ người Đức tên là Ernst Weber đã thực hiện các thí nghiệm để xác định giác quan của con người nhạy cảm đến mức nào. Ông đưa cho các đối tượng thí nghiệm các vật nặng, bảo họ giữ trong tay rồi hỏi họ có nói được vật nào nặng hơn không. Weber sau đó đã có thể chỉ ra độ chênh lệch nhỏ nhất có thể còn phát hiện được là bao nhiêu. Có lẽ, đáng ngạc nhiên là sự sai khác này (với một đối tượng thí nghiệm cho trước) lại không phải là một lượng cố định. Nó phụ thuộc vào việc vật được đem ra so sánh nặng thế nào. Mọi người không nhận thấy một lượng khác biệt tuyệt đối tối thiểu – ví dụ, là 50 gam. Nhưng họ lại cảm nhận được một sự khác biệt *tương đối* tối thiểu là 1% của các khối lượng được đem ra so sánh. Tức là, lượng khác biệt nhỏ nhất mà tri giác con người có thể phát hiện ra tỉ lệ với sự kích thích, một đại lượng vật lý thực sự.

Vào những năm 1850, Gustav Fechner phát hiện lại chính định luật đó, nhưng viết lại nó dưới dạng toán học. Nó đưa

ông đến một phương trình mà ông gọi là định luật Weber, nhưng ngày nay nó thường được gọi là định luật Fechner (hay Weber-Fechner nếu bạn theo chủ nghĩa thuần túy). Nó phát biểu rằng cảm giác lĩnh hội được tỉ lệ với logarit của sự kích thích. Các thí nghiệm gợi ý rằng định luật này không chỉ đúng cho trường hợp cảm giác của chúng ta với khối lượng mà cả với thị giác và thính giác nữa. Nếu ta nhìn một ngọn đèn, lượng ánh sáng mà chúng ta cảm nhận được biến thiên theo logarit của năng lượng thực tế phát ra. Nếu một nguồn sáng gấp mười nguồn kia, thì độ khác biệt mà ta cảm nhận được là hằng số, mặc cho hai nguồn thực sự sáng thế nào. Điều tương tự cũng xảy ra với độ lớn của âm thanh: một vụ nổ với mức năng lượng lớn gấp mười lần nghe cũng to hơn với một lượng cố định.

Định luật Weber-Fechner không hoàn toàn chính xác, nhưng nó là một phép gần đúng tốt. Quá trình tiến hóa, trong một mức độ nào đó, đã tạo ra một thứ giống như thang logarit, bởi vì thế giới bên ngoài trình hiện trước các giác quan của chúng ta những kích thích nằm trong một phạm vi rất rộng lớn các kích thước. Một tiếng ồn có thể nhỏ hơn một chút so với tiếng sột soạt của con chuột phá thủng hàng rào cây, hay một tiếng sét nổ; chúng ta cần phải có khả năng nghe được cả hai. Nhưng phạm vi của các mức độ âm thanh quá lớn đến nỗi không giác quan sinh học nào có thể phản ứng lại năng lượng sinh bởi những âm thanh ấy. Nếu một cái tai có thể nghe được tiếng con chuột, thì một tiếng sét nổ sẽ hủy hoại nó. Nếu mức độ âm thanh giảm xuống để tiếng sét nổ phát ra một âm thanh dễ chịu, thì lại không thể nghe được con chuột. Lời giải là nén các mức năng lượng lại thành một

khoảng dễ chịu, và chính logarit đã làm việc này. Nhạy cảm theo tỉ lệ chứ không phải theo mức tuyệt đối đã tạo ra cảm giác tuyệt vời và tạo ra các giác quan tuyệt vời.

Đơn vị chuẩn của chúng ta cho tiếng ồn là dexiben (dB), nó gói gọn định luật Weber-Fechner trong một định nghĩa. Nó không đo tiếng ồn tuyệt đối, mà là tiếng ồn tương đối. Một con chuột trên bãi cỏ tạo tiếng ồn khoảng 10 dB. Cuộc trò chuyện thông thường giữa hai người cách nhau 1m gây ra tiếng ồn cỡ 40-60 dB. Người sử dụng máy trộn điện phải chịu tiếng ồn khoảng 60 dB. Tiếng ồn trong một chiếc xe hơi, do động cơ và lốp xe gây ra, là 60-80 dB. Một máy bay phản lực cách 100m gây ra âm thanh 110-140 dB, tăng thành 150 nếu cách 30m. Một kèn vuvuzela (một loại kèn nhựa gây khó chịu, giống kèn trumpet, được sử dụng rộng rãi ở World Cup 2010 và được các fan ít hiểu biết mang về nhà như quà lưu niệm) sinh ra âm thanh 120 dB ở khoảng cách 1m, một lựu đạn gây choáng của quân đội gây ra âm thanh tới 180 dB.

Những thang âm thanh đó vẫn thường được bắt gặp vì chúng có một khía cạnh an toàn nhất định. Mức độ mà âm thanh có thể gây hại cho thính giác là 120 dB. Hãy làm ơn vứt cái vuvuzela của bạn đi.

3 Bóng ma của các đại lượng biến mất

Phép tính vi tích phân

sự thay đổi giá trị của đại lượng
độ biến thiên của đại lượng
giới hạn
giá trị mới
trừ
giá trị cũ

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

phụ thuộc thời gian
khoảng thời gian
tiến tới zero (trở nên rất nhỏ)
chia cho
khoảng thời gian

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nó giúp ta tìm ra tốc độ biến thiên tức thời của một đại lượng phụ thuộc (ví dụ như) thời gian, tính xem giá trị của nó thay đổi thế nào trong một khoảng thời gian ngắn bằng cách chia cho khoảng thời gian đó. Sau đó cho khoảng thời gian đó nhỏ tùy ý.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó cung cấp một cơ sở chặt chẽ cho giải tích, phương pháp chính mà các nhà khoa học dùng để mô tả thế giới tự nhiên.

Nó đã dẫn tới những gì?

Tính toán các tiếp tuyến và diện tích. Các công thức tính thể tích của các khối và độ dài các đường cong. Định luật thứ hai của Newton về chuyển động, các phương trình vi phân. Các định luật bảo toàn năng lượng và động lượng. Hầu hết các địa hạt của vật lý toán.

Năm 1665, nước Anh đang trong triều đại vua Charles II và kinh đô London là một đô thị ngổn ngang với hơn nửa triệu dân. Nghệ thuật nở rộ, và khoa học đang ở những bước phát triển đầu tiên với tốc độ ngày càng nhanh. Hội Hoàng gia, có lẽ là hội khoa học cổ nhất còn tồn tại đến nay, được thành lập 5 năm về trước, và Charles đã ban cho nó một quy chế hoàng gia. Những người giàu có sống trong những ngôi nhà nguy nga, và việc buôn bán của họ ngày càng phát đạt, nhưng những người nghèo khổ phải sống chui rúc trong các con phố chật chội khuất bóng dưới những tòa nhà xiêu vẹo, ngày càng nhô ra do chúng được đôn cao lên, hết tầng này đến tầng khác. Điều kiện vệ sinh cũng không đảm bảo, chuột và các loại sâu bọ khác nhan nhản khắp nơi. Cuối năm 1666, một phần năm dân số London đã chết do dịch hạch, lây lan đầu tiên do chuột và sau đó là do con người. Đó là thảm họa tồi tệ nhất trong lịch sử của kinh đô này, và chính bi kịch đó cũng đã xảy ra khắp châu Âu và Bắc Phi. Nhà vua đã vội vã rời kinh đô tới một vùng quê sạch sẽ hơn ở Oxfordshire, đầu năm 1666 mới quay trở lại. Không ai biết nguyên nhân của tai ương này, và các nhà chức trách của thành phố đã tìm mọi phương cách – đốt lửa liên tục để làm sạch không khí, thiêu cháy tất cả những thứ nặng mùi, chôn cất xác chết nhanh chóng trong các hố. Họ giết rất nhiều chó mèo, nhưng trớ trêu thay họ lại loại bỏ chính hai loài động vật kiểm soát số lượng chuột.

Trong suốt hai năm đó, một sinh viên bí ẩn và khiêm tốn

ở đại học Trinity, Cambridge, đã hoàn thành khóa học của mình. Với hy vọng tránh nạn dịch hạch, anh trở về ngôi nhà mình đã sinh ra, nơi mẹ anh đang quản lý một trang trại. Cha anh mất không lâu sau khi anh sinh ra, và anh đã được bà ngoại nuôi nấng. Có lẽ do được truyền cảm hứng từ sự yên bình và tĩnh lặng của thôn quê, hoặc cũng có thể vì không biết dùng thời gian của mình để làm gì tốt hơn, chàng trai trẻ đã đắm mình trong khoa học và toán học. Sau này anh đã ghi lại: "Trong những ngày ấy, tôi đã ở đỉnh điểm của hoạt động sáng tạo trong đời, đã suy tư về toán học và triết học tự nhiên nhiều hơn bất kỳ thời gian nào khác". Những nghiên cứu đó đã giúp anh hiểu được tầm quan trọng của định luật nghịch đảo bình phương của lực hấp dẫn, một ý tưởng đã bị xem là vô ích trong ít nhất là 50 năm. Anh đã tạo ra một phương pháp thực hành để giải các bài toán về phép tính vi tích phân, một khái niệm khác cũng đã lơ lửng tồn tại nhưng chưa được phát biểu dưới dạng tổng quát nào. Và anh cũng khám phá ra rằng ánh sáng trắng thực tế gồm nhiều màu sắc khác nhau – toàn bộ các màu của cầu vồng.

Khi dịch hạch chấm dứt, anh đã không kể về những khám phá của mình với bất kỳ ai. Trở lại Cambridge, anh nhận bằng thạc sĩ và trở thành nghiên cứu sinh ở Trinity. Rồi được bầu vào ghế giáo sư Lucas về toán, cuối cùng anh đã công bố các ý tưởng của mình và phát triển các ý tưởng mới khác.

Người đàn ông trẻ tuổi đó là Isaac Newton. Những khám phá của ông đã tạo ra một cuộc cách mạng trong khoa học, mang lại một thế giới mà Charles II không bao giờ dám tin là có thể tồn tại: những tòa nhà cao hơn 100 tầng, xe không ngựa kéo đạt vận tốc 80 dặm một giờ, trong khi các tài xế vừa

lái vừa nghe nhạc từ một chiếc đĩa thần kỳ làm từ một vật liệu tựa như kính, rồi các máy bay nặng-hơn-không khí vượt biển Atlantic trong sáu giờ, các bức hình màu chuyển động, và các hộp mang theo trong túi dùng để nói chuyện với tận đầu bên kia của thế giới…

Trước đó, Galileo Galilei, Johannes Kepler và các nhà khoa học khác đã lật một góc của tấm thảm tự nhiên, và nhìn thấy một số điều lạ lùng ẩn giấu bên dưới nó. Bây giờ Newton đã nhấc hẳn tấm thảm sang một bên. Ông không những phát lộ ra rằng vũ trụ có những hình mẫu bí mật, đó là các định luật của tự nhiên; mà còn cung cấp các công cụ toán học để diễn tả các định luật ấy một cách chính xác, và rút ra những hệ quả của chúng. Hệ thống thế giới mang tính toán học; cốt lõi sự sáng tạo của Chúa là một vũ trụ đồng hồ không có linh hồn.

Thế giới quan của nhân loại không chuyển đột ngột từ tôn giáo sang thế tục. Nó vẫn chưa và có lẽ sẽ không bao giờ hoàn thiện cả. Nhưng sau khi Newton xuất bản cuốn *Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)* thì *Hệ thống của thế giới* – phụ đề của cuốn sách – không còn là địa hạt riêng của tôn giáo nữa. Dù vậy, Newton vẫn không phải là nhà khoa học hiện đại đầu tiên; ở ông cũng có mặt thần bí riêng, ông đã dành nhiều năm tháng cuộc đời mình cho giả kim thuật và những tư biện về tôn giáo. Trong ghi chú[1] cho một bài giảng, nhà kinh tế học John Maynard Keynes, cũng là một học giả theo trường phái Newton, đã viết:

> Newton không phải là người đầu tiên của thời đại lý trí. Ông là vị pháp sư cuối cùng, là người Babylon cuối cùng, là trí tuệ vĩ đại cuối cùng nhìn ra thế giới hữu hình và

thế giới tinh thần với cùng con mắt như những người bắt đầu xây dựng di sản tri thức của chúng ta, không ít hơn 10.000 năm trước. Isaac Newton, một đứa trẻ mất cha từ khi mới lọt lòng đúng vào ngày Giáng Sinh năm 1642, là thần đồng cuối cùng mà ba nhà hiền triết đông phương có thể bày tỏ lòng kính trọng chân thành và xứng đáng như họ đã từng kính bái Chúa Hài Đồng.

Ngày nay chúng ta hầu như lờ đi khía cạnh thần bí của con người Newton, và chỉ nhớ đến ông vì những thành tựu trong khoa học và toán học. Đỉnh cao nhất trong số những thành tựu đó là sự nhận thức của ông rằng tự nhiên tuân theo các định luật toán học và việc phát minh ra phép tính vi phân và tích phân của ông, mà ngày nay chúng ta dùng như một công cụ chủ yếu để mô tả các định luật đó và rút ra những hệ quả của chúng. Nhà toán học, triết học người Đức Gottfried Wilhelm Leibniz cũng đã phát triển phép tính vi tích phân, ít nhiều độc lập và gần như đồng thời, nhưng ông đã không đi được xa. Newton đã sử dụng công cụ này để nghiên cứu vũ trụ, mặc dù, trong công trình được công bố của mình, ông đã giấu kín nó dưới một vỏ bọc, bằng cách viết lại dưới ngôn ngữ của hình học cổ điển. Ông là một nhân vật chuyển tiếp, người đã đưa nhân loại bước ra khỏi thế giới quan thần bí, trung cổ để bước vào thế giới quan duy lý, hiện đại. Sau Newton, các nhà khoa học đã nhận thức được rằng vũ trụ có nhiều hình mẫu toán học sâu sắc, *và* họ đã được trang bị những kỹ thuật mạnh để khai thác nhận thức sâu sắc đó.

Phép tính vi tích phân không xuất hiện một cách đột nhiên. Nó xuất hiện từ các câu hỏi cả trong toán học thuần túy lẫn

ứng dụng, và các tiền đề của nó có thể đã bắt nguồn ngay từ thời Archimedes. Bản thân Newton đã có nhận xét nổi tiếng rằng: "Nếu tôi có thể nhìn xa hơn một chút thì đó là vì tôi đứng trên vai những người khổng lồ"[2]. Nổi bật trong số những người khổng lồ ấy là John Wallis, Pierre de Fermat, Galileo, và Kepler. Wallis phát triển một tiền thân của phép tính vi tích phân trong cuốn sách xuất bản năm 1656 của ông nhan đề *Số học của vô hạn* (*Arithmetica Infinitorum*). Cuốn sách xuất bản năm 1679 của Fermat *Về tiếp tuyến của các đường cong* (*De Tangentibus Linearum Curvarum*) đã giới thiệu một phương pháp tìm tiếp tuyến của các đường cong, một vấn đề liên quan mật thiết đến phép tính vi tích phân. Kepler đã phát biểu ba định luật cơ bản của ông về chuyển động của các hành tinh, điều này đã dẫn Newton tới định luật về hấp dẫn, và đó là chủ đề của chương tiếp theo. Galileo đã đạt được những tiến bộ lớn về thiên văn học, nhưng ông cũng nghiên cứu khía cạnh toán học của tự nhiên một cách khá thấu đáo, khi công bố các khám phá của mình trong cuốn *Về chuyển động* (*De Motu*) vào năm 1590. Ông nghiên cứu chuyển động của vật rơi, và phát hiện ra quy luật toán học rất đẹp đẽ. Newton đã phát triển gợi ý này thành ba định luật tổng quát của chuyển động.

Để hiểu được hình mẫu của Galileo chúng ta cần biết hai khái niệm thường gặp hằng ngày của cơ học: vận tốc và gia tốc. Vận tốc là đại lượng cho biết độ nhanh chậm trong chuyển động của một vật và hướng của chuyển động đó. Nếu không quan tâm đến hướng, chúng ta sẽ nhận được tốc độ của vật. Gia tốc là sự thay đổi trong vận tốc, thường liên quan đến sự thay đổi về tốc độ (trừ khi tốc độ vẫn giữ nguyên

nhưng hướng thì thay đổi). Trong đời sống hằng ngày, chúng ta dùng gia tốc theo nghĩa làm tăng tốc độ, và giảm tốc theo nghĩa làm chậm lại, nhưng trong cơ học, cả hai sự thay đổi đều gọi là gia tốc: trong trường hợp thứ nhất thì nó dương, còn trường hợp thứ hai thì nó âm. Khi chúng ta lái xe dọc đại lộ, tốc độ của xe được hiển thị trên đồng hồ tốc độ – ví dụ, nó có thể bằng 50mph. Hướng thì là hướng đi của xe. Khi chúng ta nhấn ga, xe sẽ tăng tốc; còn khi chúng ta đạp phanh, xe sẽ giảm tốc, tức có gia tốc âm.

Nếu xe chuyển động với một tốc độ cố định, sẽ dễ dàng nhận biết tốc độ của xe là bao nhiêu. Từ viết tắt *mph* (miles per hour) đã nói rõ: số dặm đi được trong 1 giờ. Nếu xe đi 50 dặm trong 1 giờ, chúng ta chia khoảng cách cho thời gian sẽ nhận được tốc độ. Tất nhiên, chúng ta không cần lái xe cả 1 giờ, nếu chiếc xe đi 5 dặm trong sáu phút, tức cả khoảng cách và thời gian đều được chia cho 10, thì tỉ số của chúng vẫn là 50 dặm/giờ. Nói ngắn gọn:

tốc độ = khoảng cách đi được chia cho thời gian đã đi.

Cũng tương tự, nếu gia tốc là cố định thì ta có:

gia tốc = sự biến thiên của tốc độ chia cho
khoảng thời gian thay đổi.

Tất cả xem ra có vẻ như đơn giản, nhưng những khó khăn về khái niệm sẽ phát sinh khi tốc độ hay gia tốc không còn là cố định nữa. Vả lại cả hai không thể đồng thời là hằng số, bởi vì gia tốc không đổi (và khác 0) kéo theo sự thay đổi của tốc độ. Giả sử bạn lái xe dọc theo đường làng, tăng tốc lúc đường thẳng và chậm lại chỗ đường ngoặt. Trong trường hợp ấy, tốc độ của bạn thay đổi và do đó gia tốc cũng thế. Vậy thì làm sao

chúng ta có thể biết được chúng bằng bao nhiêu ở một thời điểm bất kỳ cho trước? Câu trả lời có tính thực dụng là: lấy một khoảng thời gian ngắn, một giây, chẳng hạn. Khi đó tốc độ tức thời ở 11h30 sáng (chẳng hạn) sẽ bằng khoảng cách bạn đi được giữa thời điểm đó và một giây sau, chia cho một giây. Thực hiện tương tự với gia tốc tức thời.

Nhưng khoan... đó chưa hẳn là tốc độ *tức thời* của bạn. Đó thực sự chỉ là tốc độ trung bình trên khoảng thời gian một giây. Có những trường hợp mà một giây là một khoảng thời gian *khổng lồ* – một dây đàn guitar chơi nốt C trung rung 440 lần mỗi giây; lấy trung bình chuyển động của nó trong cả một giây và bạn sẽ nghĩ rằng nó không hề rung. Câu trả lời ở đây là phải xét một khoảng thời gian ngắn hơn – có lẽ là một phần nghìn của một giây. Nhưng như thế vẫn chưa bắt được tốc độ tức thời. Ánh sáng khả kiến dao động một triệu tỉ (10^{15}) lần trong mỗi giây, do đó khoảng thời gian thích hợp phải nhỏ hơn một phần triệu tỉ giây. Và ngay cả như thế đi nữa... nếu tỉ mỉ hơn thì nó vẫn chưa phải là *tức thời*. Tiếp tục dòng suy nghĩ này, có vẻ như cần thiết phải sử dụng một khoảng thời gian ngắn hơn bất kỳ khoảng thời gian nào khác. Số duy nhất như thế chỉ có thể là số 0, nhưng thế sẽ chẳng có ích lợi gì, vì khi đó khoảng cách đi được cũng là 0, và 0/0 là vô nghĩa.

Những người tiên phong đã lờ những vấn đề đó đi và chấp nhận quan điểm thực tế. Một khi các sai số có thể trong các phép đo của bạn vượt quá độ chính xác đã được tăng, thì về mặt lý thuyết, bạn sẽ vượt qua được trở ngại này bằng cách sử dụng các khoảng thời gian nhỏ hơn, nhưng làm thế cũng chẳng có ý nghĩa gì. Đồng hồ thời Galileo rất kém chính xác, vì thế ông đo thời gian bằng cách tự mình ngâm nga các âm

điệu – một nhạc sĩ được đào tạo bài bản có thể chia một nốt thành các quãng rất ngắn. Ngay cả như thế, việc đo thời gian của một vật rơi tự do cũng rất phức tạp, nên Galileo đã có một ý tưởng rất hay để làm chậm chuyển động lại bằng cách cho viên bi lăn xuống theo mặt phẳng nghiêng. Sau đó ông quan sát các vị trí của viên bi ở các khoảng thời gian liên tiếp. Điều ông tìm thấy (tôi đã đơn giản hóa các con số để các hình mẫu nhìn rõ ràng hơn, nhưng vẫn là các hình mẫu như thế) đó là ở các thời điểm 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... các vị trí của viên bi là:

0 1 4 9 16 25 36

Nghĩa là các khoảng cách tỉ lệ với bình phương thời gian. Thế còn tốc độ thì sao? Lấy trung bình trên các khoảng thời gian liên tiếp, thì đó là hiệu:

1 3 5 7 9 11

của các bình phương liên tiếp. Trong mỗi khoảng, trừ khoảng đầu tiên, tốc độ trung bình tăng hai đơn vị. Đó là một hình mẫu hay quy luật bất ngờ hơn tất cả đối với Galileo, khi ông đào bới trong hàng tá các phép đo với các viên bi nặng nhẹ khác nhau đặt trên các mặt phẳng có độ nghiêng khác nhau.

Từ các thí nghiệm này và các hình mẫu quan sát được ở trên, Galileo đã suy ra một điều thật tuyệt vời. Quỹ đạo của một vật rơi tự do, khi được ném lên trong không trung, ví dụ như một viên đạn pháo, là một parabol. Đó là một đường cong hình chữ U, đã được biết đến từ thời Hy Lạp cổ đại. (Trong trường hợp này là chữ U ngược. Ở đây tôi đã bỏ qua sức cản của không khí làm thay đổi hình dạng của quỹ đạo: nó không ảnh hưởng nhiều đến viên bi lăn của Galileo). Khi phân tích quỹ đạo chuyển động của các hành tinh, Kepler

cũng gặp phải một đường cong có liên quan, đó là đường ellip: điều này chắc cũng rất có ý nghĩa đối với Newton, nhưng câu chuyện này phải chờ đến chương sau.

Nếu chỉ tiếp tục các thí nghiệm cụ thể này thì sẽ không thể nhìn thấy các nguyên lý tổng quát ẩn sau các hình mẫu của Galileo. Newton nhận ra rằng nguồn gốc của hình mẫu này là các tốc độ thay đổi hay tốc độ biến thiên. Vận tốc chính là tốc độ thay đổi vị trí theo thời gian, gia tốc là tốc độ thay đổi vận tốc theo thời gian. Trong các quan sát của Galileo, vị trí biến thiên theo bình phương của thời gian, vận tốc thì biến đổi tuyến tính, và gia tốc không thay đổi. Newton nhận ra rằng để có thể hiểu sâu hơn về các hình mẫu của Galileo và những cái mà chúng muốn nói với chúng ta về tự nhiên, thì ông phải nắm bắt bằng được các tốc độ biến thiên tức thời. Và khi ông làm được điều đó, cũng là khi phép tính vi tích phân ra đời.

Có lẽ bạn đã mong đợi một ý tưởng quan trọng như phép tính vi tích phân sẽ phải được thông báo rầm rộ, với trống dong cờ mở tưng bừng trên đường phố. Tuy nhiên, cần có thời gian để tầm quan trọng của các ý tưởng mới được thấm nhuần và đánh giá thỏa đáng, và phép tính vi tích phân cũng không phải là ngoại lệ. Newton khởi đầu nghiên cứu về đề tài này vào khoảng năm 1671 hoặc sớm hơn khi ông viết cuốn *Phương pháp vi phân và chuỗi vô hạn* (*The Method of Fluxions and Infinite Series*). Chúng ta không biết thời điểm chính xác bởi vì cuốn sách này mãi tới tận năm 1736 mới được xuất bản, tức là gần một thập kỷ sau khi ông mất. Một số bản thảo của Newton cũng có nhắc đến các ý tưởng mà ngày nay chúng ta gọi là phép vi phân và tích phân, hai nhánh chính của lĩnh vực này. Những ghi chép của Leibniz cho thấy ông đã nhận được các kết quả quan trọng

đầu tiên về giải tích là vào năm 1675, nhưng ông không công bố gì về chủ đề này cho đến tận năm 1684.

Sau khi Newton trở thành một nhà khoa học xuất chúng, khá lâu sau khi hai người đã xây dựng xong nền tảng của giải tích, một vài người bạn của Newton đã dấy lên một cuộc tranh cãi vô nghĩa nhưng rất nóng bỏng về quyền công bố trước, khi buộc tội Leibniz đã đạo văn từ những bản thảo chưa công bố của Newton. Một số ít nhà toán học ở châu Âu lục địa đã đáp lại bằng lời tố cáo ngược về sự đạo văn của Newton. Các nhà toán học Anh và lục địa hầu như không liên lạc với nhau trong một thế kỷ, điều này đã gây ra thiệt hại lớn cho các nhà toán học Anh, nhưng không có bất kỳ ảnh hưởng nào tới các nhà toán học ở lục địa. Họ đã phát triển giải tích thành một công cụ trung tâm của vật lý toán, trong khi các đồng nghiệp của họ ở Anh cứ sôi sục lên vì những lời lăng mạ Newton thay vì khai thác những viễn kiến sâu sắc của ông. Câu chuyện này rối rắm và vẫn còn được tranh cãi trên phương diện học thuật bởi các sử gia khoa học, nhưng nói một cách khoáng đạt, thì Newton và Leibniz đã phát triển những ý tưởng nền tảng của giải tích một cách độc lập – ít ra cũng độc lập trong chừng mực mà nền văn hóa chung về toán học và khoa học của họ cho phép.

Các ký hiệu của Leibniz khác với của Newton, nhưng các ý tưởng cơ bản thì khá giống nhau. Dù vậy, trực quan nằm đằng sau chúng thì lại khác nhau. Cách tiếp cận của Leibniz hình thức hơn, và thao tác trên các ký hiệu đại số. Còn Newton thì luôn có trong đầu một mô hình vật lý, ở đó hàm số đang xét là một đại lượng vật lý biến thiên theo thời gian. Đó chính là nguồn gốc của thuật ngữ lạ "fluxion" (dòng chảy và sau này

cũng được dùng với nghĩa vi phân) – một cái gì đó *flow* (chảy/biến thiên) theo thời gian.

Phương pháp của Newton có thể được giải thích bằng ví dụ sau: Một đại lượng y bằng bình phương x^2 của một đại lượng x khác. (Đây là hình mẫu mà Galileo đã tìm ra cho một viên bi lăn: vị trí của nó tỉ lệ với bình phương thời gian trôi qua, do đó ở đây có thể coi y là vị trí và x là thời gian. Ký hiệu thông thường của thời gian là t, nhưng hệ tọa độ chuẩn trong mặt phẳng sử dụng x và y). đại lượng o bắt đầu được sử dụng, ký hiệu cho một sự thay đổi nhỏ của x. Độ thay đổi tương ứng của y là hiệu

$$(x + o)^2 - x^2$$

hay rút gọn thành $2xo + o^2$. Tốc độ thay đổi (lấy trung bình trên một khoảng thời gian nhỏ có chiều dài bằng o khi x tăng thành $x + o$) do đó bằng:

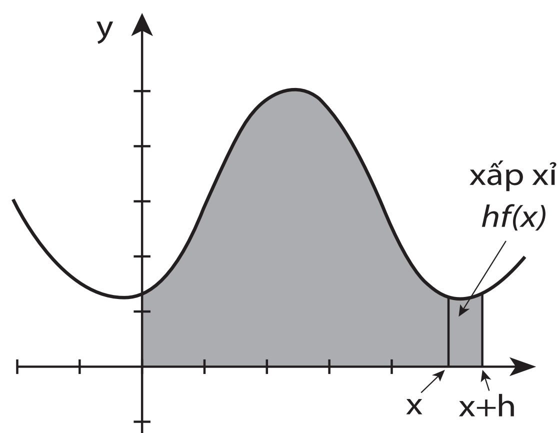
$$\frac{2xo + o^2}{o} = 2x + o$$

Nó phụ thuộc vào o, đúng như trông đợi vì chúng ta lấy trung bình tốc độ thay đổi trên một khoảng khác 0. Tuy nhiên, khi o trở nên ngày càng nhỏ hơn, tiến dần (hay "chảy" dần) tới 0, thì tốc độ thay đổi $2x + o$ sẽ càng tiến dần tới $2x$. Nó không còn phụ thuộc vào o nữa, và nó cho ta tốc độ thay đổi tức thời của x.

Về cơ bản, Leibniz cũng đã thực hiện những tính toán giống hệt như vậy, chỉ khác là ông thay ký hiệu o bằng ký hiệu dx (có nghĩa là "sự thay đổi nhỏ của x"), và định nghĩa dy là sự thay đổi nhỏ tương ứng của y. Khi biến y phụ thuộc vào một biến x khác nào đó, tốc độ thay đổi của y đối với x gọi

là *đạo hàm* của *y*. Newton ký hiệu đạo hàm của *y* bằng cách thêm dấu chấm ở trên nó: $\dot{y}$, còn Leibniz thì dùng ký hiệu $\frac{dy}{dx}$. Với các đạo hàm cấp cao hơn, Newton dùng thêm nhiều dấu chấm hơn, trong khi Leibniz dùng các ký hiệu kiểu như $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ngày nay, chúng ta gọi *y* là một *hàm số* của *x* và viết $y = f(x)$, nhưng vào thời điểm đó khái niệm này chỉ tồn tại ở dạng thô sơ. Chúng ta sử dụng cả ký hiệu của Leibniz và cả biến thể ký hiệu của Newton trong đó dấu chấm được thay bằng dấu phẩy, dễ dàng cho in ấn hơn: y', y''. Chúng ta cũng viết $f'(x)$ và $f''(x)$ để nhấn mạnh rằng, bản thân các đạo hàm cũng là các hàm số. Tính toán các đạo hàm được gọi là phép lấy vi phân.

Phép tính tích phân – vốn là phép tính diện tích – hóa ra lại là phép tính ngược của phép tính vi phân – vốn dùng để tính độ dốc của đường cong. Để thấy tại sao, hãy tưởng tượng rằng chúng ta thêm một lát mỏng vào phần bóng mờ ở hình 12. Lát mỏng này thực ra rất gần với một hình chữ nhật mảnh và dài, với chiều rộng là *o* và chiều cao là *y*. Do đó diện tích của nó rất gần với *oy*. Tốc độ mà diện tích này thay đổi, đối với *x* là tỉ số *oy*/*o*, đúng bằng *y*. Do đó đạo hàm của diện tích chính là hàm ban đầu. Cả Newton và Leibniz đều hiểu rằng cách tính diện tích, một quá trình gọi là phép tính tích phân, là đảo ngược của phép tính vi phân theo nghĩa này. Leibniz ban đầu ký hiệu tích phân bằng ký hiệu omn., viết tắt của *omnia*, hay từ "tổng" ("sum") trong tiếng Latin. Sau này ông đổi thành ký hiệu $\int$, một chữ s kéo dài theo lối cổ, cũng là để chỉ từ "sum". Newton không có một ký hiệu hệ thống nào cho tích phân.



Hình 12 Cộng thêm một lát mỏng vào diện tích bên dưới đường cong $y = f(x)$.

Tuy nhiên, Newton đã tạo ra một bước tiến quan trọng. Wallis đã tính được đạo hàm của tất cả các hàm dạng x^a: nó bằng ax^{a-1}. Như vậy, đạo hàm của x^3, x^4, x^5 là $3x^2$, $4x^3$, $5x^4$. Ông đã mở rộng kết quả này cho một đa thức bất kỳ, tức một tổ hợp hữu hạn các lũy thừa, ví dụ như $3x^7 - 25x^4 + x^2 - 3$. Thủ thuật ở đây là xét từng lũy thừa một cách riêng rẽ, tìm các đạo hàm tương ứng, rồi sau đó kết hợp chúng lại theo cùng một cách. Newton thấy rằng phương pháp này cũng có thể áp dụng cho các chuỗi vô hạn, một dạng biểu diễn bao gồm một số vô hạn các lũy thừa của cùng một biến. Điều đó cho phép ông thực hiện các phép tính vi tích phân trên nhiều biểu thức khác, phức tạp hơn các đa thức.

Đưa ra sự đối chiếu sát sao giữa hai phiên bản của phép tính vi tích phân, chỉ khác nhau ở những điểm không quan trọng về ký hiệu, ta có thể dễ dàng hiểu được tại sao lại dấy lên cuộc tranh luận về quyền công bố trước. Tuy nhiên, ý tưởng cơ bản thực ra chỉ là một cách hệ thống hóa khá trực tiếp câu hỏi ẩn sau nó, vì thế dễ thấy tại sao Newton và Leibniz có thể đi đến các phiên bản của mình độc lập với nhau, dù có nhiều nét tương tự. Thực ra, trong mọi trường hợp, với những kết

quả của mình, Fermat và Wallis đã vượt trội hơn cả hai người đó. Do đó, cuộc tranh luận này quả là vô nghĩa.

Một cuộc tranh cãi mang lại nhiều thành quả hơn, đó là về vấn đề cấu trúc logic của phép tính vi tích phân, hay nói chính xác hơn là cấu trúc phi logic của nó. Người phê phán mạnh nhất là triết gia người Ailen George Berkeley, giám mục xứ Cloyne. Berkeley có một đề tài thảo luận về tôn giáo; ông cảm thấy rằng quan điểm duy vật về thế giới phát triển từ các công trình của Newton biểu thị Chúa như một đấng sáng tạo tách rời, Ngài lùi ra xa, đứng sau các tạo vật của mình ngay khi sự Sáng thế hoàn tất và sau đó Ngài để mặc cho chúng tự vận hành, một Đức Chúa không mấy giống như Chúa được nhân cách hóa và hằng có ở khắp nơi trong đức tin Kitô. Do đó, ông tấn công tính thiếu nhất quán về mặt logic trong chính những nền tảng của giải tích, với hy vọng làm mất uy tín môn khoa học xây dựng từ đó. Sự công kích của ông không có ảnh hưởng đáng kể tới sự phát triển của vật lý toán, bởi một lý do đơn giản: những kết quả thu được nhờ sử dụng giải tích mang lại cho ta sự hiểu biết sâu sắc hơn rất nhiều về thế giới tự nhiên, và rất phù hợp với thực nghiệm, đến nỗi những nền tảng logic dường như không quan trọng. Ngay cả bây giờ, các nhà vật lý vẫn giữ quan điểm này: nếu một lý thuyết vận hành tốt thì ai còn quan tâm đến việc bắt bẻ logic làm gì nữa?

Berkeley lập luận rằng sẽ chẳng có ý nghĩa logic gì nếu cứ khăng khăng rằng một đại lượng nhỏ (ký hiệu *o* của Newton, ký hiệu d*x* của Leibniz) là khác 0 đối với phần lớn việc tính toán, thế mà sau đó lại cho nó bằng 0, trong khi trước đó bạn đã chia cả tử số và mẫu số của một phân số cho chính đại lượng rất nhỏ đó. Mà chia cho 0 là một phép toán không tồn

tại trong số học, bởi vì nó không có một ý nghĩa rõ ràng nào cả. Chẳng hạn, 0×1 = 0×2, vì cả hai vế đều bằng 0, nhưng nếu ta chia cả hai vế cho 0 ta sẽ được 1 = 2, mà hiển nhiên là điều này không đúng[3]. Berkeley công bố những chỉ trích của ông trong một cuốn sách nhỏ, xuất bản năm 1734, với tựa đề *Nhà giải tích, một thuyết trình gửi tới nhà toán học dị giáo* (*The Analyst, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*).

Thực tế, Newton đã cố gắng tìm giải pháp cho tính logic, bằng cách cầu viện đến sự tương tự trong vật lý. Ông không nhìn *o* như một đại lượng cố định, mà như một cái gì đó *trôi theo dòng*, tức là biến thiên theo thời gian, nó ngày càng tiến gần tới 0 nhưng không bao giờ đạt tới đó. Đạo hàm cũng được định nghĩa bằng một đại lượng trôi theo dòng: đó là tỉ số độ thay đổi của y và độ thay đổi của x. Tỉ số này cũng tiến tới một giá trị nào đó, nhưng không bao giờ đạt tới giá trị ấy, giá trị này chính là tốc độ thay đổi tức thời – tức đạo hàm của y đối với x. Berkeley đã gạt bỏ ý tưởng đó như là "bóng ma của một đại lượng đã biến mất".

Leibniz cũng gặp phải những chỉ trích dai dẳng, nhà hình học Bernard Nieuwentijt đã công bố những phê phán của mình vào năm 1694 và 1695. Leibniz đã không biện minh cho phương pháp của mình thông qua các "đại lượng vô cùng bé", một thuật ngữ dễ gây ra hiểu lầm. Tuy nhiên, ông đã giải thích rằng điều ông muốn nói qua thuật ngữ này là nó không phải là một đại lượng không cố định có thể nhỏ tùy ý (điều này không mang ý nghĩa logic nào cả) mà nó là một đại lượng biến thiên khác 0, có thể *trở nên* nhỏ tùy ý. Cách biện hộ của Newton và Leibniz về căn bản là như nhau. Đối với các đối thủ của họ, hai cách giải thích này chẳng qua chỉ là sự bịp bợm về ngôn từ mà thôi.

May mắn thay, các nhà vật lý và các nhà toán học thời ấy đã không đợi cho đến khi những nền tảng logic của giải tích được hoàn tất mới áp dụng chúng để mở rộng biên giới khoa học. Họ có một cách khác để đảm bảo rằng họ đang làm những thứ có ý nghĩa: đó là so sánh quan sát với thực nghiệm. Bản thân Newton sáng tạo ra giải tích cũng chính vì mục đích này. Ông rút ra các định luật về chuyển động của các vật dưới tác dụng của một lực, và kết hợp các định luật đó với định luật về một lực cụ thể là lực hấp dẫn để giải thích nhiều điều bí ẩn về các hành tinh và các thiên thể khác của Hệ Mặt Trời. Định luật về hấp dẫn của Newton là một phương trình then chốt trong vật lý và thiên văn học, nó xứng đáng được dành một chương riêng (đó là chương sau). Định luật chuyển động của Newton – nói một cách chặt chẽ là hệ ba định luật, mà một trong số đó chứa hầu hết nội dung toán học – đã dẫn dắt ông một cách trực tiếp tới phép tích vi tích phân hay giải tích toán.

Thật trớ trêu, khi Newton công bố các định luật này và những ứng dụng khoa học của chúng trong cuốn *Những nguyên lý* (*Principia*) của mình, ông đã xóa sạch mọi dấu vết của giải tích và thay thế chúng bởi các lập luận hình học cổ điển. Có lẽ ông nghĩ rằng hình học sẽ dễ được chấp nhận hơn đối với những độc giả mà ông hướng tới, và nếu làm như thế, ông gần như chắc chắn là mình sẽ đúng. Tuy nhiên, nhiều chứng minh hình học của ông, hoặc là được thúc đẩy bởi giải tích, hoặc phụ thuộc vào việc sử dụng các kỹ thuật giải tích để xác định những câu trả lời đúng đắn. Điều này đặc biệt rõ ràng dưới con mắt hiện đại, trong việc xử lý cái mà ông gọi là các "đại lượng phát sinh" thuộc quyển II của bộ *Những nguyên lý*. Đó là các đại lượng tăng hay giảm theo "chuyển

động liên tục hay dòng chảy (flux)", tức là các *fluxion* trong cuốn sách chưa xuất bản của ông. Ngày nay, chúng ta gọi chúng là các hàm liên tục (thực ra là khả vi). Thay vì sử dụng các phép tính tường minh của giải tích, Newton đã dùng một phương pháp hình học của các tỉ số "nguyên thủy và tối hậu". Bổ đề mở của ông (một dạng kết quả toán học phụ trợ được sử dụng lặp đi lặp lại nhưng bản thân nó không có ý nghĩa nội tại), đã tiết lộ tất cả, bởi vì nó *định nghĩa* sự tương đẳng giữa các đại lượng trôi theo dòng (*flowing*) như sau:

> Các đại lượng, và tỉ số của các đại lượng, mà trong bất kỳ khoảng thời gian hữu hạn nào đều hội tụ liên tục về nhau, và trước khi khoảng thời gian đó kết thúc, chúng tiến tới nhau gần hơn bất kỳ một khoảng cách nào cho trước, thì cuối cùng trở thành bằng nhau.

Trong cuốn *Không bao giờ ngơi nghỉ (Never at Rest)*, người viết tiểu sử Newton là Richard Westfall đã diễn tả bổ đề này là căn bản và mới mẻ như thế nào: "Trong bất kỳ ngôn ngữ nào, khái niệm này... rất hiện đại; hình học cổ điển không hề chứa đựng thứ gì như thế cả"[4]. Những người cùng thời Newton đã phải nỗ lực rất nhiều để có thể hiểu về cái mà Newton đã tìm ra. Berkeley có lẽ chưa bao giờ làm được, bởi vì – như chúng ta sẽ thấy ngay dưới đây – nó chứa đựng những ý tưởng căn bản cần thiết để bác bỏ sự phản đối của ông ta.

Do vậy, giải tích đã đóng một vai trò có ảnh hưởng to lớn đối với cuốn *Những nguyên lý*, nhưng nó không một lần xuất hiện trên sân khấu. Mặc dù giải tích chỉ nhìn lén ra từ phía sau cánh gà, những người kế tục về trí tuệ của Newton đã nhanh chóng lần ngược lại quá trình tư duy của ông. Họ viết

lại các ý tưởng chính của ông theo ngôn ngữ của giải tích, bởi vì nó cung cấp một khuôn khổ mới tự nhiên hơn và mạnh hơn, và bắt đầu chinh phục thế giới khoa học.

Đầu mối này thực ra đã có thể nhìn thấy trong các định luật về chuyển động của Newton. Câu hỏi đã dẫn Newton tới những định luật này là một câu hỏi triết học: Điều gì khiến cho một vật chuyển động, hay thay đổi trạng thái chuyển động của nó? Câu trả lời cổ điển là câu trả lời của Aristotle: một vật chuyển động là vì có lực tác dụng lên nó, và điều đó ảnh hưởng tới vận tốc của nó. Aristotle cũng khẳng định rằng để giữ cho một vật chuyển động, phải liên tục tác dụng lực lên nó. Bạn có thể kiểm tra khẳng định của Aristotle bằng cách đặt một quyển sách hay một vật tương tự lên bàn. Nếu bạn đẩy quyển sách, nó sẽ bắt đầu chuyển động và nếu bạn tiếp tục đẩy với một lực có cùng độ lớn thì nó sẽ trượt trên bàn với vận tốc gần như không đổi. Nếu bạn ngừng đẩy, quyển sách sẽ dừng lại. Do vậy, quan điểm của Aristotle có vẻ như phù hợp với thí nghiệm. Tuy nhiên, sự phù hợp này chỉ là bề ngoài mà thôi, bởi vì lực đẩy không phải là lực duy nhất tác dụng lên quyển sách, còn có lực ma sát với bề mặt của bàn nữa. Hơn nữa, quyển sách chuyển động càng nhanh thì ma sát càng lớn – chí ít là trong khi vận tốc của quyển sách vẫn còn đủ nhỏ. Khi quyển sách di chuyển một cách ổn định dọc theo bàn dưới tác dụng của một lực không đổi, thì sức cản ma sát triệt tiêu lực tác dụng ấy, và do vậy tổng tất cả các lực tác dụng lên vật thực tế bằng 0.

Newton, kế thừa các ý tưởng của Galileo và Descartes, đã nhận ra điều này. Kết quả là lý thuyết về chuyển động của ông khác xa với của Aristotle. Ba định luật của Newton như sau:

Định luật thứ nhất. Mọi vật sẽ tiếp tục ở trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều, trừ phi nó bị buộc phải thay đổi trạng thái đó do có lực tác dụng vào.
Định luật thứ hai. Độ thay đổi chuyển động tỉ lệ với lực tác dụng và diễn ra theo hướng tác dụng của lực. (Hằng số tỉ lệ là nghịch đảo khối lượng của vật).
Định luật thứ ba. Với mọi lực tác dụng luôn có một phản lực tác dụng với cùng độ lớn nhưng có hướng ngược lại.

Định luật thứ nhất rõ ràng là mâu thuẫn với Aristotle. Định luật thứ ba nói rằng nếu bạn đẩy một vật nào đó, thì nó sẽ đẩy lại. Định luật thứ hai chính là nơi mà phép tính vi tích phân xuất hiện. Cụm từ "độ thay đổi của chuyển động" mà Newton dùng ở đây ý nói tốc độ thay đổi vận tốc của vật, cũng tức là gia tốc của nó. Đó là đạo hàm của vận tốc theo thời gian, và là đạo hàm cấp hai của vị trí. Như vậy, định luật thứ hai của Newton chỉ rõ mối liên hệ giữa vị trí của một vật và các lực tác dụng lên nó, dưới dạng một *phương trình vi phân*:

đạo hàm cấp hai của vị trí = lực/khối lượng

Để tìm vị trí của vật, ta phải giải phương trình này, tức là suy ra vị trí từ đạo hàm cấp hai của nó.

Dòng suy nghĩ này dẫn ta đến một giải thích đơn giản cho những quan sát của Galileo về viên bi lăn. Điểm mấu chốt ở đây là gia tốc của viên bi là *hằng số*. Tôi đã chỉ ra điều này ở trên, nhờ sử dụng một cách tính thô nhưng đơn giản áp dụng cho những khoảng thời gian rời rạc; bây giờ, chúng ta có thể tính toán một cách chính xác, khi cho phép thời gian biến thiên liên tục. Hằng số này có liên quan tới lực hấp dẫn và góc của mặt phẳng nghiêng, nhưng ở đây chúng ta không cần đi quá sâu vào chi tiết. Giả sử rằng gia tốc không đổi có giá trị

là a. Lấy tích phân hàm số tương ứng, ta nhận được vận tốc đi xuống theo mặt phẳng nghiêng ở thời điểm t là $at + b$ với b là vận tốc ở thời điểm ban đầu. Lấy tích phân một lần nữa, ta nhận được vị trí trên mặt phẳng nghiêng ở thời điểm t là $\frac{1}{2}at^2 + bt + c$ với c là vị trí của vật ở thời điểm ban đầu. Trong trường hợp đặc biệt $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$, các vị trí của vật hoàn toàn phù hợp với ví dụ đã đơn giản hóa của tôi: vị trí ở thời điểm t là t^2. Một phép phân tích đơn giản thôi cũng sẽ khôi phục lại được kết quả chủ chốt của Galileo: đường đi của một viên đạn là một parabol.

Các định luật chuyển động của Newton không chỉ cung cấp cho ta cách tính toán chuyển động của các vật, chúng còn dẫn dắt chúng ta đến các nguyên lý sâu sắc và tổng quát của vật lý. Đỉnh cao trong số đó là "các định luật bảo toàn", cho ta biết rằng khi một hệ chuyển động, dù phức tạp thế nào đi nữa, thì một số đặc trưng của hệ đó là *không thay đổi*. Trong cảnh rối ren của chuyển động, một vài thứ vẫn bình an, không bị ảnh hưởng gì. Có ba đại lượng được bảo toàn, đó là năng lượng, động lượng và momen động lượng.

Năng lượng có thể được định nghĩa là khả năng sinh công. Khi một vật được đưa lên một độ cao nhất định, để chống lại trọng lực (là hằng số), công phải thực hiện để đưa vật lên đó tỉ lệ với khối lượng của vật, với lực hấp dẫn và với độ cao. Ngược lại, nếu sau đó ta thả vật ra, thì nó sẽ thực hiện đúng công nói trên khi nó rơi từ độ cao ban đầu ấy xuống đất. Loại năng lượng này được gọi là *thế năng*.

Tự bản thân thế năng không có gì quá hấp dẫn, nhưng có một hệ quả toán học đẹp đẽ của định luật thứ hai của Newton dẫn đến loại năng lượng thứ hai: *động năng*. Khi một vật

chuyển động, cả thế năng và động năng của nó đều thay đổi. Nhưng sự thay đổi của loại này chính là phần bù trừ cho sự thay đổi của loại kia. Khi một vật rơi dưới tác dụng của trọng lực, nó tăng tốc. Định luật của Newton cho phép ta tính được sự thay đổi của vận tốc theo độ cao. Hóa ra, độ giảm của thế năng đúng bằng một phần hai khối lượng vật nhân với bình phương của vận tốc. Nếu chúng ta đặt cho đại lượng này một cái tên – động năng – thì khi đó năng lượng toàn phần, gồm thế năng cộng động năng, được bảo toàn. Hệ quả toán học này của các định luật chuyển động của Newton chứng minh rằng không tồn tại các động cơ vĩnh cửu: không một máy cơ học nào có thể hoạt động liên tục mãi mãi và sinh công mà không phải cấp thêm năng lượng nào từ bên ngoài.

Về mặt vật lý, thế năng và động năng dường như là hai thứ khác nhau; nhưng về phương diện toán học, ta có thể tráo đổi hai thứ này cho nhau. Cứ như là chuyển động của vật bằng một cách nào đó đã chuyển đổi thế năng thành động năng vậy. "Năng lượng", một thuật ngữ dùng cho cả hai, là một sự trừu tượng hóa thuận tiện, được định nghĩa một cách cẩn trọng sao cho nó được bảo toàn. Tương tự như vậy, các du khách có thể đổi đồng bảng thành đôla. Đổi tiền luôn có các bảng tỉ giá, ví dụ 1 bảng thì ăn 1,4693 đôla. Tất nhiên, ngân hàng cũng khấu trừ một số tiền dành cho họ. Tùy thuộc vào các chi tiết kỹ thuật của phí ngân hàng, tổng giá trị tiền tệ tham gia giao dịch được cho là cân bằng: du khách nhận lại chính xác số lượng đôla tương ứng với tổng số tiền bảng ban đầu của họ, trừ đi một số chi phí nhất định. Tuy nhiên, không có một *thực thể* vật lý nào được gắn vào tờ giấy bạc mà bằng cách nào đó có thể lấy ra trao đổi một tờ 1 bảng Anh lấy

một tờ 1 đôla cùng với vài đồng xu. Cái dùng để trao đổi ở đây chính là sự quy ước của con người rằng những tờ bạc đặc biệt này có giá trị tiền tệ.

Năng lượng là một loại đại lượng "vật lý" mới. Từ quan điểm Newton, các đại lượng như vị trí, thời gian, vận tốc, gia tốc và khối lượng có những biểu hiện vật lý trực tiếp. Bạn có thể đo vị trí nhờ một cái thước, đo thời gian bằng đồng hồ, đo vận tốc và gia tốc bằng cả hai thứ trên, đo khối lượng bằng một cái cân. Nhưng bạn không thể đo năng lượng bằng một năng lượng kế. Đồng ý là bạn có thể đo một số *loại* năng lượng cụ thể nào đó. Thế năng tỉ lệ với độ cao, do vậy một cái thước là đủ, nếu như bạn đã biết trọng lực. Động năng bằng một nửa khối lượng nhân với bình phương của vận tốc: vậy sử dụng một cái cân và đồng hồ đo tốc độ là đủ. Nhưng *năng lượng*, như một khái niệm, thì không phải là một thực thể vật lý mà là một thứ hư cấu thuận tiện để cân bằng các cuốn sách cơ học.

Động lượng, đại lượng được bảo toàn thứ hai, là một khái niệm đơn giản: nó bằng khối lượng nhân vận tốc. Nó chỉ nhập cuộc chơi khi có vài ba vật. Một ví dụ quan trọng là tên lửa; ở đây một vật là quả tên lửa và vật kia là nhiên liệu của quả tên lửa ấy. Vì nhiên liệu bị động cơ đẩy ra, nên bảo toàn động lượng ngụ ý rằng tên lửa phải chuyển động theo hướng ngược lại. Đó cũng chính là cách mà tên lửa vận hành trong chân không.

Momen động lượng cũng tương tự, nhưng nó liên quan đến sự quay hơn là vận tốc. Nó cũng đóng vai trò trung tâm trong khoa học về tên lửa, mà thực tế là toàn bộ cơ học, cả ở mặt đất cũng như trên trời. Một trong những câu hỏi khó trả lời nhất về Mặt Trăng, đó là momen động lượng của nó. Lý thuyết hiện tại cho rằng Mặt Trăng bị bắn ra do một hành

tinh cỡ sao Hỏa đập vào Trái Đất khoảng 4,5 tỉ năm trước. Điều này giải thích được câu đố về momen động lượng của Mặt Trăng và cho tới tận gần đây hầu như đã được chấp nhận, nhưng bây giờ người ta lại thấy dường như trong đá của Mặt Trăng có chứa rất nhiều nước. Một vụ va chạm mạnh như thế lẽ ra đã phải làm bốc hơi hầu hết lượng nước ấy[5]. Cho dù kết cục thực sự là thế nào đi nữa, thì ở đây momen động lượng cũng có vai trò cực kỳ quan trọng.

Vậy là phép tính vi tích phân đã vận hành. Nó đã giải được các bài toán trong vật lý và hình học, và đưa ra những câu trả lời chính xác. Nó còn dẫn ta tới các khái niệm vật lý mới và cơ bản như năng lượng và động lượng. Nhưng điều đó chưa trả lời được nghi vấn của Giám mục Berkeley. Phép tính vi tích phân cần phải vận hành như toán học, chứ không chỉ phù hợp với vật lý. Newton và Leibniz đều hiểu rằng cả o và dx không thể vừa bằng 0 vừa khác 0 được. Newton mệt mỏi cố thoát ra khỏi cái bẫy logic này bằng cách sử dụng hình ảnh vật lý của dòng chảy (fluxion). Leibniz thì nói về các đại lượng vô cùng bé. Cả hai đều ám chỉ đến các đại lượng tiến dần đến 0 nhưng không bao giờ đạt tới đó, vậy thì chúng là gì? Trớ trêu thay, sự chế giễu của Berkeley về "bóng ma của các đại lượng biến mất" lại gần như đã tiến sát tới lời giải của vấn đề này, nhưng cái mà ông đã không tính đến – điều mà cả Newton và Leibniz đều nhấn mạnh – đó là các đại lượng này biến mất *bằng cách nào*. Làm cho chúng biến mất một cách đúng đắn, là bạn có thể bỏ lại một bóng ma đã được hình thành một cách hoàn hảo. Nếu cả Newton và Leibniz trình bày trực quan của họ theo một ngôn ngữ toán học chặt chẽ, thì có lẽ Berkeley đã hiểu được những kết quả mà họ thu được.

Câu hỏi trọng tâm là một câu hỏi mà Newton đã không trả lời được một cách rõ ràng vì nó có vẻ rất hiển nhiên. Hãy nhớ lại rằng, trong ví dụ $y = x^2$, Newton đã thu được đạo hàm của nó là $2x + o$, và sau đó khẳng định rằng khi o tiến dần về 0 thì $2x + o$ tiến về $2x$. Điều này có vẻ hiển nhiên, nhưng chúng ta không thể đặt $o = 0$ để chứng minh nó. Sự thật là *chúng ta đã thu được kết quả chính xác khi làm như thế*, nhưng đây là một ngụy biện logic[6]. Trong cuốn *Những nguyên lý,* Newton đã xoay quanh vấn đề này, ông thay $2x + o$ bằng "tỉ số nguyên thủy" của ông và $2x$ bằng "tỉ số tối hậu". Nhưng chìa khóa thực sự để có thể tiến bộ là phải giải quyết vấn đề một cách trực diện. Làm sao chúng ta *biết* rằng o càng tiến gần về 0 thì $2x + o$ càng tiến gần về $2x$? Điều này nghe ra khá kỳ quặc, nhưng nếu tôi dùng một ví dụ phức tạp hơn thì câu trả lời đúng dường như không hợp lý.

Khi các nhà toán học trở lại với logic của phép tính vi tích phân, họ nhận ra rằng câu hỏi trung tâm có vẻ như đơn giản này lại chính là trái tim của vấn đề. Khi chúng ta nói rằng o tiến gần đến 0, ta hàm ý rằng với bất kỳ số dương khác 0 nào, ta đều có thể chọn được o bé hơn số đó. (Điều này là hiển nhiên: lấy o bằng nửa số đó chẳng hạn). Tương tự, khi ta nói $2x + o$ tiến đến $2x$, ta hàm ý rằng hiệu của chúng tiến tới 0, theo nghĩa vừa nói ở trên. Vì hiệu số đó, trong trường hợp này, tình cờ lại chính bằng o, nên nó thậm chí còn hiển nhiên hơn: bất kể "tiến đến 0" mang ý nghĩa gì, thì cũng rõ ràng là o tiến đến 0 khi o tiến đến 0. Một hàm phức tạp hơn hàm bậc hai sẽ đòi hỏi phân tích phức tạp hơn.

Câu trả lời cho câu hỏi then chốt này chính là phải phát biểu các quá trình theo ngôn ngữ hình thức của toán học,

và tránh ý tưởng "trôi đi" cùng nhau. Bước đột phá này đã xuất hiện thông qua các công trình của nhà toán học và thần học Bohemia Bernard Bolzano và nhà toán học Đức Karl Weierstrass. Công trình của Bolzano xuất hiện năm 1816, nhưng chỉ được đánh giá cao vào năm 1870 khi Weierstrass mở rộng cho cả các hàm phức. Câu trả lời của họ cho Berkeley là khái niệm giới hạn. Tôi sẽ phát biểu định nghĩa của nó bằng lời và bỏ lại cách trình bày bằng ký hiệu ở phần Chú thích cuối sách[7]. Một hàm $f(h)$ của biến h tiến tới giới hạn L khi h tiến tới 0 nếu, với bất kỳ số dương cho trước nào, hiệu số giữa $f(h)$ và L có thể nhỏ hơn số đó bằng cách chọn giá trị khác 0 đủ nhỏ của h. Viết dưới dạng ký hiệu, ta có:

$$\lim_{h\to 0} f(h) = L$$

Ý tưởng trung tâm của giải tích là lấy xấp xỉ độ thay đổi của một hàm trên một khoảng nhỏ h, rồi sau đó lấy giới hạn khi h tiến tới 0. Với một hàm tổng quát $y = f(x)$, phương pháp này dẫn tới một phương trình mà ta đã dùng để trang trí cho phần mở đầu của chương này, nhưng ở đây sử dụng biến tổng quát x thay vì thời gian:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Trên tử số chúng ta thấy độ thay đổi của hàm f; dưới mẫu số là độ thay đổi của x. Phương trình này định nghĩa $f'(x)$ một cách duy nhất, nếu giới hạn tồn tại. Điều này cần phải được chứng minh cho bất kỳ hàm nào được xét đến: giới hạn tồn tại cho hầu hết các hàm thông thường như: bậc hai, bậc ba, các lũy thừa bậc cao hơn, logarit, hàm mũ, và các hàm lượng giác.

Như vậy, trong quá trình tính toán, không có trường hợp nào chúng ta phải chia cho số 0 cả, bởi vì chúng ta không bao

giờ đặt $h = 0$. Hơn nữa, cũng chẳng có gì thực sự trôi đi ở đây. Vấn đề là khoảng giá trị mà h biến thiên, chứ không phải là nó biến thiên như thế nào trong khoảng đó. Do vậy, sự châm biếm của Berkeley là hoàn toàn chính xác. Giới hạn L chính là bóng ma của các đại lượng biến mất, tức h của tôi, và o của Newton. Nhưng cách biến mất của các đại lượng này – *tiến đến* 0, nhưng không *đạt tới* giá trị ấy – đã dẫn tới một bóng ma được định nghĩa hoàn hảo về mặt ý nghĩa và logic.

Phép tính vi tích phân bây giờ đã có một cơ sở logic vững chắc. Nó xứng đáng, và đã có được, một cái tên phản ánh địa vị mới của mình: giải tích.

Liệt kê tất cả các lĩnh vực mà giải tích có thể được ứng dụng là một nhiệm vụ bất khả thi, chẳng khác nào bắt liệt kê tất cả mọi thứ trên thế giới phụ thuộc vào việc sử dụng một cái vặn đinh ốc. Ở một mức độ tính toán đơn giản, những ứng dụng của giải tích bao gồm việc tính độ dài của đường cong, diện tích của các mặt và các hình dạng phức tạp, thể tích của các hình khối, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và khối tâm của vật. Kết hợp với các định luật của cơ học, giải tích giúp ta tìm ra quỹ đạo của tên lửa không gian, ứng suất trong đá ở một đới hút chìm có thể tạo ra động đất, kiểu dao động của một tòa nhà cao tầng khi xảy ra động đất, một ôtô nảy lên nảy xuống thế nào khi bị xóc, thời gian cần để một vi khuẩn gây bệnh lan truyền, cách thức lành vết thương phẫu thuật, và lực tác dụng lên một cây cầu treo khi có gió mạnh.

Rất nhiều các ứng dụng như thế xuất phát từ cấu trúc sâu sắc của các định luật Newton: chúng là các mô hình của tự nhiên được phát biểu dưới dạng các phương trình vi phân. Đó là những phương trình bao gồm các đạo hàm của một ẩn

hàm, và phải dùng các kỹ thuật của giải tích để giải chúng. Tôi sẽ không nói gì thêm ở đây, bởi vì trong tất cả các chương bắt đầu từ chương 8, giải tích đều xuất hiện một cách rõ ràng, chủ yếu dưới dạng các phương trình vi phân. Trường hợp ngoại lệ đơn lẻ là chương 15 nói về lý thuyết thông tin, nhưng ngay cả ở đó, những phát triển khác mà tôi không đề cập đến cũng liên quan đến giải tích. Giống như dụng cụ vặn đinh ốc, giải tích đơn giản là công cụ không thể thay thế trong bộ công cụ của các kỹ sư và nhà khoa học. Hơn bất kỳ một kỹ thuật toán học nào khác, nó đã sáng tạo ra thế giới hiện đại.

4 Hệ thống thế giới

Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton

lực hấp dẫn
hằng số hấp dẫn
khối lượng vật 1
khối lượng vật 2

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

chia cho
bình phương
khoảng cách giữa hai vật

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nó xác định lực hấp dẫn giữa hai vật theo khối lượng và khoảng cách giữa chúng.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó có thể áp dụng cho một hệ bất kỳ các vật thể tương tác với nhau thông qua lực hấp dẫn, như là Hệ Mặt Trời. Nó cho chúng ta biết chuyển động của các hành tinh được xác định bởi một định luật toán học đơn giản.

Nó đã dẫn tới những gì?

Dự đoán chính xác hiện tượng thiên thực, quỹ đạo các hành tinh, sự trở lại của các sao chổi, sự quay của các thiên hà. Vệ tinh nhân tạo, lập bản đồ Trái Đất, kính thiên văn Hubble, quan sát các tai lửa của Mặt Trời. Các vệ tinh thăm dò liên hành tinh, viễn thông và truyền hình qua vệ tinh, hệ thống định vị toàn cầu (GPS).

Các định luật chuyển động của Newton nắm bắt được mối liên hệ giữa các lực tác dụng lên một vật và cách thức chuyển động của nó tương ứng với những lực ấy. Giải tích cung cấp những kỹ thuật toán học để giải các phương trình liên quan. Nhưng một yếu tố quan trọng cần có để áp dụng các định luật của Newton là xác định các lực. Khía cạnh tham vọng nhất trong *Những nguyên lý* của Newton là tìm ra các lực cụ thể tác dụng lẫn nhau giữa các thiên thể trong Hệ Mặt Trời gồm Mặt Trời, các hành tinh, Mặt Trăng và các sao chổi. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton đã tổng hợp, trong một công thức đơn giản, những quan sát và lý thuyết thiên văn được tích tụ trong hàng ngàn năm. Nó đã giải thích được nhiều đặc tính khó hiểu trong chuyển động của các hành tinh, và có thể tiên đoán các chuyển động tương lai của Hệ Mặt Trời với độ chính xác cao. Thuyết tương đối rộng của Einstein cuối cùng cũng đã thay thế cho lý thuyết hấp dẫn của Newton, trong chừng mực có liên quan tới vật lý cơ bản, nhưng đối với hầu hết các mục đích thực tiễn thì cách tiếp cận Newton đơn giản hơn do đó vẫn thịnh hành hơn. Ngày nay, các cơ quan hàng không vũ trụ trên thế giới như NASA và ESA vẫn sử dụng các định luật về chuyển động và hấp dẫn của Newton để tính toán những quỹ đạo hiệu quả nhất cho các con tàu vũ trụ.

Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton, trên tất cả, phù hợp với nhan đề phụ của cuốn *Những nguyên lý*: *Hệ thống của thế giới (The System of the World)*. Định luật này chứng

tỏ sức mạnh khổng lồ của toán học để tìm ra các hình mẫu ẩn giấu của tự nhiên và tiết lộ những điều đơn giản ẩn giấu đằng sau những phức tạp rối rắm của thế giới. Và theo thời gian, các nhà toán học và thiên văn học đặt những câu hỏi hóc búa hơn nhằm phát lộ những phức tạp ẩn giấu ngụ ý trong định luật đơn giản của Newton. Để đánh giá đúng những thành tựu của Newton, trước hết, chúng ta phải lần ngược lại thời gian, để xem các nền văn minh trước đã nhìn nhận các vì sao và các hành tinh như thế nào.

Con người đã bắt đầu hướng cái nhìn lên bầu trời đêm ngay từ buổi bình minh của lịch sử nhân loại. Ấn tượng ban đầu của họ có lẽ là những chấm sáng nằm tản mát ngẫu nhiên, nhưng họ đã nhanh chóng nhận thấy rằng ngang qua cái nền đó, quả cầu Mặt Trăng đã vạch ra một con đường đều đặn và trong quá trình đó nó thay đổi hình dạng của mình. Họ cũng đã thấy hầu hết các điểm sáng nhỏ xíu đó có vị trí tương đối ở trong những hình mẫu không thay đổi, mà ngày nay chúng ta gọi chúng là các chòm sao. Các ngôi sao đi ngang qua bầu trời đêm, nhưng dường như chúng di chuyển theo từng khối rắn đơn lẻ, cứ như là các chòm sao được vẽ bên trong một cái bát khổng lồ đang quay[1]. Tuy nhiên, một số ngôi sao xử sự khá khác biệt: chúng như đi lang thang quanh bầu trời. Quỹ đạo của chúng khá phức tạp và đôi khi quay trở lại điểm cũ. Đó là các hành tinh (*planet*), một từ mượn từ tiếng Hy Lạp có nghĩa là "kẻ lang thang". Người cổ đại đã nhận biết được năm trong số chúng, mà bây giờ được gọi là Thủy tinh, Kim tinh, Hỏa tinh, Mộc tinh, Thổ tinh. Chúng chuyển động đối với các ngôi sao cố định với những vận tốc khác nhau, mà chậm nhất là Thổ tinh.

Một hiện tượng thiên văn khác còn gây hoang mang hơn nhiều. Thỉnh thoảng lại có một sao chổi xuất hiện, chẳng biết là từ đâu tới, kéo theo một cái đuôi cong và dài. Những "ngôi sao sa" này có lẽ đã rơi xuống từ thiên đường, cứ như là chúng bị tách ra khỏi cái bát đã đỡ chúng vậy. Không có gì ngạc nhiên rằng con người thời sơ khai ấy đã gắn những bất thường trên bầu trời với tính thất thường của các nhân vật siêu nhiên.

Những điều bình thường có quy luật được tổng hợp lại có vẻ hiển nhiên tới mức ít ai dám mơ tới chuyện bàn cãi về chúng. Mặt Trời, các vì sao và các hành tinh quay xung quanh Trái Đất. Chúng trông như thế và chúng ta cũng cảm thấy rằng nó phải như thế. Đối với người cổ đại, vũ trụ là địa tâm – tức Trái Đất là trung tâm. Chỉ có một tiếng nói đơn độc cất lên tranh luận về điều hiển nhiên ấy, đó là Aristarchus ở Samos. Sử dụng các nguyên lý hình học và quan sát, Aristarchus đã tính được kích thước của Trái Đất, Mặt Trời và Mặt Trăng. Khoảng năm 270 TCN, ông đã đề xuất thuyết nhật tâm đầu tiên: Trái Đất và các hành tinh khác quay xung quanh Mặt Trời. Lý thuyết của ông nhanh chóng bị tẩy chay và chỉ được phục hồi lại gần 2000 năm sau.

Vào thời Ptolemy, một người La Mã sống ở Ai Cập khoảng năm 120 SCN, các hành tinh đã bị chế ngự. Chuyển động của chúng không còn lang thang thất thường nữa mà đã có thể tiên đoán được. Cuốn *Luận thuyết vĩ đại (Almagest)* của Ptolemy đã đề xuất rằng chúng ta sống trong một vũ trụ địa tâm, ở đó tất cả mọi thứ thực sự quay xung quanh loài người theo những tổ hợp phức tạp của các vòng tròn gọi là ngoại luân, có giá đỡ là những tinh cầu khổng lồ. Học thuyết của ông là sai, nhưng những chuyển động mà nó tiên đoán được

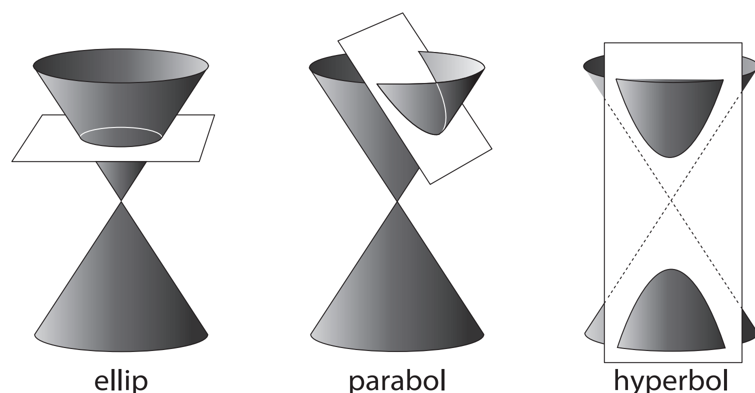
tương đối chính xác vì các sai số vẫn còn chưa được phát hiện nhiều thế kỷ sau đó. Hệ thống Ptolemy còn có thêm sự hấp dẫn về triết học: nó biểu diễn vũ trụ bằng các hình hình học hoàn hảo – đó là hình cầu và đường tròn. Nghĩa là nó vẫn tiếp nối truyền thống Pythagor. Ở châu Âu, học thuyết Ptolemy đứng vững tới 1400 năm.

Trong khi châu Âu lãng phí thời gian, thì những tiến bộ khoa học mới đã xuất hiện ở những nơi khác, đặc biệt là ở Ả Rập, Trung Quốc và Ấn Độ. Năm 499, nhà thiên văn Ấn Độ Aryabhata đã đề xuất một mô hình toán học cho Hệ Mặt Trời trong đó Trái Đất quay xung quanh trục của nó và chu kỳ quỹ đạo của các hành tinh được xác định đối với vị trí của Mặt Trời. Trong thế giới Hồi giáo, Alhazen viết một bài phê phán gay gắt học thuyết Ptolemy, mặc dù lời phê phán ấy không tập trung vào bản chất địa tâm của nó. Vào khoảng năm 1000, Abu Rayhan Biruni đã xem xét một cách nghiêm túc khả năng Hệ Mặt Trời là nhật tâm, với Trái Đất quay xung quanh trục của nó, nhưng cuối cùng cũng phải đầu hàng học thuyết chính thống ở thời gian đó, coi Trái Đất là đứng yên. Khoảng năm 1300, Najm al-Din al-Qazwini al-Katibi đã đề xuất lý thuyết nhật tâm nhưng chẳng bao lâu ông đã thay đổi suy nghĩ của mình.

Bước đột phá lớn đến cùng với công trình của Nicolaus Copernicus, công bố năm 1543 với tựa đề *Về chuyển động quay của các thiên cầu* (*De Revolutionibus Orbium Coelestium*). Có bằng chứng, mà chủ yếu là việc dùng hầu hết các hình vẽ giống hệt nhau được ghi chú bằng cùng các chữ cái, để thấy rằng Copernicus, chí ít cũng đã chịu ảnh hưởng của al-Katibi, nhưng ông đã tiến xa hơn nhiều. Ông đã đưa ra một hệ nhật

tâm hết sức tường minh, và chỉ rõ rằng nó phù hợp với các quan sát hơn và cũng tiết kiệm hơn so với hệ thống địa tâm của Ptolemy, và cũng gợi mở nhiều ẩn ý triết học hơn. Đỉnh cao trong đó là tư tưởng mới lạ cho rằng con người không phải là trung tâm của vạn vật. Nhà thờ Cơ Đốc giáo nhìn nhận quan điểm này đi ngược với học thuyết của họ và làm hết sức mình để ngăn chặn nó. Học thuyết nhật tâm tường minh là dị giáo.

Tuy nhiên, nó vẫn chiếm ưu thế, vì các bằng chứng quá mạnh mẽ. Các học thuyết nhật tâm mới và tốt hơn đã xuất hiện. Sau đó tất cả các thiên cầu đã bị vứt bỏ hết, để chào đón một dạng khác trong hình học cổ điển: đó là hình ellip. Ellip có dạng ô-van, và những bằng chứng gián tiếp cho thấy rằng chúng đã được Menaechmus nghiên cứu đầu tiên trong hình học Hy Lạp vào khoảng năm 350 TCN, cùng với hyperbol và parabol, như là tiết diện của hình nón (còn gọi là các tiết diện conic), hình 13. Euclid được cho là đã viết bốn cuốn sách về các tiết diện conic, mặc dù không quyển nào còn tồn tại đến ngày nay, và Archimedes cũng đã nghiên cứu tỉ mỉ một số tính chất của chúng. Nghiên cứu của người Hy Lạp về chủ đề này đạt tới đỉnh cao vào khoảng năm 240 TCN với tám cuốn trong bộ *Các tiết diện conic* (*Conic Sections*) của Apollonius ở Perga, người đã tìm ra một cách định nghĩa các đường cong này thuần túy trên một mặt phẳng, bỏ qua chiều không gian thứ ba. Tuy nhiên, quan điểm của trường phái Pythagor vẫn còn tồn tại dai dẳng cho rằng các đường tròn và các mặt cầu đạt tới độ hoàn hảo cao hơn các ellip và các đường cong phức tạp hơn.



Hình 13 Các tiết diện conic.

Các ellip gắn chặt vai trò của chúng vào thiên văn vào khoảng năm 1600, với công trình của Kepler. Từ thuở thiếu thời, ông đã bắt đầu quan tâm tới thiên văn học, năm 1577, khi mới sáu tuổi, ông đã được chứng kiến một sao chổi lớn xuất hiện[2], và ba năm sau ông đã được trực tiếp nhìn thấy nguyệt thực. Ở trường đại học Tübingen, Kepler đã chứng tỏ khả năng toán học tuyệt vời và đã dùng nó vào mục đích sinh lợi là đoán tử vi. Ở thời ấy, toán học, thiên văn học và chiêm tinh học thường đi cùng với nhau. Ông đã kết hợp mức độ cuồng say của chủ nghĩa thần bí với sự chú ý tỉnh táo tới chi tiết toán học. Một ví dụ điển hình là cuốn sách *Bí ẩn vũ trụ* (*Mysterium Cosmographicum*) của ông xuất bản năm 1596, trong đó ông đã nhiệt thành bảo vệ cho hệ nhật tâm. Nó kết hợp sự thấu hiểu học thuyết Copernicus với cái mà dưới con mắt hiện đại là một sự tư biện rất lạ lùng liên hệ khoảng cách giữa các hành tinh đã biết đến Mặt Trời với các khối đa diện đều. Trong một thời gian dài, Kepler đã coi khám phá này như là một trong những khám phá vĩ đại nhất của ông, vì nó đã hé lộ bản thiết kế vũ trụ của Đấng Sáng thế. Ông coi những nghiên cứu sau này của mình, bây giờ chúng ta coi là quan trọng hơn rất nhiều, đơn giản chỉ là những thực hiện chi tiết

của bản thiết kế đó. Vào thời đó, một lợi thế của lý thuyết này là nó giải thích được tại sao lại có chính xác sáu hành tinh (từ Thủy tinh đến Thổ tinh). Ở giữa sáu quỹ đạo là năm khoảng trống, mỗi khoảng trống ứng với một khối đa diện đều. Với việc khám phá ra Thiên vương tinh, và sau này là Hải vương tinh và Diêm vương tinh (trước khi nó bị hạ cấp xuống mức dưới hành tinh) đặc điểm này nhanh chóng trở thành một sai lầm chết người.

Đóng góp lâu dài của Kepler bắt nguồn từ việc ông làm công cho Tycho Brahe. Hai người gặp nhau lần đầu năm 1600. Sau hai tháng lưu lại và một cuộc tranh luận sôi nổi, Kepler thương lượng một mức lương chấp nhận được. Sau một cuộc cãi cọ về những vấn đề xảy ra ở thành phố Graz quê hương ông, Kepler chuyển về Prague, giúp Tycho phân tích các quan sát thiên văn của ông, đặc biệt là về Hỏa tinh. Khi Tycho mất đột ngột vào năm 1601, Kepler đã thay thế vị trí của ông chủ với cương vị là nhà toán học trong cung đình của Rudolph II. Vai trò chính của ông là đoán số tử vi cho hoàng gia, nhưng ông vẫn có thời gian để tiếp tục những phân tích của mình về quỹ đạo của Hỏa tinh. Dựa trên các nguyên lý ngoại luân truyền thống, ông đã cải tiến mô hình của mình tới mức mà các sai số của nó, khi so với quan sát, thường chỉ là hai phút góc, một sai số điển hình trong các quan sát. Tuy nhiên, ông không dừng lại ở đó vì đôi khi sai số lớn hơn, tới tám phút góc.

Cuộc tìm kiếm của ông cuối cùng đã dẫn tới hai định luật về chuyển động của các hành tinh, được công bố trong cuốn *Một nền thiên văn học mới* (*Astronomia Nova*). Trong rất nhiều năm, ông đã cố gắng gò cho quỹ đạo của Hỏa tinh khớp với một *ovoid* – một đường cong hình quả trứng với một đầu nhọn

hơn đầu kia – mà không thành công. Có lẽ ông chờ đợi quỹ đạo cong hơn khi ở gần Mặt Trời hơn. Năm 1605, Kepler chợt nảy ra ý nghĩ thử một hình ellip, cong đều ở hai đầu, và ông thực sự ngạc nhiên là nó phù hợp hơn rất nhiều. Ông đi tới kết luận rằng quỹ đạo của tất cả các hành tinh đều là đường ellip, đó là định luật thứ nhất của ông. Định luật thứ hai mô tả cách chuyển động của các hành tinh theo quỹ đạo của chúng, nó phát biểu rằng các hành tinh quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Cuốn sách đã ra đời vào năm 1609. Sau đó Kepler đã nỗ lực rất nhiều để chuẩn bị các bảng biểu thiên văn, nhưng rồi ông đã quay trở lại với các quy luật của quỹ đạo các hành tinh vào năm 1619 trong cuốn *Sự hài hòa của thế giới* (*Harmonices Mundi*). Cuốn sách này có một vài ý tưởng mà ngày nay ta thấy hơi lạ, chẳng hạn như các hành tinh phát ra các nhạc âm khi chúng quay quanh Mặt Trời. Nhưng nó cũng chứa định luật thứ ba của ông: bình phương chu kỳ quay của các hành tinh tỉ lệ thuận với lập phương khoảng cách của chúng tới Mặt Trời.

Ba định luật của Kepler hầu như đã bị chôn vùi giữa cả đống rối rắm của chủ nghĩa thần bí, chủ nghĩa tượng trưng tôn giáo và tư biện triết học. Nhưng chúng đã thể hiện một bước nhảy khổng lồ về phía trước, dẫn Newton tới một trong những khám phá khoa học vĩ đại nhất mọi thời đại.

Newton đã rút ra định luật về hấp dẫn của mình từ ba định luật về chuyển động hành tinh của Kepler. Nó phát biểu rằng mọi hạt trong vũ trụ hút tất cả các hạt khác bằng một lực tỉ lệ với tích khối lượng của hai hạt và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Nó được viết dưới dạng ký hiệu:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Ở đây F là lực hấp dẫn, d là khoảng cách, m_1, m_2 là khối lượng hai hạt và G là một số cố định, được gọi là hằng số hấp dẫn[3].

Ai đã khám phá ra định luật hấp dẫn của Newton? Điều này nghe có vẻ như là một trong những câu hỏi tu từ, tựa như: "Tượng của ai đứng ở đỉnh cột Nelson?". Nhưng câu trả lời hợp lý là người quản lý các thí nghiệm của Hội Hoàng gia Anh, Robert Hooke. Khi Newton công bố định luật này vào năm 1687 trong cuốn *Những nguyên lý*, Hooke đã buộc tội ông đạo văn. Tuy nhiên, Newton cung cấp tư liệu về quá trình rút ra lần đầu tiên bằng toán học các quỹ đạo ellip từ định luật này, điều có tầm quan trọng sống còn để xác lập tính đúng đắn của nó, và Hooke đã chấp nhận. Hơn nữa, Newton cũng đã trích dẫn Hooke, cùng với vài người nữa trong cuốn sách đó. Có thể đoán chừng rằng Hooke cảm thấy ông phải xứng đáng được tính công lao nhiều hơn; trước đó, đôi lần ông cũng đã phải chịu những vấn đề tương tự, nên đây là một điểm dễ chạnh lòng.

Ý tưởng rằng các vật hút lẫn nhau đã được bàn luận đâu đó một thời gian, và vì vậy nó gần như đã có biểu thức toán học. Năm 1645, nhà thiên văn học người Pháp Ismaël Boulliau (Bullialdus) đã viết cuốn *Thiên văn học của Philolaus* (*Astronomia Philolaica* – Philolaus là nhà triết học Hy Lạp, người đã nghĩ rằng một ngọn lửa là trung tâm của vũ trụ chứ không phải Trái Đất). Trong đó ông viết:

> Còn về sức mạnh (lực) mà nhờ nó Mặt Trời nắm bắt hoặc giữ các hành tinh [...], nó được phát ra theo đường thẳng xuyên suốt phạm vi của thế giới [...], giờ đây khi thấy rằng

> nó cũng là vật chất, nó yếu đi và suy giảm ở một khoảng cách, và tỉ số độ giảm cường độ của nó cũng giống như đối với ánh sáng, mà cụ thể là theo tỉ lệ bình phương nhưng là nghịch đảo, của khoảng cách.

Đây là sự phụ thuộc "nghịch đảo bình phương" của lực theo khoảng cách. Có nhiều nguyên nhân đơn giản, mặc dù khá ngây thơ, để chờ đợi có một công thức như thế, bởi vì diện tích bề mặt của một hình cầu biến thiên theo bình phương bán kính của nó. Nếu cùng một lượng "vật chất" hấp dẫn lan tỏa qua các mặt cầu có bán kính ngày càng tăng như khi nó xuất phát từ Mặt Trời, thì lượng nhận được ở bất kỳ điểm nào phải biến thiên tỉ lệ nghịch với diện tích bề mặt. Điều này xảy ra giống hệt với ánh sáng, và Boulliau đã giả thiết, mà không có nhiều bằng chứng, rằng lực hấp dẫn cũng phải tương tự như vậy. Ông cũng nghĩ rằng các hành tinh chuyển động dọc theo quỹ đạo của nó bằng năng lượng của chính nó, do đó ông nói rằng, "Không có dạng chuyển động nào ép lên các hành tinh còn lại, chúng tự dẫn động bằng các dạng riêng mà chúng được cung cấp".

Đóng góp của Hooke ghi dấu vào năm 1666, khi ông trình bày một báo cáo trước Hội Hoàng gia, với nhan đề *Về lực hấp dẫn (On gravity)*. Ở đó ông đã liệt kê ra các sai lầm của Boulliau, khi lập luận rằng lực hấp dẫn từ Mặt Trời có thể cản trở xu thế chuyển động tự nhiên theo đường thẳng của hành tinh (như đã được chỉ ra trong định luật thứ ba về chuyển động của Newton), và bắt nó phải đi theo đường cong. Ông cũng khẳng định rằng các lực hút này sẽ càng mạnh nếu các vật được mang đến càng gần tâm của nhau, điều đó chứng tỏ ông cũng đã nghĩ tới khả năng lực giảm theo khoảng cách.

Nhưng ông đã không nói với ai về dạng toán học của sự suy giảm đó, cho tới tận năm 1679, khi ông viết cho Newton: "Lực hấp dẫn luôn tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách tính từ tâm". Trong cùng lá thư ấy, ông nói rằng điều này dẫn tới vận tốc của một hành tinh biến thiên theo nghịch đảo của khoảng cách từ nó tới Mặt Trời. Nhưng điều này không đúng.

Khi Hooke phàn nàn rằng Newton đánh cắp định luật của ông, Newton đã phủ nhận điều đó, và chỉ ra rằng ông đã thảo luận về ý tưởng này với Christopher Wren trước khi Hooke gửi thư cho ông. Để chứng minh quyền sở hữu phát minh, Newton đã trích dẫn Boulliau, và cả Giovanni Borelli, một nhà sinh lý học và vật lý toán người Ý nữa. Borelli đã đề xuất rằng có ba lực tổng hợp để tạo ra chuyển động của một hành tinh: một lực hướng vào sinh ra bởi mong muốn của hành tinh được tiến gần tới Mặt Trời, một lực ngang sinh bởi ánh sáng Mặt Trời, và một ngoại lực hướng ra ngoài sinh bởi sự quay của Mặt Trời.

Quan điểm chính của Newton có tính quyết định, đó là cho dù Hooke đã làm được gì đi nữa, thì ông ta cũng không phải là người đã rút ra được dạng quỹ đạo chính xác từ định luật hấp dẫn nghịch đảo bình phương. Còn Newton thì đã làm được. Thực tế, ông đã suy ra được cả ba định luật của Kepler về chuyển động của các hành tinh: quỹ đạo ellip, hành tinh chuyển động quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian như nhau, và bình phương của chu kỳ tỉ lệ thuận với lập phương của khoảng cách. "Không có những Chứng minh của tôi", Newton khẳng định, "thì một nhà triết học sáng suốt và thận trọng không thể tin rằng định luật nghịch đảo bình phương là đúng đắn ở khắp nơi". Nhưng

ông cũng thừa nhận rằng "Mr. Hooke hoàn toàn không biết tới" chứng minh này. Một điểm then chốt trong lập luận của Newton là định luật của ông áp dụng được không chỉ cho chất điểm, mà cho cả khối cầu. Sự mở rộng này cực kỳ quan trọng đối với chuyển động của các hành tinh, và đã khiến Newton phải nỗ lực rất nhiều. Chứng minh hình học của ông là một ứng dụng trá hình của phép tính tích phân, và ông đã tự hào về nó một cách chính đáng. Cũng có cả các bằng chứng tài liệu cho biết rằng Newton đã nghĩ về những vấn đề như vậy trong một thời gian khá lâu.

Dẫu thế nào, chúng ta cũng đã đặt tên cho định luật đó là định luật Newton, và nó thực sự xứng đáng với đóng góp quan trọng của ông.

Khía cạnh quan trọng nhất trong định luật hấp dẫn của Newton không phải là luật nghịch đảo bình phương, mà là nó khẳng định rằng lực hấp dẫn có tác dụng phổ quát. *Bất kỳ* hai vật thể nào, ở bất kỳ đâu trong vũ trụ cũng đều hấp dẫn lẫn nhau. Dĩ nhiên bạn cần một định luật chính xác về lực (nghịch đảo bình phương) để thu được kết quả chính xác, nhưng nếu thiếu tính phổ quát, bạn không thể biết làm thế nào để có thể viết ra các phương trình cho một hệ bất kỳ có nhiều hơn hai vật. Hầu như những hệ thú vị, như Hệ Mặt Trời, hay cấu trúc tinh tế của chuyển động Mặt Trăng đều chịu ảnh hưởng của (chí ít) Trái Đất và Mặt Trời, liên quan tới nhiều hơn hai vật, do vậy định luật của Newton có lẽ sẽ gần như vô dụng nếu nó chỉ áp dụng được cho bối cảnh mà ban đầu ông suy ra nó.

Điều gì đã là động lực để phát hiện tính phổ quát này? Trong cuốn *Những hồi ức về cuộc đời của Sir Isaac Newton*

(*Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*) in năm 1752 của mình, William Stukeley đã thuật lại một câu chuyện mà Newton kể cho ông vào năm 1726:

> Ý niệm về hấp dẫn… đã khởi sinh từ sự rơi của quả táo, khi ông đang ngồi trong trạng thái chiêm nghiệm. Ông đã nghĩ tại sao trái táo lại rơi thẳng xuống mặt đất. Tại sao nó không đi ngang hoặc đi lên trên, mà lại luôn rơi hướng tới tâm Trái Đất? Chắc chắn nguyên nhân là do Trái Đất kéo nó xuống. Phải có một lực hút trong vật chất. Và tổng của các lực hút trong vật chất của Trái Đất phải nằm ở tâm của Trái Đất, chứ không phải ở phía nào của nó. Do vậy nên quả táo mới rơi vuông góc hay hướng thẳng tới tâm của Trái Đất? Nếu vật chất hút vật chất; nó phải tỉ lệ với lượng vật chất đó. Bởi vậy quả táo cũng hút Trái Đất như Trái Đất hút quả táo vậy.

Câu chuyện trên là sự thật hay chỉ là sự hư cấu tiện lợi mà Newton bịa ra sau này để giúp ông giải thích các ý tưởng của mình, hiện còn chưa rõ, nhưng thôi thì ta cứ chấp nhận như vậy bởi vì ý tưởng không dừng lại ở những quả táo. Quả táo quan trọng với Newton bởi vì nó giúp ông nhận ra rằng cùng một định luật về lực có thể giải thích được cả chuyển động của quả táo lẫn chuyển động của Mặt Trăng. Điểm khác biệt duy nhất chỉ là Mặt Trăng còn có chuyển động ngang nữa, điều này giải thích tại sao nó cứ đứng đó mà không chịu rơi. Thực tế thì nó vẫn luôn luôn rơi về phía Trái Đất, nhưng chuyển động ngang khiến cho bề mặt Trái Đất cũng rơi ra xa. Newton, chính là Newton, không chỉ dừng lại với lập luận định tính này. Ông đã tiến hành tính toán, rồi so sánh kết quả với quan sát, và hài lòng rằng ý tưởng của ông là chính xác.

Nếu lực hấp dẫn tác dụng lên quả táo, Mặt Trăng và Trái Đất, như là một đặc tính cố hữu của vật chất, thì có lẽ nó cũng tác dụng lên vạn vật.

Không thể kiểm chứng tính phổ quát của lực hấp dẫn một cách trực tiếp, vì bạn phải nghiên cứu tất cả các cặp vật trong toàn vũ trụ, và tìm cách loại bỏ ảnh hưởng của tất cả các vật khác. Nhưng đây không phải là cách làm việc khoa học. Thay vì thế, khoa học sử dụng hỗn hợp của suy luận và quan sát. Tính phổ quát là một giả thuyết, nó có thể trở thành ngụy tạo mỗi khi được áp dụng. Nhưng mỗi lần nó vượt qua được điều đó, người ta nói rằng nó cho kết quả tốt, và sự biện minh cho việc sử dụng nó lại trở nên mạnh hơn một chút. Nếu (như trong trường hợp này) nó vẫn đứng vững sau hàng ngàn những kiểm chứng như thế, thì sự biện minh sẽ thực sự trở nên rất mạnh mẽ. Tuy nhiên, giả thuyết này không bao giờ chứng minh được là *đúng*: bởi vì, như tất cả chúng ta đều biết, thí nghiệm tiếp sau rất có thể cho những kết quả không tương thích. Có thể ở đâu đó trong một thiên hà, xa, rất xa, có một hạt vật chất, một nguyên tử chẳng hạn, không bị hút bởi tất cả những vật khác. Nếu đúng như thế thì chúng ta cũng không bao giờ tìm thấy nó; và nó cũng sẽ không ảnh hưởng gì đến những tính toán của chúng ta. Định luật nghịch đảo bình phương tự thân nó đã là cực kỳ khó để có thể kiểm tra trực tiếp, tức là đo đạc trực tiếp lực hấp dẫn. Thay vì vậy, chúng ta áp dụng định luật này cho các hệ mà chúng ta có thể đo đạc được bằng cách sử dụng nó để tiên đoán các quỹ đạo, và sau đó kiểm tra xem tiên đoán ấy có phù hợp với quan sát hay không.

Ngay cả khi được công nhận là phổ quát thì vẫn chưa đủ để có thể viết ra một định luật chính xác về hấp dẫn. Nó chỉ đưa

ra một phương trình mô tả chuyển động. Để tìm ra chuyển động ấy, bạn còn phải giải phương trình đó. Ngay cả với hai vật thôi, điều đó cũng không phải là dễ dàng, và nên nhớ rằng Newton đã biết trước câu trả lời được mong đợi, nhưng việc ông suy ra quỹ đạo ellip đã là chuyện thần kỳ rồi. Nó giải thích vì sao mà ba định luật của Kepler đã mô tả rất chính xác mỗi quỹ đạo của các hành tinh. Nó cũng giải thích tại sao mô tả này lại không chính xác: các vật thể khác trong Hệ Mặt Trời, trừ Mặt Trời và chính hành tinh đó đều có ảnh hưởng tới chuyển động. Để tính tới hết những nhiễu loạn này, bạn phải giải các phương trình chuyển động cho ba hay nhiều hơn ba vật. Đặc biệt, nếu bạn muốn dự đoán chuyển động của Mặt Trăng với độ chính xác cao, bạn phải tính tới cả Mặt Trời và Trái Đất trong các phương trình của mình. Ảnh hưởng của các hành tinh khác, đặc biệt là Mộc tinh, cũng không phải là không đáng kể, nhưng nó chỉ bộc lộ sau những thời gian dài mà thôi. Được khích lệ từ thành công của Newton về chuyển động của hai vật dưới tác dụng của lực hấp dẫn, các nhà toán học và vật lý đã hăm hở chuyển sang trường hợp kế tiếp: ba vật. Nhưng sự lạc quan ban đầu của họ nhanh chóng tiêu tan: trường hợp ba vật hóa ra lại rất khác với trường hợp hai vật. Thực tế, nó thách thức những ai muốn giải nó.

Thường thì có thể dùng các *phép gần đúng tốt* để tính toán chuyển động (thông thường cách này chỉ giải được các bài toán mang tính thực tiễn), nhưng đó không phải là một công thức chính xác. Thậm chí bài toán đã được đơn giản hóa, như bài toán ba vật hạn chế cũng đã làm chúng ta điêu đứng. Giả sử rằng một hành tinh quay quanh một ngôi sao theo quỹ đạo tròn hoàn hảo: một hạt bụi với khối lượng không đáng kể sẽ chuyển động thế nào?

Tính toán các quỹ đạo gần đúng cho ba vật hay nhiều hơn, bằng tay, chỉ sử dụng bút chì và giấy, có thể khả thi nhưng rất gian khổ. Các nhà toán học đã nghĩ ra vô số các mẹo mực và cách làm tắt, dẫn tới một sự hiểu biết hợp lý về một số hiện tượng thiên văn. Mãi tới cuối thế kỷ 19, độ phức tạp thực sự của bài toán ba vật mới trở nên rõ ràng khi Henri Poincaré nhận ra rằng hình học liên quan là cực kỳ phức tạp. Và cũng mãi tới cuối thế kỷ 20, sự ra đời của các máy tính mạnh mới giảm thiểu đáng kể công tính toán bằng tay, cho phép tiên đoán dài hạn một cách chính xác chuyển động của Hệ Mặt Trời.

Bước đột phá của Poincaré – nếu có thể gọi như thế, bởi vì ở thời kỳ đó ai cũng biết rằng bài toán này là vô vọng, và việc tìm kiếm lời giải của nó là vô nghĩa – đã xuất hiện do ông đã tham gia tranh một giải thưởng toán học. Oscar II, vua Thụy Điển và Na Uy, thông báo tổ chức một cuộc thi để mừng sinh nhật thứ 60 của ông vào năm 1889. Theo lời khuyên của nhà toán học Gösta Mittag-Leffler, nhà vua đã chọn bài toán tổng quát về nhiều vật chuyển động dưới tác dụng của lực hấp dẫn của Newton. Vì ai cũng hiểu rõ rằng một công thức tường minh giống như hình ellip của hai vật là một mục đích phi thực tế, nên yêu cầu đã được giảm nhẹ: giải thưởng sẽ được trao cho một phương pháp gần đúng dưới một dạng rất cụ thể. Nói một cách cụ thể, chuyển động phải được xác định như một chuỗi vô hạn, đưa ra được những kết quả chính xác như ta mong muốn, nếu tính đủ các số hạng cần thiết của chuỗi.

Poincaré đã không trả lời câu hỏi đó. Thực tế, luận văn của ông về chủ đề này, được công bố năm 1890, đã đưa ra bằng chứng rằng không thể có câu trả lời dạng như thế, ngay cả với bài toán ba vật đơn giản gồm ngôi sao, hành tinh và hạt bụi.

Bằng cách suy nghĩ về hình học của những lời giải giả thuyết, Poincaré khám phá ra rằng trong một vài trường hợp, quỹ đạo của hạt bụi phải cực kỳ phức tạp và rối rắm. Khi đó, ông đã rất sốc và khẳng định một cách rất bi quan rằng "Khi ta cố gắng vẽ ra hình tạo bởi hai đường cong ấy với vô số giao điểm của chúng, mỗi điểm trong chúng đều tương ứng với nghiệm tiệm cận kép, những giao điểm đó tạo nên một kiểu lưới, mạng, hay mạng lưới vô cùng dày đặc... Người ta sẽ choáng váng trước sự phức tạp của hình đó đến nỗi mà ngay cả tôi cũng không có ý định vẽ nó ra".

Ngày nay chúng ta coi công trình của Poincaré như một đột phá và không để ý tới sự bi quan của ông, bởi vì sự phức tạp của hình học đã khiến ông tuyệt vọng đối với việc giải bài toán đó, nhưng nó sẽ thực sự cung cấp cho chúng ta những nhận thức sâu sắc nếu được phát triển và thấu hiểu một cách thích đáng. Hình học phức tạp của những hệ động lực có liên quan hóa ra lại là những ví dụ sớm nhất về hỗn độn: trong các phương trình không ngẫu nhiên, sự xuất hiện các nghiệm phức tạp tới mức ở một vài khía cạnh nào đó chúng có vẻ như là ngẫu nhiên, hãy xem chương 16.

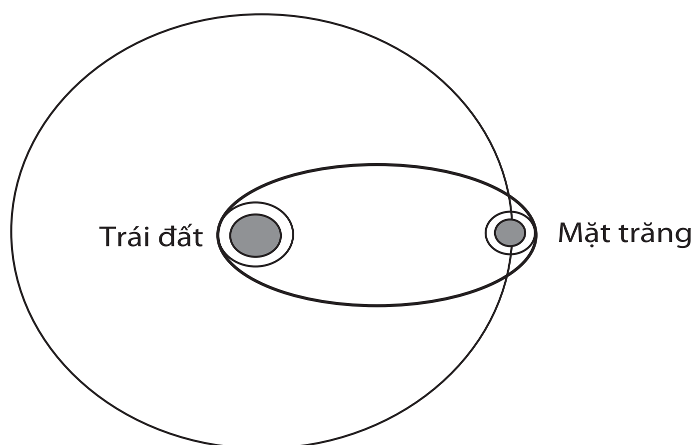
Có một số điều trớ trêu trong câu chuyện này. Nhà lịch sử toán học June Barrow-Green đã khám phá ra rằng phiên bản được công bố của luận văn tranh giải của Poincaré lại không phải là chính công trình đoạt giải[4]. Phiên bản trước đó có một sai sót nghiêm trọng là đã bỏ sót những nghiệm hỗn độn. Công trình đang ở giai đoạn in thử thì Poincaré bối rối nhận ra sai lầm của mình, và ông đã chi tiền cho bản in mới đã được sửa chữa. Hầu hết các bản copy của bản thảo gốc đã bị hủy, nhưng vẫn còn lại một bản được cất kín ở văn

khố của Viện Mittag-Leffler ở Thụy Điển, nơi Barrow-Green đã tìm ra nó.

Thực tế, hóa ra sự hiện diện của hỗn độn cũng không loại bỏ các nghiệm ở dạng chuỗi, những nghiệm này hầu như là luôn hợp thức, chứ không phải luôn luôn hợp thức. Karl Fifthiof Sundman, một nhà toán học Phần Lan, đã khám phá ra điều này vào năm 1912 đối với bài toán ba vật, khi dùng chuỗi tạo thành từ các lũy thừa căn bậc ba của thời gian. Chuỗi này hội tụ – nghĩa là có tổng hữu hạn – trừ phi trạng thái ban đầu có momen động lượng bằng 0, nhưng những trạng thái như thế vô cùng hiếm hoi, theo nghĩa, một sự lựa chọn ngẫu nhiên momen động lượng thì nó hầu như luôn là khác 0. Năm 1991, nhà toán học Trung Quốc Qiudong Wang đã mở rộng kết quả này cho bài toán nhiều vật, nhưng ông đã không phân loại các trường hợp ngoại lệ hiếm hoi khi chuỗi không hội tụ. Một sự phân loại như vậy chắc hẳn rất phức tạp: nó phải bao gồm các nghiệm mà ở đó các vật di chuyển vô hạn trong thời gian hữu hạn, hay dao động ngày càng nhanh, cả hai dạng nghiệm đó đều có thể xảy ra cho trường hợp năm vật hoặc nhiều hơn.

Định luật hấp dẫn của Newton thường được áp dụng để thiết kế các quỹ đạo cho các chuyến bay không gian. Ở đây thậm chí bản thân động lực học hai vật cũng rất hữu dụng. Trong những ngày đầu, việc khám phá Hệ Mặt Trời chủ yếu sử dụng các quỹ đạo hai vật, các đoạn ellip, bằng các động cơ, phi thuyền có thể chuyển từ một ellip này sang một ellip khác. Nhưng vì mục đích của các chương trình không gian ngày càng trở nên tham vọng hơn nên cần có các phương pháp hiệu quả hơn. Các phương pháp này đến từ động lực học

nhiều vật, mà thường là ba vật, nhưng đôi khi tới năm vật. Các phương pháp mới về hỗn độn và động lực học topo đã trở thành cơ sở cho những giải pháp thực tiễn của các vấn đề kỹ thuật.



Hình 14 Ellip chuyển Hohmann từ quỹ đạo thấp ở Trái Đất tới quỹ đạo quanh Mặt Trăng.

Tất cả bắt đầu từ một câu hỏi đơn giản: Đâu là quỹ đạo hiệu quả nhất từ Trái Đất lên Mặt Trăng hay tới các hành tinh khác? Câu trả lời kinh điển, được biết đến dưới cái tên ellip chuyển Hohmann (hình 14), bắt đầu từ một quỹ đạo tròn quanh Trái Đất, và sau đó theo một phần của ellip dài và mảnh để nhập vào một quỹ đạo tròn thứ hai xung quanh điểm đến. Phương pháp này được sử dụng cho các con tàu Apollo trong những năm 60, 70, nhưng đối với những nhiệm vụ loại khác nó lại có một bất lợi. Tàu vũ trụ phải tăng tốc để thoát ra khỏi quỹ đạo quanh Trái Đất rồi giảm tốc để đi vào quỹ đạo quanh Mặt Trăng; điều đó đã làm lãng phí nhiên liệu. Có những cách khác bao gồm nhiều vòng lặp quanh Trái Đất, rồi chuyển tiếp qua một điểm ở giữa Trái Đất và Mặt Trăng nơi mà trường hấp dẫn của chúng triệt tiêu lẫn nhau, rồi thực hiện nhiều vòng lặp xung quanh Mặt Trăng. Nhưng các quỹ

đạo như thế mất nhiều thời gian hơn các ellip Hohmann nên đã không được sử dụng cho các chuyến bay có người lái của Apollo, vì ở đó thức ăn và oxy, do đó cả thời gian nữa, là điều cốt yếu. Tuy nhiên, đối với các chuyến bay không người lái, thời gian tương đối không quan trọng, trong khi những thứ đưa thêm vào tổng trọng lượng của tàu vũ trụ, bao gồm cả nhiên liệu, lại rất tốn kém.

Bằng cái nhìn tươi mới về định luật hấp dẫn của Newton và định luật thứ hai về chuyển động của ông, các nhà toán học và các kỹ sư vũ trụ gần đây đã khám phá ra một cách tiếp cận mới, đáng chú ý để tiết kiệm nhiên liệu trong việc du hành giữa các hành tinh.

Đi theo đường ống.

Đó là ý tưởng bước thẳng ra từ khoa học viễn tưởng. Trong tác phẩm *Ngôi sao của Pandora (Pandora's Star)* của Peter Hamilton xuất bản năm 2004, ông đã vẽ ra một tương lai trong đó con người du hành tới các hành tinh quay quanh những vì sao xa xôi bằng đường sắt xuyên qua các lỗ sâu đục, một đường tắt qua không-thời gian. Trong bộ sách nhiều tập *Lensman* xuất bản từ năm 1934 tới 1948, Edward Elmer "Doc" Smith đã nghĩ ra một ống siêu không gian mà những người ngoài hành tinh độc ác đã sử dụng để xâm lược thế giới con người từ chiều thứ tư.

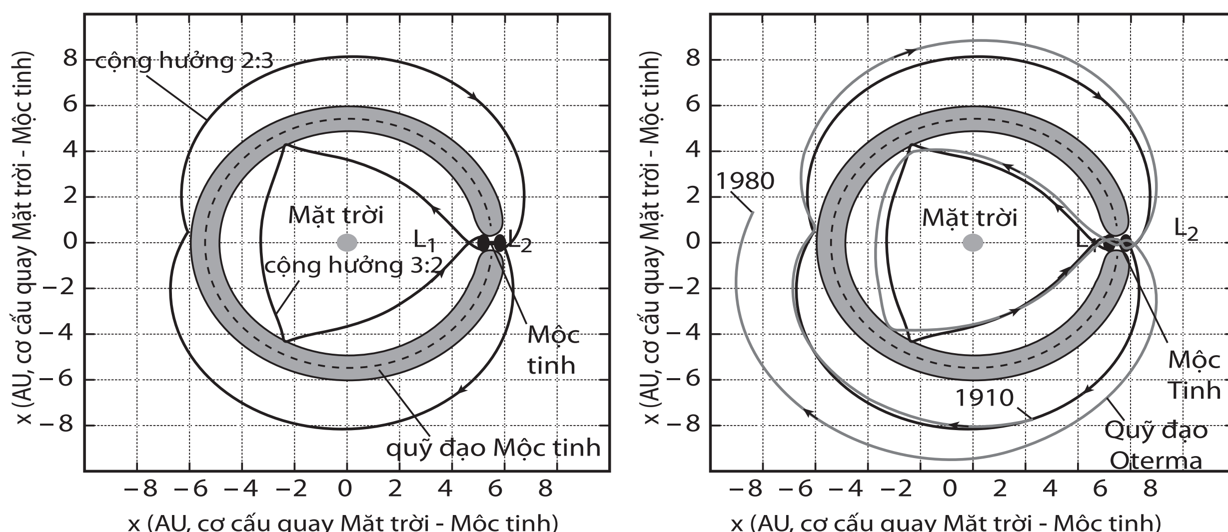
Mặc dù chúng ta chưa thấy lỗ sâu đục hay người ngoài hành tinh tới từ chiều thứ tư, nhưng người ta đã khám phá ra rằng các hành tinh và các mặt trăng của chúng trong Hệ Mặt Trời bị ràng buộc với nhau bởi mạng lưới các ống mà định nghĩa toán học của chúng đòi hỏi phải có số chiều nhiều hơn bốn. Các ống này cung cấp những con đường hiệu quả về

năng lượng từ thế giới này tới thế giới khác. Chúng chỉ được nhìn thấy qua con mắt toán học, bởi vì chúng không tạo thành từ vật chất: các bức tường của chúng là các mức năng lượng. Nếu chúng ta có thể hiển thị phong cảnh luôn thay đổi của trường hấp dẫn điều khiển chuyển động của các hành tinh, chúng ta có thể nhìn thấy được các ống, uốn lượn cùng với các hành tinh khi chúng quay quanh Mặt Trời.

Các ống đã giải thích được một số vấn đề nan giải của động lực học quỹ đạo. Chẳng hạn, hãy xét sao chổi tên Oterma. Một thế kỷ trước, quỹ đạo của Oterma nằm xa bên ngoài quỹ đạo của Mộc tinh. Nhưng sau một lần đến gần hành tinh khổng lồ này, quỹ đạo của nó dịch vào bên trong quỹ đạo của Mộc tinh. Sau một lần chạm trán khác, quỹ đạo của Oterma lại trở ra bên ngoài. Chúng ta có thể tự tin dự đoán rằng Oterma sẽ tiếp tục chuyển đổi quỹ đạo theo cách này mỗi vài thập kỷ: không phải bởi vì nó phá vỡ các định luật của Newton, mà là bởi vì nó tuân thủ chúng.

Điều này khác xa với các ellip có trật tự. Những quỹ đạo được tiên đoán theo định luật hấp dẫn của Newton là ellip chỉ khi không có vật nào khác có lực hấp dẫn đáng kể. Nhưng Hệ Mặt Trời có rất nhiều những vật như thế và chúng có thể tạo ra sự khác biệt rất lớn và đầy ngạc nhiên. Đây chính là chỗ mà các ống bước vào câu chuyện. Quỹ đạo của Oterma nằm bên trong hai ống và hai ống này gặp nhau ở gần Mộc tinh. Một ống nằm phía trong quỹ đạo của Mộc tinh, còn ống kia lại nằm bên ngoài. Chúng bao gồm những quỹ đạo đặc biệt cộng hưởng theo tỉ lệ 3:2 và 2:3 với Mộc tinh, nghĩa là một vật trong quỹ đạo như vậy sẽ quay quanh Mặt Trời ba lần sau mỗi hai vòng quay của Mộc tinh, hay hai lần cho mỗi ba vòng. Ở chỗ nối của các ống gần Mộc tinh, sao chổi có thể chuyển ống

hoặc không tùy thuộc vào những ảnh hưởng khá tinh tế của lực hấp dẫn từ Mộc tinh và Mặt Trời. Nhưng mỗi lần ở bên trong một ống, Oterma bị mắc kẹt ở đó cho đến khi ống trở lại chỗ nối. Giống như tàu hỏa phải ở trên đường ray, nhưng có thể chuyển sang đường ray khác nếu ai đó bẻ ghi, Oterma cũng vậy, nó có mức độ tự do nhất định trong việc thay đổi hành trình của mình, nhưng không nhiều (xem hình 15).



Hình 15 *Trái*: Hai quỹ đạo tuần hoàn cộng hưởng theo tỉ lệ 2:3 và 3:2 với Mộc tinh kết nối qua điểm Lagrange. *Phải*: Quỹ đạo thực của Oterma, từ 1910-1980.

Các ống và những điểm nối của chúng có vẻ khá bí hiểm, nhưng chúng là những đặc điểm tự nhiên và quan trọng của "địa lý hấp dẫn" của Hệ Mặt Trời. Những người xây dựng đường sắt thời Victoria hiểu rõ sự cần thiết phải lợi dụng các đặc điểm tự nhiên của cảnh quan, khi cho đường sắt chạy qua các thung lũng và dọc theo đường vòng, rồi đào các đường hầm xuyên qua núi thay vì đưa tàu đi qua đỉnh. Một lý do là tàu sẽ trượt nhanh theo dốc, nhưng vấn đề chính ở đây là năng lượng. Trèo lên một quả đồi, chống lại trọng lực, phải tiêu tốn năng lượng thể hiện ở chỗ lượng nhiên liệu tiêu thụ sẽ tăng, tức là tốn kém tiền bạc.

Du hành giữa các hành tinh cũng giống như vậy. Hãy tưởng tượng một con tàu vũ trụ chuyển động qua không gian. Điểm tới tiếp theo không chỉ phụ thuộc vào vị trí hiện tại của nó, mà còn phụ thuộc vào việc nó chuyển động nhanh chậm thế nào và theo hướng nào. Cần tới ba con số (tọa độ) để xác định vị trí của tàu vũ trụ, ví dụ, hướng của nó từ Trái Đất đòi hỏi hai số (các nhà thiên văn sử dụng độ xích kinh và độ xích vĩ, tương tự như kinh độ và vĩ độ trên thiên cầu, mặt cầu biểu kiến tạo bởi bầu trời đêm), và một số là khoảng cách của nó tới Trái Đất. Cần thêm ba số nữa để xác định vận tốc của nó theo ba hướng ấy. Như vậy, con tàu vũ trụ di chuyển qua một không gian toán học có sáu chiều chứ không phải là hai.

Cảnh quan tự nhiên thì thường không phẳng: nó có đồi núi và thung lũng. Cần có năng lượng để leo lên một ngọn đồi, nhưng đoàn tàu có thể thu lại năng lượng khi đi xuống một thung lũng. Thực tế, ở đây có hai loại năng lượng tham gia. Độ cao so với mực nước biển xác định thế năng của đoàn tàu, thể hiện ở công thực hiện để chống lại trọng lực. Bạn càng đi lên cao, thế năng của bạn càng lớn. Loại thứ hai là động năng, tương ứng với tốc độ. Bạn càng đi nhanh, động năng của bạn càng lớn. Khi con tàu đi xuống một thung lũng, và tăng tốc, nó chuyển đổi thế năng thành động năng. Khi nó leo lên đồi và giảm tốc, việc trao đổi xảy ra theo chiều ngược lại. Tổng năng lượng là hằng số, do vậy đường đi của tàu cũng tương tự như một đường đồng mức trong “cảnh quan” năng lượng. Tuy nhiên, con tàu có nguồn năng lượng thứ ba: than, dầu diezen, hay điện. Nhờ tiêu thụ nhiên liệu một con tàu có thể bò lên theo đường dốc nhất hay tăng tốc, giải phóng mình khỏi quỹ đạo chạy tự do theo tự nhiên. Tổng năng lượng vẫn không thay đổi nhưng tất cả có thể chuyển đổi được.

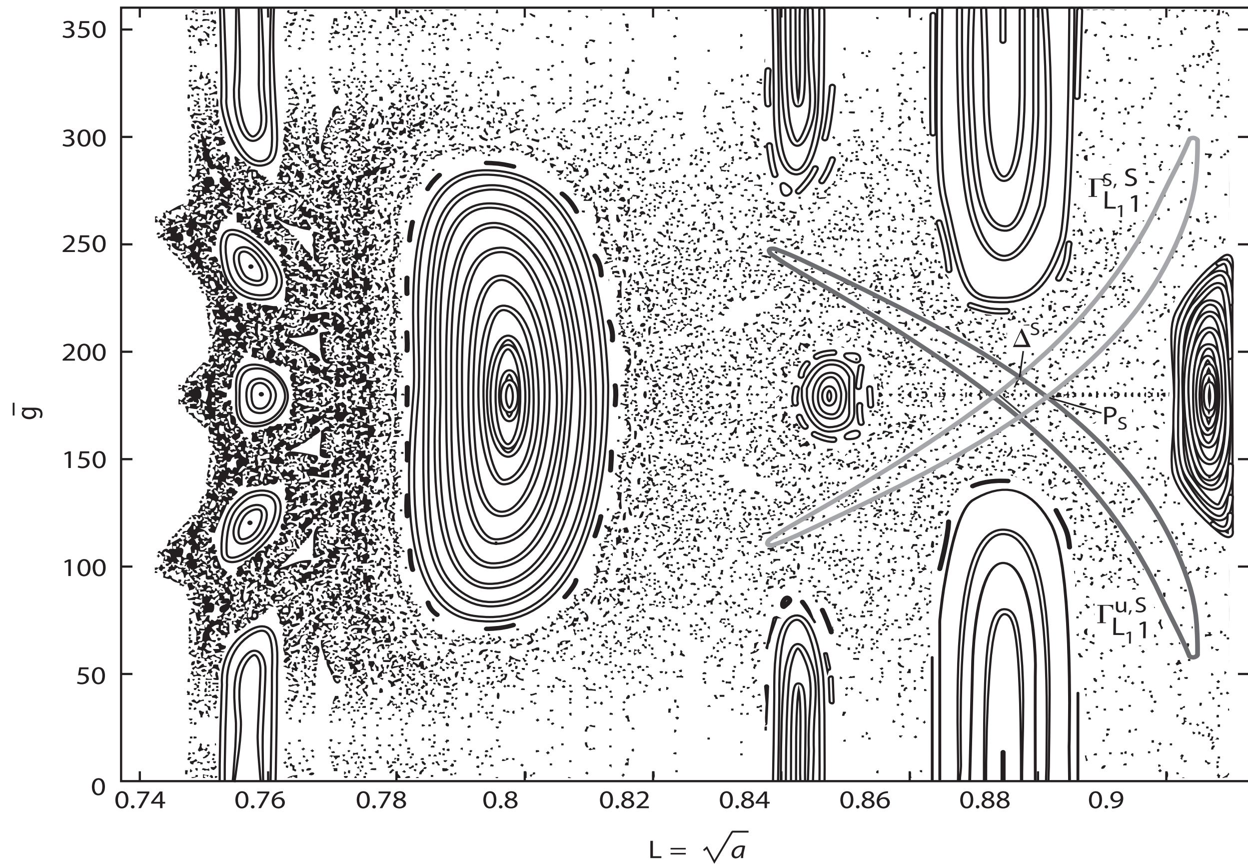
Tàu vũ trụ cũng rất giống vậy. Trường hấp dẫn tổng hợp của Mặt Trời, các hành tinh và các thiên thể khác trong Hệ Mặt Trời cung cấp thế năng. Tốc độ của tàu vũ trụ tương ứng với động năng. Và động lực của nó – lấy từ nhiên liệu của tên lửa, các ion, hay áp suất ánh sáng – thêm vào một nguồn năng lượng nữa, có thể tắt mở tùy ý. Đường đi của tàu vũ trụ là một loại đường đồng mức trong "cảnh quan" năng lượng tương ứng, và dọc theo đường này tổng năng lượng vẫn là hằng số. Và một số loại đường đồng mức này được bao quanh bởi các ống, tương ứng với các mức năng lượng gần đó.

Các kỹ sư đường sắt thời Victoria cũng đã ý thức được rằng bề mặt Trái Đất có những điểm đặc biệt: đỉnh núi, thung lũng và các hẻm núi – những thứ có ảnh hưởng lớn đến những lộ trình hiệu quả đối với đường sắt, bởi vì chúng cấu thành một dạng khung xương cho hình học tổng thể của các đường đồng mức. Ví dụ, gần một đỉnh núi hay đáy một thung lũng, đường đồng mức tạo thành một đường cong kín. Ở đỉnh núi, thế năng đạt giá trị cực đại địa phương; dưới thung lũng, nó đạt giá trị cực tiểu địa phương. Các hẻm núi tổng hợp các đặc điểm của cả hai thứ, đạt cực đại theo một hướng, cực tiểu theo hướng khác. Tương tự, cảnh quan năng lượng của Hệ Mặt Trời cũng có những điểm đặc biệt. Hiển nhiên nhất chính là các hành tinh và mặt trăng của chúng, chúng nằm ở đáy của hố thế hấp dẫn, giống như các thung lũng vậy. Quan trọng không kém, nhưng khó thấy hơn, là các đỉnh và các khe của cảnh quan năng lượng. Tất cả các đặc điểm này tổ chức nên hình học tổng thể và cùng với nó là các ống.

Cảnh quan năng lượng có các đặc điểm hấp dẫn khác đối với khách tham quan, đáng chú ý là các điểm Lagrange. Hãy

tưởng tượng một hệ chỉ bao gồm Trái Đất và Mặt Trăng. Năm 1772, Joseph-Louis Lagrange đã khám phá ra rằng ở thời điểm bất kỳ, có đúng năm vị trí mà ở đó trường hấp dẫn của hai thiên thể đó, cùng với lực ly tâm, triệt tiêu nhau hoàn toàn. Ba trong số đó nằm thẳng hàng với Trái Đất và Mặt Trăng – điểm L1 giữa chúng, điểm L2 ở phía bên kia của Mặt Trăng và điểm L3 ở phía bên kia của Trái Đất. Nhà toán học Thụy Sĩ, Leonhard Euler cũng đã khám phá ra các điểm này vào khoảng năm 1750. Hai điểm còn lại là L4 và L5, được biết đến dưới cái tên các điểm Trojan, nằm cùng quỹ đạo với Mặt Trăng nhưng vượt lên trước hoặc lùi lại sau 60 độ. Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, các điểm Lagrange cũng quay theo. Các cặp thiên thể khác cũng có các điểm Lagrange là Trái Đất/Mặt Trời, Mộc tinh/Mặt Trời, vệ tinh Titan/Thổ tinh.

Quỹ đạo chuyển Hohmann kiểu cũ được xây dựng từ các đoạn của đường tròn và ellip, đó là những quỹ đạo tự nhiên của các hệ hai vật. Các đường đi mới dựa trên ống được xây dựng từ các đoạn quỹ đạo tự nhiên của hệ ba vật, ví dụ như hệ Mặt Trời/Trái Đất/tàu vũ trụ. Ở đây các điểm Lagrange đóng một vai trò đặc biệt, giống các đỉnh núi và hẻm núi đối với đường sắt: nó là điểm nối mà ở đó các ống gặp nhau. L1 là vị trí tuyệt vời để tạo ra một sự thay đổi nhỏ về hành trình, bởi vì động lực học tự nhiên của một con tàu vũ trụ ở gần L1 là hỗn độn (xem hình 16). Hỗn độn là một đặc điểm hữu dụng (xem chương 16): một sự thay đổi nhỏ về vị trí hay vận tốc có thể gây ra những ảnh hưởng lớn tới quỹ đạo. Do vậy có thể dễ dàng chuyển tàu vũ trụ sang một trạng thái tiết kiệm năng lượng hơn, mặc dù có thể chậm chạp.



Hình 16 Hỗn độn ở gần Mộc tinh. Giản đồ này biểu diễn tiết diện ngang của các quỹ đạo. Các đường khép kín lồng trong nhau là các quỹ đạo tuần hoàn và các vùng chấm chấm còn lại là quỹ đạo hỗn độn. Hai vòng kín mảnh cắt ngang nhau ở bên phải là tiết diện của các ống.

Người đầu tiên xem xét ý tưởng này một cách nghiêm túc là nhà toán học sinh tại Đức, Edward Belbruno, một nhà phân tích quỹ đạo ở Phòng thí nghiệm tên lửa đẩy từ năm 1985 đến năm 1990. Ông nhận ra rằng động lực học hỗn độn trong bài toán nhiều vật mang lại cơ hội cho những quỹ đạo chuyển năng lượng thấp, và ông gọi tên kỹ thuật này là lý thuyết biên mờ. Năm 1991, ông đưa những ý tưởng của mình vào thực hành. Hiten, một con tàu thăm dò của Nhật Bản, đã vẽ bản đồ Mặt Trăng và đã hoàn thành nhiệm vụ được giao, rồi trở về quay quanh Trái Đất. Belbruno đã thiết kế một quỹ đạo mới để đưa nó trở lại Mặt Trăng mặc dù tiêu tốn khá nhiều nhiên liệu. Sau khi tiếp cận Mặt Trăng như đã được

định trước, Hiten ghé qua các điểm L4 và L5 để tìm kiếm các bụi vũ trụ có thể bị bẫy ở đó.

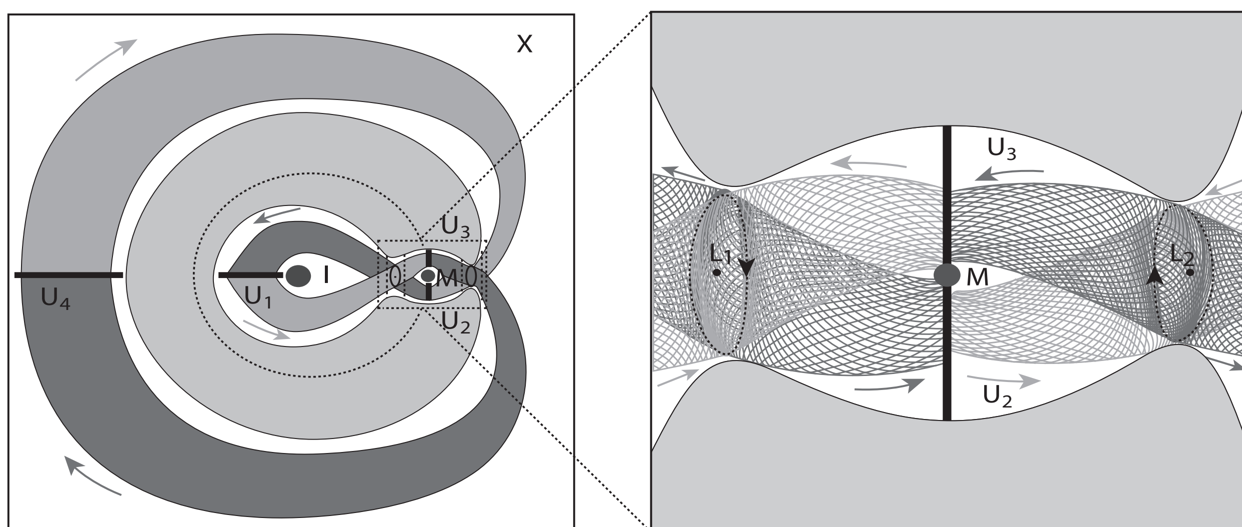
Một kỹ thuật tương tự đã được sử dụng vào năm 1985 để định hướng lại con tàu ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer) gần như đã bị mất tác dụng để nó tới gặp sao chổi Giacobini-Zinner, và nó lại được sử dụng lần nữa cho chuyến bay Genesis của NASA với mục đích mang về các mẫu của gió mặt trời. Các nhà toán học và các kỹ sư muốn thực hiện lại kỹ thuật này và tìm kiếm các kỹ thuật khác cùng loại, nhằm tìm hiểu xem cái gì đã khiến cho kỹ thuật này thành công? Hóa ra lại là các ống.

Ý tưởng nền tảng rất đơn giản nhưng thông minh. Các vị trí đặc biệt đó trong cảnh quan năng lượng giống như các hẻm núi tạo ra các cổ chai mà những nhà du hành tương lai không thể dễ dàng tránh được. Con người cổ đại đã phát hiện ra, một cách vô cùng vất vả, rằng mặc dù phải mất năng lượng để vượt qua một hẻm núi, nhưng sẽ mất nhiều năng lượng hơn nếu đi theo đường khác, trừ phi bạn có thể đi vòng qua núi theo một hướng hoàn toàn khác. Hẻm núi là một lựa chọn tồi, nhưng thà chấp nhận thế còn hơn.

Trong cảnh quan năng lượng, những thứ tương tự của hẻm núi bao gồm cả các điểm Lagrange. Gắn liền với chúng là những con đường đi vào rất cụ thể, cũng giống như con đường hiệu quả nhất để leo lên một hẻm núi. Và cũng có các con đường đi ra cụ thể không kém, tương tự như các con đường tự nhiên đi xuống hẻm núi. Để đi theo các con đường đi vào và đi ra đó một cách chính xác, bạn phải đi với tốc độ chuẩn xác, nhưng nếu tốc độ của bạn khác đi một chút, bạn vẫn có thể ở gần những con đường đó. Vào cuối thập niên 60,

hai nhà toán học Mỹ là Charles Conley và Richard McGehee đã tiếp nối công trình tiên phong của Belbruno, họ đã chỉ ra rằng mỗi con đường như thế đều được bao quanh bởi một tập hợp các ống lồng vào nhau, cái này trong cái kia. Mỗi ống ứng với một lựa chọn tốc độ cụ thể; càng khác vận tốc tối ưu thì ống càng rộng. Trên bề mặt của một ống bất kỳ cho trước, tổng năng lượng là hằng số, nhưng hằng số này khác nhau từ ống này sang ống khác. Cũng giống như một đường đồng mức ở một độ cao nhất định, nhưng độ cao này là khác nhau đối với mỗi đường khác nhau.

Cách lập kế hoạch cho một chuyến bay hiệu quả, đó là tìm ra ống nào thích hợp với sự lựa chọn điểm đến của bạn. Khi đó bạn điều chỉnh tàu vũ trụ của bạn đi theo bên trong của ống đi vào đầu tiên, và khi nó đến điểm Lagrange gắn với ống, bạn nhanh tay bật động cơ để định hướng nó dọc theo một ống đi ra thích hợp nhất (xem hình 17). Ống này sẽ tiến một cách tự nhiên vào một ống đi vào tương ứng của điểm chuyển tiếp sau, và cứ như thế.



Hình 17 *Trái*: Các ống gặp nhau ở gần Mộc tinh. *Phải:* Cận cảnh của vùng các ống nối với nhau.

Các kế hoạch cho những chuyến bay theo ống trong tương lai thực ra cũng đã được vạch ra. Năm 2000, Wang San Koon, Martin Lo, Jerrold Marsden và Shane Ross đã sử dụng kỹ thuật ống để tìm hành trình của các mặt trăng của Mộc tinh, kết thúc với quỹ đạo quanh mặt trăng Europa, một kỹ thuật rất khôn ngoan so với các phương pháp trước đó. Con đường này bao gồm sự tăng tốc nhờ hấp dẫn ở gần mặt trăng Ganymede, tiếp sau là một hành trình theo ống tới Europa. Một lộ trình phức tạp hơn, thậm chí đòi hỏi ít năng lượng hơn, bao gồm cả mặt trăng Callisto nữa. Nó sử dụng một đặc điểm khác của cảnh quan năng lượng, đó là sự cộng hưởng. Những điều này xảy ra, chẳng hạn khi hai mặt trăng cùng trở lại các vị trí tương đối, nhưng một trong số đó quay trọn hai lần quanh Mộc tinh, trong khi mặt trăng kia quay trọn ba lần. Bất kỳ các số nguyên nhỏ nào cũng có thể thay thế cho 2 và 3 ở đây. Lộ trình này sử dụng động lực học năm vật: Mộc tinh, ba mặt trăng của nó và tàu vũ trụ.

Năm 2005, Michael Dellnitz, Oliver Junge, Marcus Post và Bianca Thiere đã sử dụng các ống để lập kế hoạch cho một chuyến bay tiết kiệm năng lượng từ Trái Đất lên Kim tinh. Ống chính ở đây liên kết điểm L1 của hệ Mặt Trời/Trái Đất tới điểm L2 của hệ Mặt Trời/Kim tinh. Để so sánh, cần biết rằng chuyến bay này chỉ sử dụng một phần ba năng lượng đòi hỏi bởi chuyến bay của Venus Express thuộc Hãng hàng không vũ trụ châu Âu, bởi vì nó có thể sử dụng động cơ đẩy chậm, giá phải trả là sự kéo dài thời gian đi từ 150 ngày tới gần 650 ngày.

Ảnh hưởng của các ống có thể còn tiến xa hơn. Trong một công trình chưa công bố, Dellnitz đã khám phá ra bằng chứng

về một hệ tự nhiên các ống liên kết Mộc tinh với nhóm hành tinh trong (Thủy tinh, Kim tinh, Địa cầu, Hỏa tinh). Cấu trúc đặc biệt này, ngày nay gọi là Đường siêu cao tốc liên hành tinh, gợi ý rằng Mộc tinh, vốn được biết đến từ lâu là hành tinh lớn nhất của Hệ Mặt Trời, cũng đóng vai trò là Nhà ga trung tâm lớn trên trời. Các ống của nó rất có thể đã tổ chức nên sự hình thành của toàn bộ Hệ Mặt Trời, xác định khoảng cách giữa nhóm các hành tinh trong.

Thế nhưng tại sao các ống lại không được phát hiện ra sớm hơn? Cho đến rất gần đây, hai thứ có tầm quan trọng sống còn vẫn chưa được tìm ra. Một là hệ máy tính cực mạnh, có thể thực hiện được các tính toán cần thiết của bài toán nhiều vật. Những tính toán đó hết sức cồng kềnh và nặng nề nếu tính toán bằng tay. Nhưng thứ khác, còn quan trọng hơn, đó là sự hiểu biết sâu sắc về toán học của địa lý cảnh quan năng lượng. Không có chiến thắng giàu tưởng tượng của các phương pháp toán học hiện đại thì chẳng có gì để các máy tính tính cả. Và không có định luật về hấp dẫn của Newton, thì các phương pháp toán học cũng không bao giờ được nghĩ ra.

5 Điềm báo của thế giới các ý niệm

Căn bậc hai của âm một

bình phương

âm một

Số ảo

$$i^2 = -1$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nghe thì có vẻ như không thể xảy ra, nhưng bình phương của i bằng âm một.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó dẫn tới sự hình thành số phức, và sau này là giải tích phức, một trong những lĩnh vực nghiên cứu mạnh nhất của toán học.

Nó đã dẫn tới những gì?

Cải thiện phương pháp để tính các bảng lượng giác. Tổng quát hóa hầu như toàn bộ toán học sang địa hạt phức. Cung cấp các phương pháp mạnh hơn để tìm hiểu các sóng, nhiệt, điện và từ. Là cơ sở toán học của cơ học lượng tử.

Nước Ý thời Phục Hưng là lò lửa của chính trị và bạo lực. Phía bắc của đất nước này bị kiểm soát bởi cả tá các thành bang chiến tranh, bao gồm cả Milan, Florence, Pisa, Genoa, và Venice. Ở phía nam, Guelphs và Gibellines cũng nổ ra xung đột khi các Giáo hoàng và các Hoàng đế La Mã thần thánh giao chiến tranh giành quyền lực tối thượng. Các toán quân đánh thuê lang thang khắp các vùng đất, làng quê bị tàn phá tan hoang, các thành phố ven biển thì tiến hành các cuộc thủy chiến với nhau. Năm 1454, Milan, Naples và Florence ký Hiệp ước Lodi, và hòa bình đã ngự trị trong bốn thập kỷ sau đó, nhưng chế độ giáo hoàng vẫn còn rất rối rắm trong hệ thống chính trị thối nát. Đó là thời kỳ của gia tộc Borgia, khét tiếng vì sẵn sàng đầu độc bất kỳ ai nghi ngờ sức mạnh chính trị và tôn giáo của họ, nhưng đó cũng là thời kỳ của Leonardo da Vinci, Brunelleschi, Piero della Francesca, Titian và Tintoretto. Trái với không khí âm mưu và giết chóc, những giả thuyết được kìm giữ từ lâu đã lại được đem ra thảo luận. Nghệ thuật và khoa học phát triển mạnh mẽ trong sự cộng sinh, cái này nuôi dưỡng cái kia.

Toán học cũng rất phát triển. Năm 1545, một học giả cờ bạc là Girolamo Cardano đã viết một cuốn sách đại số, và ông đã bắt gặp một loại số mới, rất kỳ lạ đến mức ông đã tuyên bố “nó huyền ảo cũng như vô dụng” và vứt bỏ khái niệm này. Rafael Bombelli đã nắm vững cuốn sách đại số

của Cardano, nhưng ông cho rằng nó được trình bày khá rối rắm, và nghĩ rằng ông có thể viết tốt hơn. Năm 1572, ông đã nhận thấy một điều khá hấp dẫn: mặc dù các số mới kỳ lạ này vô nghĩa, nhưng chúng có thể được sử dụng trong các tính toán đại số, và nhận được các kết quả rõ ràng là chính xác.

Trong nhiều thế kỷ, các nhà toán học đã vướng vào mối quan hệ yêu-ghét với các "số ảo" này, cái tên mà ngày nay người ta vẫn còn gọi. Bản thân tên gọi này đã bộc lộ thái độ lưỡng lự: chúng không phải là các số *thực*, những con số thông thường mà chúng ta gặp trong số học, nhưng trong hầu hết các khía cạnh thì chúng cũng hành xử giống số thực. Điểm khác biệt lớn nhất là khi bạn bình phương một số ảo, kết quả sẽ là một số âm. Nhưng điều này hẳn là không thể, vì các bình phương luôn dương.

Mãi tới thế kỷ 18 các nhà toán học mới thực sự hiểu ra số ảo là gì, dù vậy cũng phải đến thế kỷ 19 thì họ mới cảm thấy thoải mái với chúng. Nhưng rồi theo thời gian, địa vị về mặt logic của số ảo hoàn toàn sánh ngang với địa vị của các số thực truyền thống, rồi các số ảo đã trở nên không thể thay thế được trong toàn bộ toán học lẫn khoa học, và câu hỏi về ý nghĩa của chúng dường như không còn hấp dẫn nữa. Cuối thế kỷ 19 đầu thế kỷ 20, mối quan tâm về cơ sở của toán học đã hồi sinh dẫn tới việc phải cân nhắc lại về khái niệm số, và các số "thực" truyền thống không còn được coi là thực hơn các số ảo nữa. Về phương diện logic, hai loại số này có địa vị như nhau. Cả hai đều là sản phẩm của trí tuệ con người và cả hai đều biểu diễn – nhưng không đồng nhất – những khía cạnh của tự nhiên. Tuy nhiên, chúng biểu diễn

thực tại theo những cách khác nhau và trong những bối cảnh khác nhau.

Vào nửa sau của thế kỷ 20, các số ảo đã trở thành một phần của hộp các công cụ trí tuệ của tất cả các nhà toán học và khoa học. Chúng đã được gắn chặt với cơ học lượng tử theo một cách căn bản tới mức bạn không thể làm vật lý mà không có chúng, cũng như bạn không thể leo lên mặt bắc của đỉnh Eiger mà không có dây thừng. Ngay cả như vậy, các số ảo cũng rất hiếm khi được dạy ở phổ thông. Các phép cộng khá dễ, nhưng sự phức tạp và tinh vi về mặt trí tuệ cần thiết để đánh giá đúng việc các số ảo đáng để học thì vẫn là quá khó đối với hầu hết sinh viên. Rất ít người, ngay cả những người có học thức, nhận biết được xã hội của họ phụ thuộc sâu sắc đến mức nào vào các con số không biểu thị chiều dài, diện tích, hay lượng tiền bạc. Nhưng hầu hết công nghệ hiện đại, từ ánh sáng điện tới các camera kỹ thuật số, sẽ không xuất hiện nếu không có các số ảo.

Ta hãy quay trở lại một câu hỏi quan trọng. *Tại sao* các bình phương lại luôn dương?

Vào thời kỳ Phục Hưng, khi các phương trình nhìn chung được sắp xếp lại để các số trong chúng đều dương, thì người ta không đặt ra một câu hỏi như thế. Họ sẽ nói rằng nếu cộng thêm một số vào một bình phương, bạn sẽ thu được một số lớn hơn, chứ không thể nhận được số 0. Nhưng ngay cả khi bạn chấp nhận các số âm, như chúng ta hiện nay, thì các bình phương vẫn phải là số dương. Và đây là lý do.

Các số thực có thể âm hoặc dương. Tuy nhiên, bình phương của bất kỳ số thực nào, bất kể mang dấu gì, đều luôn

là dương, bởi vì tích của hai số âm là một số dương. Chẳng hạn, cả 3×3 và -3×-3 đều cho cùng kết quả là 9. Như vậy căn bậc hai của 9 nhận hai giá trị là 3 và -3.

Thế còn -9 thì sao? Căn bậc hai của nó bằng bao nhiêu?

Nó không có căn bậc hai nào cả.

Điều này quả là rất không công bằng: mỗi số dương có tới hai căn bậc hai, nhưng số âm thì không có gì cả. Nếu thay đổi quy tắc nhân hai số âm để có, chẳng hạn -3×-3 = -9 thì sẽ thật hấp dẫn. Khi đó, mỗi số dương và mỗi số âm đều có một căn bậc hai; hơn nữa lại cùng dấu với bình phương của nó, nghe ra có vẻ thật rành mạch và gọn gàng. Nhưng lối lập luận đầy cám dỗ này có một bất lợi: nó làm hỏng các quy tắc thông thường của số học. Vấn đề ở đây là -9, thực ra đã bằng 3×-3 như một hệ quả của phép nhân thông thường, và là một thực tế mà mọi người đều vui vẻ chấp nhận. Nếu ta cứ khăng khăng rằng -3×-3 cũng bằng -9, thì -3×-3 = 3×-3. Có vài cách để thấy ngay đẳng thức này có vấn đề; cách đơn giản nhất là chia cả hai vế cho -3, ta sẽ thu được 3 = -3.

Dĩ nhiên bạn có thể thay đổi các quy tắc của số học. Nhưng bấy giờ mọi thứ sẽ trở nên phức tạp và lộn xộn. Một giải pháp sáng tạo hơn là giữ nguyên các quy tắc của số học, và mở rộng hệ thống số thực bằng cách thừa nhận các số ảo. Một điều đáng chú ý và không một ai tiên đoán được, miễn là bạn cần đảm bảo triệt để tính logic – đó là bước đột phá dũng cảm này đã dẫn tới một hệ thống nhất quán đẹp đẽ của các số, với vô số các ứng dụng. Bây giờ tất cả các số, ngoại trừ 0, có *hai* căn bậc hai, số này là âm của số kia. Điều này vẫn đúng cho các số mới; hệ thống các số chỉ cần mở rộng một lần là đủ. Phải mất một khoảng thời gian thì các suy luận

trên đây mới trở nên rõ ràng, nhưng hồi tưởng lại, có vẻ như đây là điều không tránh khỏi. Các số ảo, mặc dù là bất khả, nhưng không thể rũ bỏ được. Chúng có vẻ vô nghĩa, nhưng chúng vẫn nảy ra trong các tính toán. Đôi khi, việc sử dụng các số ảo làm cho những tính toán trở nên đơn giản hơn, kết quả dễ hiểu hơn và thỏa đáng hơn. Mỗi khi nhận được một câu trả lời nhờ dùng các số ảo, nhưng không hề chứa chúng một cách tường minh và có thể kiểm tra được một cách độc lập, thì hóa ra lại là kết quả chính xác. Nhưng khi đáp số có bao gồm các số ảo một cách tường minh thì nó lại có vẻ như là vô nghĩa, và thông thường thì mâu thuẫn về mặt logic. Bí ẩn này âm ỉ trong suốt hai trăm năm, và cuối cùng kết quả là một sự bùng nổ.

Cardano được biết đến như một học giả cờ bạc vì cả hai hoạt động này đóng vai trò nổi bật trong cuộc đời ông. Ông vừa là một thiên tài vừa là một kẻ lừa đảo. Cuộc đời ông là một chuỗi những rắc rối, cao thì rất cao mà thấp thì cũng rất thấp. Mẹ ông đã tìm cách phá thai khi mang thai ông, con trai ông bị chặt đầu vì giết vợ nó, và ông đã đánh bạc đến sạt nghiệp. Ông bị buộc tội là dị giáo vì đã lấy số tử vi của Chúa Jesus. Tuy nhiên, trong khi ấy, ông cũng đã trở thành hiệu trưởng trường Đại học Padua, được nhận vào trường College of Physicians – trường đào tạo bác sĩ – ở Milan, ông cũng là người được nhận 2000 cuaron vàng vì đã điều trị khỏi bệnh hen cho Tổng giám mục xứ Andrew, và nhận lương hưu từ giáo hoàng Gregory XIII. Ông đã sáng chế ra khóa tổ hợp và khớp vạn năng cho con quay hồi chuyển, ông cũng viết nhiều sách, trong đó có cuốn tiểu sử tự thuật tuyệt vời *Cuốn sách của đời tôi* (*De Vita Propria*). Cuốn sách có liên

quan đến câu chuyện của chúng ta là *Ars Magna* xuất bản năm 1545. Nhan đề của cuốn sách có nghĩa là "nghệ thuật vĩ đại" và nó giới thiệu về đại số. Trong cuốn sách này, Cardano đã tập hợp các ý tưởng tiên tiến nhất về đại số ở thời đó, bao gồm các phương pháp mới và đầy kịch tính để giải các phương trình, một số do một sinh viên của ông khám phá ra, một số thu được từ những người khác trong những hoàn cảnh gây tranh cãi.

Đại số, theo nghĩa quen thuộc của nó trong toán học ở trường phổ thông, là một hệ thống biểu diễn các con số bằng các ký hiệu, có nguồn gốc từ thời Diophantus, khoảng năm 250 TCN. Trong cuốn *Số học (Arithmetica)* của mình, Diophantus đã sử dụng các ký hiệu để mô tả các cách giải phương trình. Hầu như cả cuốn sách đều bằng lời, chẳng hạn như, "tìm hai số mà tổng bằng 10 và tích bằng 24". Nhưng Diophantus đã tổng kết các phương pháp mà ông sử dụng để tìm nghiệm (ở đây là 4 và 6) theo ký hiệu. Các ký hiệu này (xem Bảng 1) rất khác so với các ký hiệu mà chúng ta sử dụng ngày nay, và hầu hết là viết tắt, nhưng đây là điểm khởi đầu. Cardano chủ yếu dùng các từ, với một ít các ký hiệu cho căn thức, và lại một lần nữa các ký hiệu này không giống với các ký hiệu chúng ta dùng hiện nay. Các tác giả sau này đã hướng dẫn tới hệ thống ký hiệu hiện nay, mà hầu hết đã được Euler chuẩn hóa trong các cuốn sách giáo khoa của ông. Tuy nhiên Gauss vẫn tiếp tục sử dụng xx thay vì x^2 mãi cho tới năm 1800.

Niên đại	**Tác giả**	**Ký hiệu**
250	Diophantus	
825	Al-khowarizmi	*Lũy thừa hai cộng hai lần ẩn cộng ba*
1545	Cardano	*Bình phương cộng hai lần ẩn cộng ba*
1572	Bombelli	$3p . 2^{\smile} p . 1^{\smile 2}$
1585	Stevin	$3 + 2^{①} + 1^{②}$
1591	Viète	x quard. $+ x\ 2 + 3$
1637	Descartes, Gauss	$xx + 2x + 3$
1670	Bachet de Méziriac	$Q + 2N + 3$
1765	Euler, hiện đại	$x^2 + 2x + 3$

Bảng 1 Sự phát triển của các ký hiệu đại số.

Các chủ đề quan trọng nhất trong cuốn *Nghệ thuật vĩ đại* là các phương pháp mới để giải phương trình bậc ba và bậc bốn. Chúng cũng giống như phương trình bậc hai mà phần lớn chúng ta đã được học trong chương trình đại số ở trường phổ thông, nhưng phức tạp hơn. Một phương trình bậc hai biểu diễn mối liên hệ giữa một đại lượng chưa biết (ẩn số) thường được ký hiệu là x và bình phương của nó x^2. Bậc hai (*quadratic*) là một từ Latin chỉ "bình phương" (*square*). Một ví dụ tiêu biểu là

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Nó được mô tả bằng lời như sau: "Bình phương của ẩn số, trừ đi năm lần ẩn số, và cộng thêm sáu: kết quả thu được bằng không." Cho trước một phương trình một ẩn, nhiệm vụ của chúng ta là giải phương trình để tìm các giá trị ẩn số thỏa mãn phương trình ấy.

Đối với một giá trị được chọn ngẫu nhiên của x, phương trình này thường sẽ không đúng. Chẳng hạn, nếu ta lấy $x = 1$, khi đó $x^2 - 5x + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$, khác 0. Nhưng đối với một số lựa chọn hiếm hoi của x, phương trình là đúng. Ví dụ, khi $x = 2$ ta có $x^2 - 5x + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$. Nhưng đó không phải là nghiệm duy nhất! Khi $x = 3$, ta cũng có $x^2 - 5x + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$. Như vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 3$, và có thể chứng tỏ rằng phương trình này không còn nghiệm nào khác nữa. Một phương trình bậc hai có thể có hai nghiệm, một nghiệm, hoặc không có nghiệm (thực) nào. Chẳng hạn, phương trình $x^2 - 2x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$, và phương trình $x^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực nào.

Kiệt tác của Cardano giới thiệu các phương pháp để giải phương trình bậc ba, bao gồm lũy thừa bậc ba của biến, x^3, cùng với x^2 và x, và phương trình bậc bốn, với sự xuất hiện của x^4. Khi này đại số trở nên rất phức tạp; ngay cả với các ký hiệu hiện đại cũng phải cần tới một hoặc hai trang giấy mới đi đến nghiệm. Cardano đã không tiếp tục với các phương trình bậc năm, bao gồm x^5, bởi ông không biết cách giải chúng. Rất lâu sau này, người ta chứng minh được rằng các phương trình này không có nghiệm (theo kiểu như Cardano đã mong đợi): mặc dù giá trị bằng số của các nghiệm có thể tính được với độ chính xác rất cao trong bất cứ trường hợp cụ thể nào, nhưng không có *công thức* tổng quát cho các nghiệm, trừ phi bạn sáng chế ra một lớp ký hiệu mới đặc biệt cho nhiệm vụ này.

Tôi sẽ viết ra vài công thức đại số, bởi vì tôi nghĩ rằng chủ đề này sẽ mang nhiều ý nghĩa hơn nếu chúng ta không cố lảng tránh chúng. Bạn không cần phải theo dõi các chi tiết, nhưng tôi muốn chỉ cho bạn thấy mọi thứ trông thế nào. Sử dụng ký

hiệu hiện đại, chúng ta có thể viết ra công thức nghiệm của Cardano trong một trường hợp đặc biệt, $x^3 + ax + b = 0$ với a, b cố định. (Nếu có thêm số hạng với x^2, thì bằng một thủ thuật khéo léo ta có thể loại bỏ được nó, vì vậy trường hợp chọn ở đây thực sự đã bao quát được tất cả). Công thức nghiệm này như sau:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Hơi rối rắm một chút, nhưng cũng còn đơn giản hơn nhiều so với nhiều công thức đại số khác. Nó cho ta biết cách tính các nghiệm bằng cách tính bình phương của b và lập phương của a, cộng một vài phân số và lấy hai căn bậc hai (ký hiệu $\sqrt{}$) và hai căn bậc ba (ký hiệu $\sqrt[3]{}$). Căn bậc ba của một số là một số khác mà khi lập phương lên ta được số ban đầu.

Việc khám phá ra công thức nghiệm của phương trình bậc ba ít nhất có liên quan tới ba nhà toán học khác, mà một người trong số đó đã từng cay đắng phàn nàn rằng chính Cardano đã hứa sẽ không tiết lộ bí mật đó của ông. Câu chuyện này mặc dù rất lôi cuốn, nhưng quá phức tạp để kể lại ở đây[1]. Người giải được phương trình bậc bốn tổng quát là một học trò của Cardano tên là Lodovico Ferrari. Tôi sẽ miễn cho các bạn công thức thậm chí còn phức tạp hơn nhiều cho các phương trình bậc bốn.

Những kết quả được trình bày trong cuốn *Nghệ thuật vĩ đại* là một chiến thắng toán học, đỉnh cao của một câu chuyện đã kéo dài cả thiên niên kỷ. Người Babylon đã biết cách giải phương trình bậc hai vào khoảng năm 1500 TCN, mà cũng có thể còn sớm hơn nữa. Người Hy Lạp cổ đại và Omar Khayyam

đã biết sử dụng phương pháp hình học để giải phương trình bậc ba, nhưng lời giải đại số của phương trình bậc ba, chứ chưa nói tới bậc bốn, thì chưa hề có tiền lệ. Vậy là đùng một cái, toán học đã thực sự bỏ xa nguồn gốc cổ điển của nó.

Tuy vậy, vẫn có một trở ngại bất ngờ nho nhỏ. Cardano đã nhận thấy điều đó và một số người đã tìm cách giải thích; nhưng tất cả đều thất bại. Đôi khi, phương pháp vận hành hết sức tuyệt vời, nhưng lúc khác, công thức này lại bí ẩn như đền tiên tri Delphi vậy. Giả sử chúng ta áp dụng công thức Cardano cho phương trình $x^3 - 15x - 4 = 0$. Kết quả thu được là

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Tuy nhiên, -121 là một số âm, như vậy không thể khai căn nó được. Bí ẩn hơn nữa, phương trình này lại có một nghiệm rõ ràng $x = 4$, nhưng công thức lại không đưa ra được.

Ánh sáng hy vọng đã lóe lên vào năm 1572 khi Bombelli xuất bản cuốn *Đại số* (*L'Algebra*). Mục đích chính của ông là trình bày lại cuốn sách của Cardano bằng một ngôn ngữ trong sáng hơn, nhưng khi gặp vấn đề gai góc đặc biệt này, ông đã phát hiện ra vài điều mà Cardano đã bỏ quên. Nếu bạn lờ đi ý nghĩa của các ký hiệu và chỉ thực hiện các tính toán theo thủ tục thông thường, thì các quy tắc cơ bản của đại số chỉ ra rằng

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Do đó bạn có quyền viết:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Tương tự như vậy:

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Bây giờ công thức gây trở ngại cho Cardano có thể viết lại thành:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)$$

và bằng 4 bởi vì hai căn bậc hai rắc rối triệt tiêu nhau. Như vậy, các tính toán hình thức vô nghĩa của Bombelli đã *đưa ra đáp số đúng*. Và đó là một số thực hoàn toàn bình thường.

Giả sử cứ cho là căn bậc hai của số âm có nghĩa, ngay cả khi mặc dù chúng rõ ràng không như vậy, thì bằng cách nào đó, ta vẫn có thể thu được đáp số có nghĩa. Tại sao?

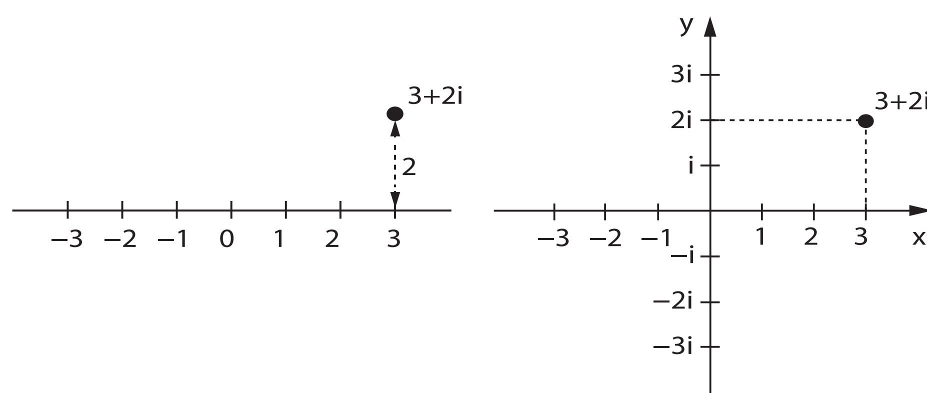
Để trả lời câu hỏi này, các nhà toán học đã phải phát triển những cách thức đúng đắn để nghĩ về căn bậc hai của các đại lượng âm, và thực hiện những tính toán với chúng. Những học giả trước đó, trong đó có Descartes và Newton, diễn giải rằng các số "ảo" là một dấu hiệu chỉ ra bài toán không có nghiệm. Nếu bạn muốn tìm một số mà bình phương của nó bằng với -1, thì lời giải hình thức "căn bậc hai của âm một" là ảo, và như vậy không tồn tại một nghiệm nào hết. Nhưng tính toán của Bombelli cho thấy có nhiều số ảo hơn thế. Chúng có thể được sử dụng để *tìm* các nghiệm; chúng có thể xuất hiện như một bộ phận của các tính toán tìm nghiệm, một nghiệm *thực sự* tồn tại.

Leibniz đã không có bất kỳ nghi ngờ nào về tầm quan trọng của các số ảo. Năm 1702 ông viết: "Linh hồn thần thánh đã tìm thấy một lối thoát tuyệt vời trong cái kỳ quan ấy của giải tích, cái điềm báo của thế giới các ý niệm, cái lưỡng cư giữa tồn tại và không tồn tại, cái mà chúng ta gọi là căn bậc hai ảo của một số âm". Nhưng sự hùng biện trong phát biểu của ông đã không thể che khuất được vấn

đề căn bản: ông không hề có manh mối nào cho biết các số ảo thực tế là gì.

Một trong những người đầu tiên nghĩ ra cách biểu diễn có ý nghĩa của số phức là Wallis. Hình ảnh các số thực nằm dọc trên một đường thẳng giống như các điểm được đánh dấu trên thước kẻ đã là chuyện cũ rích rồi. Năm 1673, Wallis đề xuất rằng một số phức $x + iy$ nên được coi là một điểm trong mặt phẳng. Kẻ một đường thẳng trong mặt phẳng và đồng nhất các điểm trên đường thẳng đó với các số thực theo cách thông thường. Sau đó, coi $x + iy$ như một điểm nằm về một phía của đường thẳng vừa vẽ, cách điểm x một khoảng bằng y.

Ý tưởng của Wallis hầu như chẳng được ai đếm xỉa tới, tồi tệ hơn, còn bị phê bình. François Daviet de Foncenex, khi viết về các số ảo năm 1758, đã cho rằng việc nghĩ về các số ảo như một đường thẳng vuông góc với đường thẳng thực là vô nghĩa. Nhưng cuối cùng ý tưởng đó cũng hồi sinh với một dạng tường minh hơn. Thực tế, chỉ vài năm sau đó, có ba người đã nghĩ ra cùng một phương pháp để biểu diễn các số phức, xem hình 18. Một nhân viên trắc đạc người Na Uy, một nhà toán học người Pháp và một nhà toán học người Đức. Đó lần lượt là Caspar Wessel, công bố năm 1797, Jean-Robert Argand năm 1806, và Gauss năm 1811. Về cơ bản họ đưa ra ý tưởng giống như Wallis, nhưng họ đã thêm vào đó một đường thẳng thứ hai, một trục ảo vuông góc với trục thực. Dọc theo trục thứ hai này là các số ảo i, 2i, 3i,... Một số phức bất kỳ, chẳng hạn như 3 + 2i, nằm trên mặt phẳng cách trục thực 2 đơn vị và cách trục ảo 3 đơn vị.



Hình 18 Mặt phẳng phức. *Trái*: theo Wallis. *Phải*: theo Wessel, Argand, và Gauss.

Dạng biểu diễn hình học này thực sự rất tốt, nhưng nó không giải thích được vì sao các số phức lập thành một hệ nhất quán về mặt logic. Nó không cho chúng ta biết chúng *là các số* theo nghĩa nào. Nó chỉ cung cấp cho chúng ta một cách để hiển thị các số phức. Nó không hề định nghĩa một số phức là gì ngoài việc kẻ một đường thẳng định nghĩa các số thực. Nó chỉ cung cấp một loại cột chống về mặt tâm lý, một mối liên kết hơi nhân tạo giữa những số ảo điên rồ và thế giới thực, không hơn.

Điều thuyết phục các nhà toán học rằng họ nên quan tâm một cách nghiêm túc đến các số ảo không phải là một mô tả logic chúng là gì. Một bằng chứng nổi trội là: dù các số ảo có là gì đi nữa, thì toán học vẫn có thể sử dụng chúng một cách có hiệu quả. Bạn đừng nên lục vấn những câu hỏi khó về nền tảng triết học của một ý tưởng khi bạn sử dụng nó hằng ngày để giải các bài toán và bạn thấy rằng nó luôn đưa ra các đáp số đúng. Tất nhiên, các câu hỏi về nền tảng vẫn nhận được sự quan tâm nhất định, nhưng trước các vấn đề thực tiễn sử dụng ý tưởng mới để giải các bài toán cũ cũng như mới thì chúng phải lùi lại phía sau.

Các số ảo, và hệ thống các số phức mà chúng sinh ra, đã có vị trí ngày càng quan trọng trong toán học khi một vài nhà tiên phong đã chuyển sự chú ý của họ sang giải tích phức: phép tính vi tích phân (chương 3) nhưng với các số phức thay vì các số thực. Bước đầu tiên là mở rộng các hàm thông thường – lũy thừa, logarit, các hàm mũ, và các hàm lượng giác cho số phức. Sin$z$ là gì với $z = x + iy$ là một số phức? e^z hay log$z$ là gì?

Về mặt logic, những thứ này có thể là bất kỳ cái gì ta muốn. Chúng ta đang hoạt động trong một địa hạt mới mà các ý tưởng cũ không áp dụng được nữa. Chúng không có nhiều ý nghĩa, chẳng hạn nếu ta nghĩ ra một tam giác vuông với các cạnh có độ dài phức, thì định nghĩa hình học của hàm sin sẽ không thích hợp. Chúng ta có thể khăng khăng rằng sin$z$ có giá trị thông thường khi z nhận giá trị thực, nhưng sẽ bằng 42 nếu z không phải là thực, và thế là xong. Nhưng đó là một định nghĩa khá ngớ ngẩn, không phải bởi vì nó không rõ ràng mà là bởi vì nó không có bất kỳ mối liên hệ gì với định nghĩa nguyên thủy (của hàm sin) đối với các số thực. Một đòi hỏi đối với định nghĩa mở rộng là nó phải nhất quán với định nghĩa ban đầu khi áp dụng cho các số thực, nhưng như thế còn chưa đủ. Điều này đúng đối với sự mở rộng ngớ ngẩn của tôi cho hàm sin. Một đòi hỏi khác, đó là khái niệm mới vẫn phải giữ được nhiều nhất có thể những đặc điểm của khái niệm cũ; bằng cách này hay cách khác, nó phải "tự nhiên".

Vậy những tính chất nào của sin và cos mà chúng ta muốn bảo toàn? Có lẽ chúng ta muốn tất cả những công thức đẹp đẽ của lượng giác vẫn còn hiệu lực, chẳng hạn như sin2z = 2sin$z$cos$z$. Điều này đặt ra một mối ràng buộc, nhưng không giúp được gì cả. Một tính chất thú vị hơn được rút ra từ giải

tích (cách phát biểu chặt chẽ của phép tính vi tích phân), là sự tồn tại của chuỗi vô hạn:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

(Tổng của một chuỗi như thế này được định nghĩa là giới hạn của tổng một số hữu hạn các số hạng khi số các số hạng tăng lên vô hạn). Ta cũng có chuỗi tương tự cho cos:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

và hai công thức này rõ ràng có liên quan với chuỗi cho hàm mũ:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Các chuỗi này trông có vẻ phức tạp, nhưng chúng có một đặc điểm hấp dẫn: chúng ta biết cách làm cho chúng có nghĩa đối với các số phức. Tất cả những thứ liên quan ở đây là các lũy thừa với số mũ nguyên (mà ta có thể thu được bằng cách nhân nhiều lần) và một vấn đề kỹ thuật về tính hội tụ (làm cho tổng vô hạn có nghĩa). Cả hai điều này đều có thể mở rộng một cách tự nhiên sang địa hạt các số phức và có tất cả những tính chất mà ta trông đợi. Như vậy ta có thể định nghĩa sin và cos cho các số phức bằng cách sử dụng chính các chuỗi trong trường hợp các số thực.

Vì tất cả các công thức thường gặp trong lượng giác là hệ quả của các chuỗi này, nên các công thức ấy cũng sẽ tự động chuyển qua. Những khẳng định cơ bản của giải tích, như "đạo hàm của sin là cos" cũng vậy. Công thức $e^{z+w} = e^z e^w$ cũng thế. Điều này quá tuyệt vời khiến cho các nhà toán học rất hài lòng chọn định nghĩa bởi chuỗi. Và một khi họ đã làm thế thì rất nhiều những thứ khác cần phải làm cho phù hợp với nó. Đầu xuôi hẳn đuôi sẽ lọt.

Chẳng hạn, ba chuỗi ở trên trông rất giống nhau. Thật vậy, nếu bạn thay thế z bằng iz trong chuỗi của hàm mũ thì bạn có thể tách kết quả nhận được ra thành hai phần, và kết quả bạn nhận được chính là các chuỗi cho sin và cos. Do vậy, định nghĩa theo chuỗi cho ta:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Bạn cũng có thể biểu diễn sin và cos theo hàm mũ:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Mối liên hệ ẩn giấu này thật là đẹp. Nhưng bạn sẽ không thể ngờ bất kỳ thứ gì giống như thế có thể tồn tại nếu bạn vẫn mắc kẹt trong địa hạt các số thực. Những sự tương tự kỳ lạ giữa các công thức lượng giác và hàm mũ (chẳng hạn, biểu diễn chuỗi vô hạn của chúng) vẫn sẽ chỉ như thế thôi. Nhưng nhìn qua thế giới số phức, mọi thứ đột nhiên ở vào đúng vị trí của chúng.

Một trong những phương trình đẹp nhất, nhưng cũng đầy bí ẩn, trong toàn thể toán học đã xuất hiện rất tình cờ. Trong các chuỗi lượng giác, số z (khi nhận giá trị thực) phải được đo bằng radian, mà đối với nó vòng tròn 360^0 sẽ trở thành 2π radian. Đặc biệt, góc 180^0 bằng π radian. Ngoài ra, $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$. Do vậy:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

Số ảo i kết hợp với hai số đáng chú ý nhất trong toán học là e và π trong một phương trình thật thanh nhã. Nếu như bạn chưa từng thấy nó bao giờ, và có dù chỉ chút ít nhạy cảm toán học, tóc trên gáy bạn sẽ dựng đứng lên và sống lưng bạn cũng phải nổi gai ốc. Phương trình này được mang tên

Euler, thường đứng đầu trong danh sách bầu chọn phương trình đẹp nhất trong toán học. Điều này không có nghĩa nó *là* phương trình đẹp nhất, mà chỉ cho thấy các nhà toán học đã đánh giá nó cao thế nào.

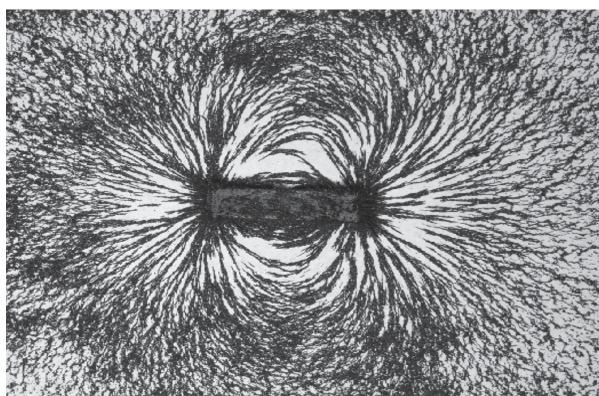
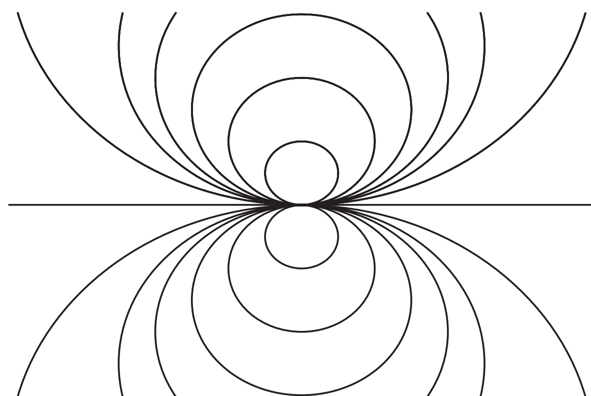
Được trang bị bởi các hàm phức và biết các tính chất của chúng, các nhà toán học thế kỷ 19 đã khám phá ra điều tuyệt vời là họ có thể sử dụng các hàm này để giải các phương trình vi phân trong vật lý toán. Họ có thể áp dụng phương pháp này cho tĩnh điện, từ học và cơ học chất lưu. Và không chỉ có thế, nó lại khá *dễ dàng*.

Trong Chương 3 chúng ta đã nói về các hàm – đó là các quy tắc toán học gán một số cho trước với một con số tương ứng, ví dụ như bình phương của nó, hay sin của nó. Các hàm phức được định nghĩa hệt như vậy, chỉ có điều bây giờ chúng ta cho phép các số tham gia bao gồm cả các số phức nữa. Phương pháp giải phương trình vi phân trở nên khá đơn giản. Tất cả những việc bạn phải làm là lấy một hàm phức nào đó, gọi nó là $f(z)$ và chia nó thành hai phần thực và ảo:

$$f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$$

Bây giờ bạn có hai hàm nhận giá trị *thực* là u và v, xác định đối với số phức bất kỳ z trong mặt phẳng phức. Hơn nữa, cho dù bạn bắt đầu với hàm số phức nào đi nữa, thì hai hàm thành phần này vẫn thỏa mãn các phương trình vi phân trong vật lý toán. Trong mô tả chất lưu, u và v xác định các đường dòng. Trong mô tả tĩnh điện, hai thành phần này xác định điện trường và cách mà một hạt tích điện nhỏ chuyển động trong đó; trong mô tả từ tính, chúng xác định từ trường và các đường sức từ.

Tôi sẽ chỉ đưa ra một ví dụ: một thanh nam châm. Hầu hết chúng ta đều nhớ đã từng xem một thí nghiệm nổi tiếng trong đó một thanh nam châm được đặt bên dưới một tờ giấy, với mạt sắt rắc đầy trên mặt. Chúng tự động xếp thành những đường sức từ gắn với thanh nam châm đó – đó là những đường cong mà một kim nam châm thử nhỏ sẽ hướng theo nếu được đặt vào từ trường đó. Những đường cong này trông giống như trong hình 19 (*trái*).

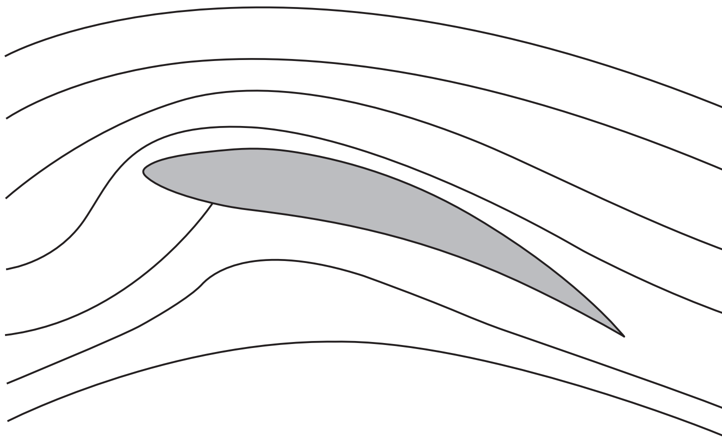
Hình 19 *Trái*: Từ trường của thanh nam châm. *Phải:* Trường được suy ra khi dùng các hàm phức.

Để thu được bức tranh này ta sử dụng các hàm phức, chẳng hạn như $f(z) = 1/z$. Đường sức hóa ra là các đường tròn, tiếp xúc với trục thực, giống như trên hình 19 (*phải*). Hình ảnh này giống với hình ảnh các đường sức từ của một thanh nam châm rất nhỏ. Một sự lựa chọn hàm phức phức tạp hơn sẽ tương ứng với một thanh nam châm có kích thước hữu hạn: Tôi chọn hàm này để giữ mọi thứ được đơn giản nhất có thể.

Điều này thật tuyệt vời. Có vô hạn các hàm để ta có thể sử dụng. Bạn quyết định hàm sẽ dùng, tìm ra phần thực và phần ảo của nó đồng thời cả dạng hình học của nó nữa... và lạ chưa, bạn đã giải được một bài toán trong từ học, hay điện học, hay cơ học chất lưu. Rồi kinh nghiệm sẽ nhanh chóng

chỉ cho bạn biết nên sử dụng hàm số nào cho bài toán nào. Logarit là nguồn điểm, trừ logarit là rãnh thoát nước mà qua đó chất lỏng biến mất như lỗ thoát nước của bồn rửa trong bếp vậy, i lần logarit là một xoáy điểm ở đó chất lỏng xoáy tít mù… Thật là thần diệu! Đây là một phương pháp có thể tìm được nghiệm của nhiều bài toán mà nếu không dùng nó việc giải sẽ rất khó khăn. Điều đó còn đảm bảo cho sự thành công, và nếu bạn còn băn khoăn về tất cả những điều nói trên của giải tích phức, bạn có thể kiểm tra trực tiếp rằng những kết quả mà bạn nhận được thực sự biểu diễn các nghiệm.

Đây mới chỉ là khởi đầu. Cũng như các nghiệm cụ thể, bạn có thể chứng minh các nguyên lý tổng quát, các hình mẫu ẩn giấu trong các định luật vật lý. Bạn có thể phân tích sóng, và giải các phương trình vi phân. Bạn có thể biến đổi hình dạng hình này thành hình khác bằng cách sử dụng các phương trình phức, và chính các phương trình này đã biến đổi các đường dòng xung quanh chúng. Phương pháp này chỉ dùng được giới hạn cho các hệ trong mặt phẳng, bởi vì đó là nơi một số phức thực sự tồn tại, nhưng phương pháp này là của trời cho, bởi vì trước đó, ngay cả các bài toán trong mặt phẳng cũng không thể chạm tới được. Ngày nay, mọi kỹ sư đều được dạy cách dùng giải tích phức để giải quyết các bài toán thực tiễn từ khá sớm trong thời gian học đại học của họ. Phép biến đổi Joukowski $z + 1/z$ biến một đường tròn thành dạng tiết diện ngang của một cánh máy bay thô sơ, xem hình 20. Do vậy, nó biến dòng chảy qua vòng tròn mà ta dễ dàng tính được thành dòng chảy qua cánh máy bay. Tính toán này và những cải tiến mang tính thực tiễn hơn rất quan trọng trong những ngày đầu của khí động lực học và thiết kế máy bay.



Hình 20 Dòng chảy qua cánh được suy ra từ phép biến đổi Joukowski.

Kho kinh nghiệm thực tế dồi dào đó lại làm cho các vấn đề cơ bản trở nên gây tranh cãi. Ai lại đi soi mói, chê bai một món quà được tặng bao giờ. Các số phức phải thực sự có ý nghĩa, nếu không nó không thể mang lại những kết quả như thế. Hầu hết các nhà toán học cũng như các nhà khoa học quan tâm nhiều đến chuyện đào ra vàng hơn là xác lập một cách chính xác vàng này ở đâu ra và nó khác với vàng giả ở chỗ nào. Nhưng vẫn có một số người kiên trì. Cuối cùng, nhà toán học người Ailen William Rowan Hamilton đã giải quyết mọi chuyện. Ông sử dụng biểu diễn hình học do Wessel, Argand và Gauss đề xuất, và biểu diễn chúng dưới dạng tọa độ. Một số phức là một cặp hai số thực (x, y). Các số thực là các số có dạng $(x, 0)$, còn số ảo i là (0, 1). Có các quy tắc đơn giản cho phép cộng và phép nhân các cặp như thế. Nếu bạn còn băn khoăn về một luật nào đó của đại số, như luật giao hoán $ab = ba$ chẳng hạn, bạn có thể lấy hai cặp và thực hiện phép nhân theo quy tắc để thấy kết quả ở hai vế là như nhau. Nếu bạn đồng nhất $(x, 0)$ với x, bạn đã nhúng tập số thực vào tập số phức, và còn hay hơn nữa, $x + \mathrm{i}y$ khi đó sẽ vận hành như là một cặp (x, y).

Đó không chỉ đơn giản là một dạng biểu diễn, mà là một *định nghĩa*. Theo Hamilton, một số phức không gì khác hơn chính là một cặp các số thực thông thường. Điều làm chúng trở nên quá hữu dụng là việc lựa chọn đầy sáng tạo các quy tắc cho phép cộng và phép nhân đối với chúng. Câu hỏi các số này thực sự là gì giờ đã lỗi thời; vấn đề là ở chỗ bạn sử dụng chúng thế nào để có thể tạo ra những phép màu. Với thủ thuật đơn giản này, Hamilton đã chặn đứng những tranh cãi gay gắt mang tính triết học kéo dài hàng thế kỷ. Nhờ đó, các nhà toán học đã trở nên quen thuộc với việc sử dụng các số và các hàm phức đến nỗi không ai thèm quan tâm đến những vấn đề ấy nữa. Tất cả những gì bạn cần nhớ chỉ đơn giản là $i^2 = -1$.

6 Quá nhiều sự ầm ĩ về các nút

Công thức Euler đối với khối đa diện

Số các mặt — số các cạnh — số các đỉnh

$$F - E + V = 2$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Số các mặt, các cạnh và các đỉnh của một khối đa diện không độc lập mà có mối liên hệ với nhau một cách đơn giản.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó giúp chúng ta phân biệt các khối đa diện với các topo khác nhau bằng cách sử dụng một ví dụ sớm nhất về bất biến topo. Điều này đã lát đường cho những kỹ thuật tổng quát hơn và mạnh hơn, góp phần tạo ra một ngành toán học mới.

Nó đã dẫn tới những gì?

Một trong những lĩnh vực quan trọng nhất và mạnh nhất của toán học thuần túy: topo, ngành nghiên cứu các tính chất hình học bất biến dưới tác dụng của các biến dạng liên tục. Các ví dụ bao gồm các mặt, các nút và các liên kết. Hầu hết các ứng dụng đều là gián tiếp, nhưng ảnh hưởng của nó đằng sau sân khấu lại rất quan trọng. Nó giúp chúng ta hiểu được các enzym tác động lên ADN trong một tế bào như thế nào, và tại sao chuyển động của các thiên thể lại có thể là hỗn độn.

Vào khoảng cuối thế kỷ 19, các nhà toán học bắt đầu phát triển một loại hình học mới, trong đó các khái niệm quen thuộc như độ dài và góc không đóng vai trò gì và không có sự phân biệt giữa tam giác, hình vuông và hình tròn. Ban đầu nó được gọi là *analysis situs*, giải tích của vị trí, nhưng các nhà toán học nhanh chóng đặt cho nó một cái tên khác: topo học.

Topo học có nguồn gốc từ một hình mẫu số học lạ lùng mà Descartes đã nhận thấy vào năm 1639 khi ông nghiên cứu năm khối đa diện đều của Euclid. Descartes là một học giả uyên bác sinh tại Pháp nhưng gần như cả đời ông sống ở một nước cộng hòa mà ngày nay là Hà Lan. Ông nổi tiếng chủ yếu nhờ triết học của mình, một triết học đã được chứng minh là có ảnh hưởng to lớn trong một thời gian dài, đến nỗi triết học phương Tây phần lớn chịu ảnh hưởng từ Descartes. Bạn có thể cho rằng không phải lúc nào bạn cũng đồng ý, nhưng dù sao vẫn lấy cảm hứng từ các lập luận của ông. Câu tuyên bố ngắn ngủi của ông: *cogito ergo sum* – "Tôi tư duy vậy tôi tồn tại" – đã trở thành một tuyên ngôn văn hóa rất thịnh hành. Nhưng các mối quan tâm của Descartes còn vươn rộng ra ngoài triết học, tới khoa học và toán học.

Năm 1639, Descartes đã chuyển sự chú ý của mình tới các khối đa diện đều, và đó là khi ông nhận ra một hình mẫu các số rất lạ lùng. Một khối lập phương có 6 mặt, 12 cạnh và 8 đỉnh; tổng 6 – 12 + 8 bằng 2. Một thập nhị diện đều có 12 mặt, 30 cạnh và 20 đỉnh; tổng 12 – 30 + 20 bằng 2. Một nhị

thập diện đều có 20 mặt, 30 cạnh và 12 đỉnh; tổng 20 – 30 + 12 bằng 2. Hệ thức này cũng đúng đối với khối tứ diện đều và bát diện đều. Thực tế, ta có thể dùng mối liên hệ này cho mọi hình khối, *bất kể* hình dạng thế nào, đều hay không. Nếu một hình khối có F mặt, E cạnh và V đỉnh thì $F - E + V = 2$. Công thức này đối với Descartes không có gì là lạ lùng lắm, nên ông đã không công bố nó. Chỉ mãi rất lâu sau đó các nhà toán học mới coi công thức đơn giản và nhỏ gọn này như là một trong những bước thăm dò đầu tiên tới thành công vĩ đại của toán học thế kỷ 20, đó là sự phát triển không thể cưỡng nổi của topo học. Trong thế kỷ 19, ba trụ cột của toán học là đại số, giải tích và hình học. Nhưng vào cuối thế kỷ 20, đó là đại số, giải tích và topo học.

Topo học thường được đặc trưng như “hình học của tấm cao su” bởi vì nó là một loại hình học thích hợp với các hình vẽ được vẽ trên một tấm đàn hồi, do vậy các đường thẳng có thể bị uốn cong, co lại, dãn ra, và đường tròn có thể bị nén ép thành một tam giác hoặc hình vuông. Quan trọng hơn hết thảy ở đây là *tính liên tục*: bạn không được xé rách tấm đàn hồi. Điều đáng lưu ý là bất cứ thứ gì quá kỳ lạ đều có thể có một giá trị gì đó, nhưng tính liên tục lại là khía cạnh cơ bản của thế giới tự nhiên và là một đặc tính cơ bản của toán học. Ngày nay chúng ta hầu như không sử dụng topo học một cách trực tiếp, mà chỉ như một kỹ thuật toán học giữa muôn vàn kỹ thuật khác. Bạn không thể tìm thấy cái gì mang tính topo một cách hiển nhiên trong bếp nhà bạn. Tuy nhiên, một công ty Nhật Bản thực tế đã rao bán một máy rửa bát hỗn độn, mà theo lời các nhân viên maketing thì nó rửa bát sạch hơn, và hiểu biết của chúng ta về hỗn độn lại dựa trên topo học. Một số khía cạnh quan trọng của lý thuyết trường lượng

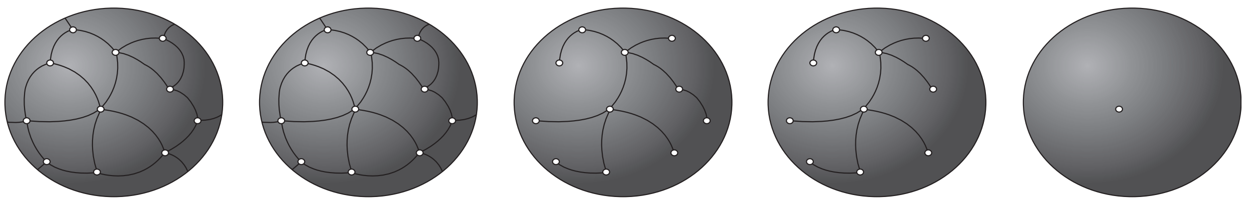
tử và phân tử ADN tiêu biểu cũng vậy. Nhưng khi Descartes đếm những đặc điểm hiển nhiên nhất của các khối đa diện đều và phát hiện ra rằng chúng không độc lập với nhau, thì tất cả những điều đó vẫn còn trong tương lai rất xa.

Mãi đến khi tới tay Euler, nhà toán học không biết mệt mỏi và có năng suất làm việc cao nhất trong lịch sử, mối liên hệ đó mới được chứng minh và công bố vào các năm 1750 và 1751. Tôi sẽ phác thảo sơ lược ở đây một phiên bản hiện đại. Biểu thức $F - E + V$ có vẻ hơi tùy tiện, nhưng nó có một cấu trúc rất thú vị. Các mặt (F) là các đa giác 2 chiều, các cạnh (E) là các đường thẳng và do vậy số chiều là 1, và các đỉnh (V) là các điểm với số chiều là 0. Dấu trong biểu thức đan xen lẫn nhau, + – +, với dấu + được gán cho đại lượng mang số chiều chẵn và – cho số chiều lẻ. Điều này ngụ ý rằng bạn có thể đơn giản hóa một hình khối bằng cách hợp nhất các mặt hay bỏ đi các cạnh và các đỉnh, và những sự thay đổi ấy không làm thay đổi đại lượng $F - E + V$, với điều kiện mỗi một lần bạn bỏ đi một mặt bạn cũng phải bỏ đi một cạnh, hay mỗi khi bạn bỏ đi một đỉnh thì cũng phải bỏ đi một cạnh. Dãy đan dấu thực ra đã làm cho những thay đổi kiểu này triệt tiêu nhau.

Bây giờ tôi sẽ giải thích vì sao cấu trúc thông minh này lại giúp ta chứng minh được hệ thức nói trên. Hình 21 minh họa cho ta thấy các bước then chốt. Hãy lấy hình khối của bạn và làm biến dạng nó thành một hình cầu hoàn hảo với các cạnh trở thành các đường cong trên mặt cầu đó. Nếu hai mặt có một cạnh chung, bạn có thể bỏ cạnh đó đi và nhập hai mặt đó làm một. Vì sự hợp nhất như thế làm cho số mặt và số cạnh cùng giảm đi 1, nên nó không làm thay đổi đại lượng $F - E + V$. Cứ tiếp tục như thế cho tới khi chỉ còn lại một mặt duy

nhất, gần như phủ kín toàn mặt cầu. Ngoài mặt đó ra, bạn chỉ còn các cạnh và các đỉnh. Chúng phải tạo thành một cây, tức một mạng không có các vòng khép kín, bởi vì bất kỳ một vòng kín nào trên mặt cầu cũng chia ra ít nhất là hai mặt: một bên trong và một bên ngoài nó. Các nhánh của cây này là những cạnh còn lại của hình khối ban đầu và chúng nối với nhau ở các đỉnh còn lại. Ở bước này chỉ còn một mặt mà thôi: đó là toàn bộ mặt cầu, bỏ đi cái cây đó. Một số nhánh của cây này kết nối với các nhánh khác ở các đầu mút, nhưng số khác, ở ngoài cùng, kết thúc tại một đỉnh mà không kết nối với các nhánh khác. Nếu bạn bỏ đi một trong số các nhánh đầu cuối ấy cùng với đỉnh đó, thì cái cây sẽ nhỏ dần, nhưng vì cả E và V đều giảm đi 1, nên $F - E + V$ lại vẫn không đổi.

Quá trình này cứ tiếp tục cho tới khi bạn chỉ còn lại một đỉnh duy nhất nằm trên một mặt cầu không có đặc điểm gì khác. Bây giờ $V = 1$, $E = 0$ và $F = 1$. Do vậy, $F - E + V = 1 - 0 + 1 = 2$. Nhưng vì từng bước biến đổi không làm thay đổi $F - E + V$, nên giá trị ban đầu của nó cũng phải bằng 2, đó chính là điều ta muốn chứng minh.



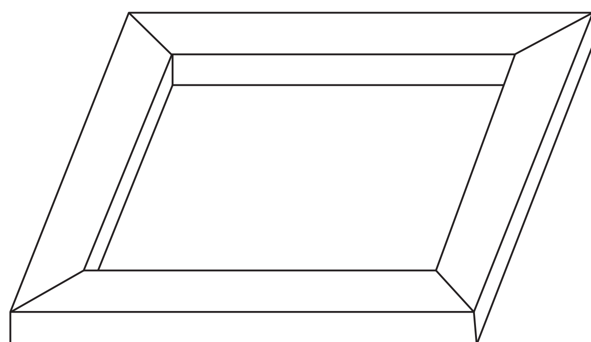
Hình 21 Các giai đoạn then chốt trong quá trình đơn giản hóa hình khối. *Từ trái sang phải*: (1) Bắt đầu. (2) Hòa nhập hai mặt liền kề. (3) Cây còn lại khi tất cả các mặt đã được hòa nhập làm một. (4) Bỏ đi một cạnh và một đỉnh của cây. (5) Kết thúc.

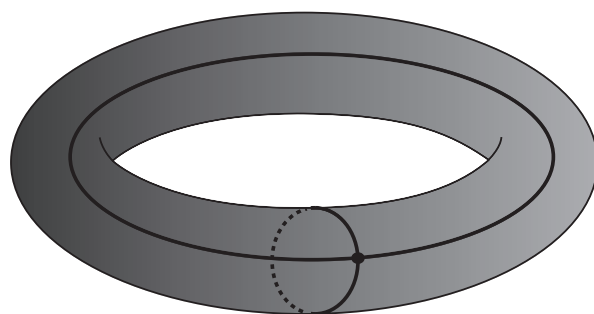
Đây là một ý tưởng thật khôn khéo, và nó chứa đựng mầm mống của một nguyên lý có tầm ảnh hưởng sâu rộng. Chứng minh này có hai yếu tố căn bản. Thứ nhất là quá trình đơn giản

hóa: bỏ đi một mặt và một cạnh kề, hoặc bỏ đi một đỉnh và một cạnh nhận đỉnh đó làm đầu mút. Thứ hai là một bất biến, tức một biểu thức toán học không thay đổi mỗi khi bạn thực hiện một bước trong quá trình đơn giản hóa. Bất cứ khi nào hai yếu tố này đồng thời tồn tại, bạn có thể tính giá trị của bất biến cho bất kỳ vật nào bằng cách đơn giản hóa nó đến mức xa nhất có thể, và sau đó tính giá trị của bất biến cho phiên bản đã được đơn giản hóa đến tận cùng này. Bởi vì nó là một bất biến, nên hai giá trị này phải bằng nhau. Vì phiên bản cuối cùng rất đơn giản nên dễ dàng tính được giá trị của bất biến.

Bây giờ phải thú nhận là tôi đã giấu đi một vấn đề mang tính kỹ thuật. Công thức của Descartes, thực tế không đúng với mọi hình khối. Hình khối quen thuộc nhất mà nó không áp dụng được là chiếc khung ảnh. Hãy hình dung một khung ảnh làm từ bốn cạnh bằng gỗ, mỗi hình chữ nhật tiết diện được gắn với nhau nhờ bốn góc mộng 45º như trên hình 22 (*bên trái*). Mỗi thanh gỗ có bốn mặt, và như vậy $F = 16$. Mỗi thanh có bốn cạnh nhưng các mộng ghép lại tạo thêm 4 cạnh nữa ở bốn góc, như vậy $E = 32$. Mỗi một góc có bốn đỉnh, nên $V = 16$. Bởi thế $F - E + V = 0$.

Vậy có điều gì sai trong những lập luận trên?





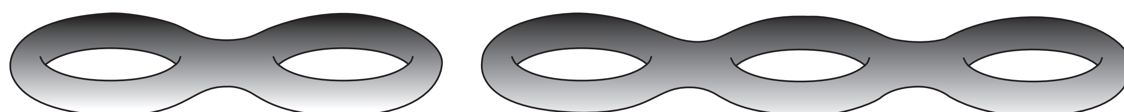
Hình 22 *Trái*: Một khung ảnh có $F - E + V = 0$. *Phải*: Cấu hình cuối cùng khi khung ảnh bị uốn trơn các góc và đơn giản hóa.

Tổng $F - E + V$ vẫn là bất biến, không vấn đề gì cả. Cũng như không có vấn đề gì nhiều đối với quá trình đơn giản hóa. Nhưng nếu bạn thực hiện quá trình ấy một cách xuyên suốt đối với chiếc khung ảnh, luôn bỏ đi một mặt và một cạnh của nó, hoặc một đỉnh và một cạnh nhận nó làm đầu mút, thì cấu hình đơn giản hóa cuối cùng không phải là một đỉnh duy nhất nằm trên một mặt duy nhất. Thực hiện quá trình lược bỏ theo cách hiển nhiên nhất, bạn sẽ thu được hình 22 (*phải*), với $F = 1$, $V = 1$, $E = 2$. Tôi đã làm trơn các mặt và các cạnh vì các nguyên nhân sẽ được nhanh chóng làm rõ dưới đây. Ở bước này, việc bỏ đi một cạnh chỉ làm hợp nhất mặt duy nhất còn lại với chính nó, như vậy sự thay đổi của các con số sẽ không triệt tiêu nhau nữa. Đó chính là câu trả lời cho câu hỏi tại sao đến đây chúng ta dừng lại, nhưng chúng ta có thể thở phào nhẹ nhõm: đối với cấu hình này, ta có $F - E + V = 0$. Như vậy *phương pháp* này đã hoạt động một cách hoàn hảo. Chỉ có điều nó đưa ra một kết quả khác cho chiếc khung ảnh mà thôi. Vì thế phải có một số khác biệt căn bản giữa chiếc khung ảnh và một khối lập phương, và bất biến $F - E + V$ cho thấy điều đó.

Khác biệt này hóa ra lại là một khác biệt về mặt topo. Như ban đầu trong phiên bản của tôi về chứng minh của Euler, tôi đã bảo bạn hãy lấy một hình khối và làm biến dạng nó "thành một hình cầu hoàn hảo". Nhưng ta không thể làm thế cho khung ảnh. Nó không thể biến dạng thành hình cầu, ngay cả khi đã được đơn giản hóa. Nó được biến thành một hình xuyến (giống như một cái xăm ôtô vậy), với một lỗ thủng ở giữa. Cái lỗ này cũng được nhìn thấy rõ ràng ngay trong hình dạng ban đầu của khung: đó chính là chỗ đặt bức ảnh vào. Trái lại, một hình cầu thì không có lỗ nào cả. Chính lỗ thủng

trong khung ảnh là nguyên nhân khiến cho quá trình đơn giản hóa dẫn tới một kết quả khác. Tuy nhiên, chúng ta có thể giành lại chiến thắng từ hàm răng của thất bại, bởi vì $F - E + V$ vẫn còn là một bất biến. Như vậy, chứng minh này cho chúng ta thấy rằng *bất kỳ* hình khối nào biến dạng được thành một hình xuyến sẽ thỏa mãn một phương trình hơi khác trước một chút: đó là phương trình $F - E + V = 0$. Hệ quả là chúng ta có cơ sở của một chứng minh chặt chẽ rằng một hình xuyến không thể biến dạng được thành một mặt cầu: tức là, hai mặt này khác nhau về phương diện topo.

Về mặt trực giác điều này là hiển nhiên, nhưng chúng ta có thể hỗ trợ trực giác bằng logic. Cũng như Euclid đã bắt đầu từ những tính chất hiển nhiên của các điểm và các đường thẳng, và hình thức hóa chúng thành một lý thuyết hình học chặt chẽ, các nhà toán học của thế kỷ 19 và 20 giờ đây cũng có thể phát triển một lý thuyết hình thức chặt chẽ cho topo học.



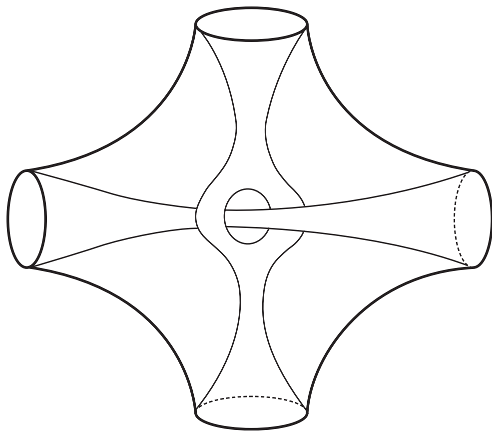
Hình 23 *Trái*: hình xuyến hai lỗ. *Phải*: hình xuyến ba lỗ.

Không cần phải suy nghĩ nhiều về điểm khởi đầu. Tồn tại các hình khối giống hình xuyến nhưng có hai lỗ hoặc nhiều hơn, như hình 23, và chính bất biến ở trên sẽ cho ta biết một vài điều hữu ích về các hình khối đó. Hóa ra bất kỳ hình khối nào có thể biến dạng thành một hình xuyến có hai lỗ đều thỏa mãn phương trình $F - E + V = -2$, thành hình xuyến ba lỗ thì thỏa mãn $F - E + V = -4$, và tổng quát một hình khối bất kỳ có thể biến dạng thành một hình xuyến g-lỗ sẽ thỏa mãn $F - E + V = 2 - 2g$. Ký hiệu g là viết tắt của "genus – giống", một

tên gọi chuyên môn chỉ "số các lỗ thủng". Theo đuổi dòng suy nghĩ mà Descartes và Euler đã khởi đầu sẽ dẫn ta tới mối liên hệ giữa một tính chất định lượng của hình khối, như số lượng các mặt, đỉnh, và cạnh và tính chất định tính của nó là có hay không có các lỗ thủng. Chúng ta gọi tổng $F - E + V$ là đặc số Euler của hình khối và để ý rằng nó chỉ phụ thuộc vào hình khối mà chúng ta xem xét chứ không phụ thuộc vào việc chúng ta cắt nó thành các mặt, các cạnh và các đỉnh như thế nào. Điều này làm cho nó trở thành một đặc điểm nội tại của hình khối.

Đồng ý, chúng ta đếm các lỗ thủng, một thao tác định lượng, nhưng bản thân các "lỗ thủng" lại là định tính theo nghĩa rằng nó hoàn toàn không hiển nhiên là một đặc điểm của hình khối. Theo trực giác, nó là một miền trong không gian mà tại đó hình khối không *tồn tại*. Nhưng không phải miền không gian bất kỳ. Xét cho cùng, mô tả này áp dụng cho toàn bộ không gian xung quanh hình khối và không ai có thể coi nó là một lỗ thủng. Và nó cũng áp dụng cho vùng không gian bao quanh một mặt cầu... là hình khối không hề *có* một lỗ thủng nào. Thực tế, càng nghĩ lỗ thủng là gì, bạn sẽ càng nhận ra rằng rất khó để định nghĩa một thứ như thế. Ví dụ ưa thích của tôi để chỉ ra điều này rối rắm tới mức nào là hình khối trong hình 24, được biết đến dưới cái tên một-lỗ-thủng-qua-một-lỗ-thủng-trong-một-lỗ-thủng. Nhìn bên ngoài, bạn có thể xâu một lỗ thủng qua một lỗ thủng khác, mà thực tế đó là một lỗ thủng trong một lỗ thủng thứ ba.

Quả là điên rồ.



Hình 24 Một-lỗ-thủng-qua-một-lỗ-thủng-trong-một-lỗ-thủng.

Sẽ không có vấn đề gì đáng kể nếu các hình khối có lỗ thủng không hề có vai trò quan trọng gì ở bất kỳ đâu. Nhưng đến cuối thế kỷ 19 chúng lại xuất hiện trong hầu hết các lĩnh vực của toán học – trong giải tích phức, hình học đại số và hình học vi phân của Riemann. Tồi tệ hơn nữa, những dạng tương tự có số chiều cao hơn của các hình khối lại đóng vai trò trung tâm trong tất cả các lĩnh vực của toán học từ thuần túy tới ứng dụng; chẳng hạn, như đã được nói đến, động lực học của Hệ Mặt Trời đòi hỏi sáu chiều cho mỗi vật thể. Và chúng có sự tương tự với số chiều cao hơn của các lỗ thủng. Bằng cách này hay cách khác ta cần phải lập lại ít nhiều trật tự trong địa hạt này. Và câu trả lời hóa ra... lại là các bất biến.

Ý tưởng về bất biến topo bắt nguồn từ một công trình của Gauss về từ học. Ông rất quan tâm tới mối liên kết giữa các đường sức điện và đường sức từ, và ông đã định nghĩa số liên kết, tức số cho biết đường sức của một trường quấn quanh đường sức của trường kia bao nhiêu lần. Đây là một bất biến topo, cụ thể là số liên kết này luôn không thay đổi bất kể các đường cong (đường sức) này biến dạng liên tục như thế nào. Ông đã tìm ra công thức tính số liên kết này nhờ sử dụng

phép tính tích phân, và như mọi khi, ông bày tỏ mong muốn có hiểu biết sâu sắc hơn về các "tính chất hình học căn bản" của các giản đồ. Không phải ngẫu nhiên mà những bước tiến nghiêm túc đầu tiên hướng tới những hiểu biết như thế đến từ công trình của một học trò của Gauss, Johann Listing, và trợ lý của Gauss, August Möbius. Công trình *Nghiên cứu về topo học (Vorstudien zur Topologie*) của Listing công bố năm 1847 đã giới thiệu thuật ngữ "topo" và Möbius đã làm cho vai trò của các phép biến đổi liên tục trở nên tường minh.

Listing có một ý tưởng rất thông minh: tìm cách tổng quát hóa cho công thức của Euler. Biểu thức $F - E + V$ là một bất biến tổ hợp: đặc trưng của cách mô tả hình khối một cách cụ thể, dựa trên việc chia nó thành các mặt, các cạnh và các đỉnh. Số lượng các lỗ thủng g là một bất biến topo: hình khối bị biến dạng nhưng nó không thay đổi, chừng nào các phép biến dạng còn là liên tục. Một bất biến topo nắm giữ một đặc điểm định tính bản chất; còn bất biến tổ hợp thì cho ta một phương pháp để tính toán nó. Cả hai loại bất biến này khi kết hợp với nhau trở nên rất mạnh, bởi vì chúng ta có thể sử dụng khái niệm bất biến topo để tư duy về các hình và sử dụng phiên bản tổ hợp để xác định những thứ mà ta đang nói tới.

Thực tế, công thức này cho phép chúng ta tránh đi vấn đề định nghĩa "lỗ thủng" đầy rắc rối. Thay vì thế, chúng ta định nghĩa "số các lỗ thủng" như một gói, mà không định nghĩa "lỗ thủng" hay đếm xem có bao nhiêu. Bằng cách nào? Dễ thôi. Chỉ cần viết lại phiên bản tổng quát của công thức Euler $F - E + V = 2 - 2g$ dưới dạng:

$$g = 1 - F/2 + E/2 - V/2$$

Bây giờ chúng ta có thể tính *g* bằng cách vẽ các mặt, cạnh và đỉnh trên hình khối của chúng ta, đếm *F*, *E* và *V* và thay các giá trị ấy vào công thức. Vì biểu thức này là một bất biến, nên dù ta có cắt hình khối ra thế nào, ta vẫn sẽ thu được cùng một kết quả. Nhưng những gì ta làm ở trên không hề phụ thuộc vào việc có một định nghĩa về lỗ thủng hay không. Thay vào đó, "số các lỗ thủng" trở thành một sự diễn giải thông qua trực giác, được rút ra từ việc xem xét các ví dụ đơn giản mà ta cảm thấy ta có thể hiểu cụm từ ấy mang ý nghĩa gì.

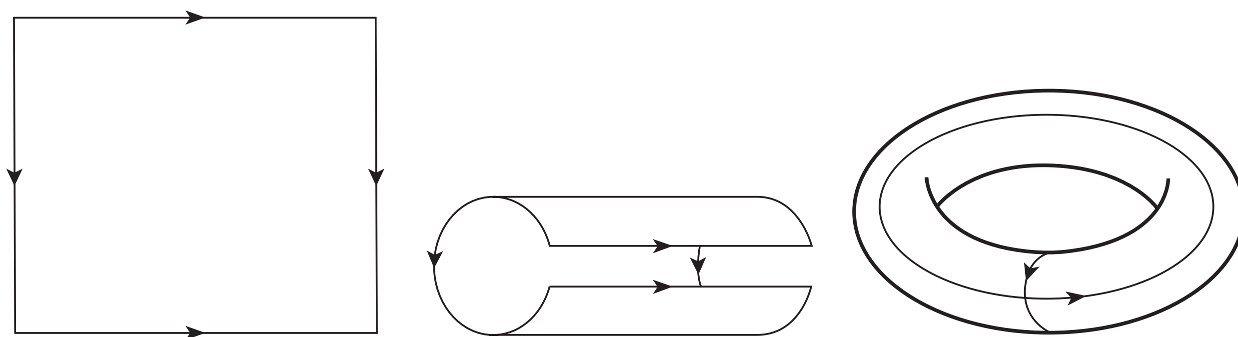
Nghe có vẻ như một trò lừa gạt, nhưng nó tạo ra cuộc đột nhập quan trọng vào câu hỏi trung tâm trong topo học: khi nào một hình có thể biến dạng liên tục thành hình khác? Tức là, trong chừng mực mà các nhà topo quan tâm, hai hình dạng có là như nhau hay không? Nếu chúng giống nhau, các bất biến của chúng cũng phải giống nhau; đảo lại, nếu các bất biến khác nhau, thì các hình cũng phải khác nhau. (Tuy nhiên, đôi khi hai hình có thể có cùng bất biến, nhưng khác nhau; nó phụ thuộc vào bất biến). Vì mặt cầu có đặc số Euler bằng 2, hình xuyến có đặc số Euler bằng 0, nên không có cách nào để làm biến dạng liên tục một mặt cầu thành một hình xuyến. Điều này nghe có vẻ hiển nhiên, vì lỗ thủng... nhưng chúng ta đã thấy những sai lầm chết người mà lối tư duy như thế sẽ dễ dẫn tới. Bạn không cần phải giải thích đặc số Euler để có thể sử dụng nó nhằm phân biệt các hình dạng và ở đây dứt khoát là như vậy.

Kém hiển nhiên hơn, đặc số Euler chỉ ra rằng lỗ-thủng-qua-một-lỗ-thủng-trong-một-lỗ-thủng (hình 24) đầy bí hiểm thực chất chỉ là một hình xuyến ba lỗ trá hình. Hầu hết những mặt mang vẻ ngoài phức tạp không phải là do topo nội tại của

mặt đó, mà chỉ đơn giản từ cách tôi chọn để nhúng nó trong không gian.

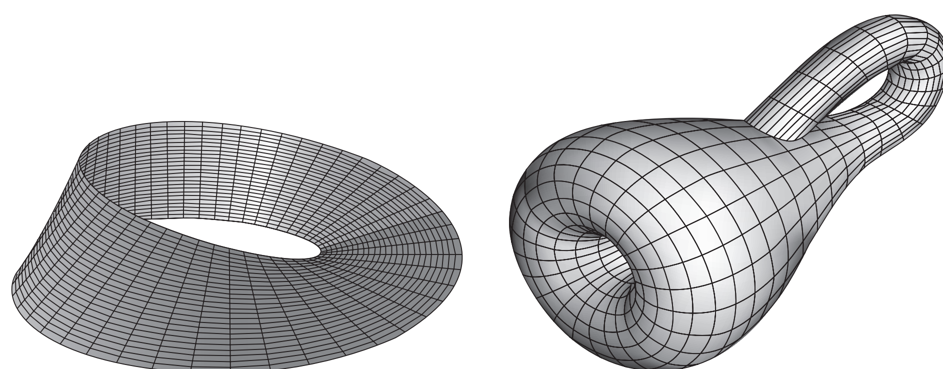
Định lý thực sự đáng chú ý đầu tiên trong topo học đã nảy sinh từ công thức của đặc số Euler. Đó là sự phân loại đầy đủ các mặt, các dạng cong hai chiều như bề mặt của hình cầu hay của hình xuyến. Ở đây, một cặp điều kiện kỹ thuật được áp đặt: mặt đó phải không có biên và có ngoại diện hữu hạn (thuật ngữ chuyên môn là "*compact*").

Với mục đích đó, một mặt sẽ được mô tả một cách thực chất, tức là, nó không được hình dung như là tồn tại trong một không gian bao quanh nào đó. Có một cách để làm như thế, đó là xem các mặt như một số các miền đa giác (mà về mặt topo tương đương với các đĩa tròn) được gắn với nhau dọc theo các cạnh của chúng theo các quy tắc đã được định rõ, giống như chỉ dẫn dán "mép A với mép B" mà bạn nhận được khi phải lắp ghép các tấm các-tông. Chẳng hạn, một mặt cầu có thể được mô tả bằng cách sử dụng hai đĩa, gắn với nhau theo biên của chúng. Một đĩa trở thành bán cầu bắc, cái còn lại là bán cầu nam. Hình xuyến thì có một sự mô tả đặc biệt tao nhã, đó là một hình vuông với hai cạnh đối được gắn với nhau. Cách xây dựng này có thể được trực quan hóa trong một không gian bao quanh (hình 25) để giải thích tại sao nó lại tạo thành một hình xuyến, nhưng toán học có thể thực hiện điều đó bằng cách chỉ dùng hình vuông cùng với các quy tắc gắn, và rõ ràng cách này có nhiều lợi thế vì nó thuộc về bản chất.



Hình 25 Gắn các cạnh của hình vuông để tạo thành một hình xuyến.

Khả năng gắn các phần của biên với nhau dẫn tới một hiện tượng kỳ lạ: mặt chỉ có một phía. Ví dụ nổi tiếng nhất là dải Möbius, được Möbius và Listing đưa ra năm 1858, đó là một băng giấy hình chữ nhật mà hai đầu được gắn với nhau sau một phép quay 180^0 (thường được gọi là phép xoắn nửa vòng, với quy ước 360^0 tạo thành một phép xoắn trọn vẹn). Dải Möbius, xem hình 26 (*trái*), có một cạnh, bao gồm các cạnh của hình chữ nhật không gắn với cái gì hết. Đó là cạnh duy nhất bởi vì hai cạnh phân biệt của hình chữ nhật đã được gắn với nhau thành một vòng khép kín bởi phép xoắn nửa vòng.



Hình 26 *Trái*: Dải Möbius. *Phải*: Chai Klein. Sự tự cắt biểu kiến xảy ra bởi vì hình vẽ đã nhúng nó vào không gian ba chiều.

Có thể làm một mô hình bằng giấy của dải Möbius, bởi vì nó nhúng một cách tự nhiên trong không gian ba chiều. Dải này chỉ có một phía, theo nghĩa là nếu bạn bắt đầu sơn một mặt của nó và cứ tiếp tục thì cuối cùng bạn cũng sơn được

toàn bộ bề mặt của dải Möbius, cả trước và sau. Sở dĩ như vậy là vì phép xoắn nửa vòng đã kết nối mặt phía trước và mặt phía sau với nhau. Đây không phải là một mô tả thực chất bởi vì nó dựa trên việc nhúng dải Möbius vào không gian, nhưng lại có một tính chất tương đương, mang tính kỹ thuật hơn, được biết đến dưới cái tên tính định hướng được, và tính chất này là thực chất.

Có một mặt liên quan cũng chỉ có một phía, nhưng không có cạnh nào cả, như trên hình 26 (*phải*). Nó sinh ra khi ta gắn hai cạnh của một hình chữ nhật với nhau giống như dải Möbius, và gắn hai cạnh còn lại mà không xoắn gì cả. Một mô hình như thế trong không gian ba chiều thì phải tự đi xuyên qua chính nó, mặc dù từ quan điểm thực chất, các quy tắc gắn không hề nhắc gì đến việc tự cắt cả. Nếu mặt này được vẽ ra với sự tự cắt như thế, nó sẽ trông giống như một cái chai mà cổ chai lại đi xuyên qua thành chai và gắn với đáy. Chai này được Felix Klein khám phá ra, và cũng được biết đến dưới cái tên chai Klein – gần như là một trò đùa dựa trên một trò chơi chữ trong tiếng Đức, thay *Kleinsche Flache* (mặt Klein) thành *Kleinche Flasche* (chai Klein).

Chai Klein không có biên và compact, nên bất kỳ sự phân loại nào của các mặt cũng phải bao hàm nó. Nó được biết đến nhiều nhất trong họ các mặt một phía, và điều đáng ngạc nhiên là nó lại không phải là mặt đơn giản nhất. Vinh dự này thuộc về mặt phẳng xạ ảnh, sinh ra nếu bạn gắn hai cạnh đối diện của hình vuông với nhau, mỗi cái xoắn nửa vòng (Rất khó làm với giấy vì giấy quá cứng; giống như chai Klein, nó đòi hỏi mặt phải tự cắt. Nó chỉ được hình thành tốt nhất trên "khái niệm", tức là, bằng cách vẽ trên hình vuông và ghi nhớ

các quy tắc dán khi các đường thẳng rời khỏi cạnh và "quấn lại"). Định lý phân loại các mặt, do Johann Listing chứng minh khoảng năm 1860, dẫn tới hai họ các mặt. Các mặt hai phía đó là mặt cầu, mặt xuyến, mặt xuyến hai lỗ, xuyến ba lỗ, v.v. Các mặt chỉ có một phía tạo thành một họ vô hạn tương tự, bắt đầu với mặt phẳng xạ ảnh và chai Klein. Ta có thể thu được chúng bằng cách cắt một đĩa nhỏ ra khỏi mặt hai phía tương ứng và dán chúng lại như dán dải Möbius.

Các mặt xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực của toán học. Chúng rất quan trọng trong giải tích phức, nơi các mặt gắn với các kỳ dị, các điểm mà ở đó dáng điệu của hàm số trở nên lạ lùng – chẳng hạn đạo hàm của chúng không còn tồn tại nữa. Các kỳ dị là chìa khóa để giải quyết rất nhiều vấn đề trong giải tích phức; theo nghĩa là chúng nắm bắt cái cốt yếu của hàm số. Bởi vì các kỳ dị có liên hệ với các mặt, nên topo của các mặt sẽ cung cấp một công cụ quan trọng cho giải tích phức. Về mặt lịch sử, nó đã thúc đẩy việc phân loại các mặt.

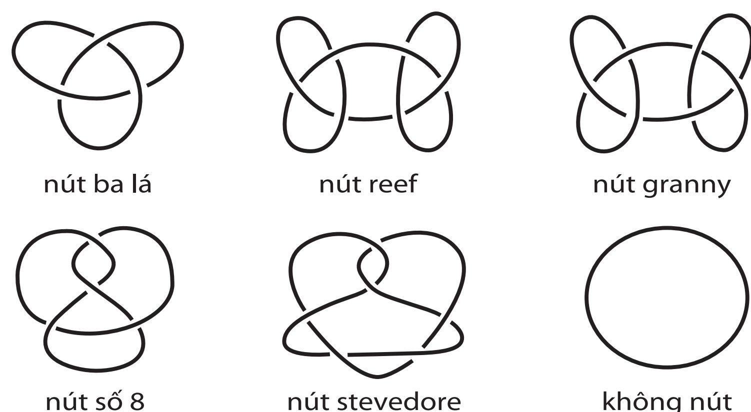
Hầu hết topo học hiện đại là cực kỳ trừu tượng, và nhiều vấn đề của nó xảy ra trong không gian bốn chiều hoặc nhiều hơn. Chúng ta có thể cảm nhận được đôi chút về môn này trong một môi trường quen thuộc hơn: thế giới của các nút. Trong thế giới thực, các nút là các chỗ rối được thắt ở chiều dài nào đó của sợi dây. Các nhà topo cần có một cách để cho các nút, một khi đã bị thắt, không bị tuột ra ở các đầu mút sợi dây, vì thế họ nối các đầu mút này lại với nhau để tạo thành một vòng kín. Bây giờ một nút chỉ là một vòng tròn được nhúng trong không gian. Về bản chất, một nút đồng nhất về mặt

topo với một đường tròn, nhưng trong trường hợp này, cái phải tính đến là đường tròn ấy nằm trong không gian bao quanh nó như thế nào. Điều này dường như trái với tinh thần của topo học, nhưng bản chất của một nút nằm trong mối liên hệ giữa vòng kín của dây và không gian bao quanh nó. Bằng cách xem xét không chỉ các nút, mà cả cách nó liên quan tới không gian bao quanh như thế nào, topo học có thể xử lý các vấn đề quan trọng liên quan tới các nút. Trong số đó có các câu hỏi sau:

- Làm thế nào để biết một nút đã thực sự bị thắt?
- Bằng cách nào chúng ta có thể phân biệt được, về mặt topo, các nút khác nhau?
- Liệu chúng ta có thể phân loại được tất cả các nút khả dĩ?

Kinh nghiệm cho thấy có nhiều loại nút khác nhau. Hình 27 là một vài nút trong số đó: nút ba lá, nút kép đối xứng (*reef*), nút *granny*, nút số 8, nút *stevedore*, v.v. Còn có cả không-nút, một vòng tròn thông thường; và đúng như tên gọi của nó, vòng này không bị thắt nút. Có nhiều loại nút đã được nhiều thế hệ thủy thủ, nhà leo núi và các hướng đạo sinh sử dụng. Dĩ nhiên, bất kỳ lý thuyết topo nào cũng phải phản ánh được kho tàng kinh nghiệm phong phú này, nhưng mọi thứ cần phải được chứng minh, một cách chặt chẽ, bên trong khuôn khổ hình thức của topo học, giống như Euclid đã chứng minh định lý Pythagor thay vì chỉ vẽ ra vài tam giác và đo các cạnh của chúng. Đáng chú ý là, chứng minh topo đầu tiên về sự tồn tại của nút, theo nghĩa là có một phép nhúng một đường tròn mà nó không thể biến dạng thành không-nút, xuất hiện lần đầu tiên năm 1926 trong công trình *Các nút và các nhóm (Knoten und Gruppen)* của nhà toán học Đức Kurt

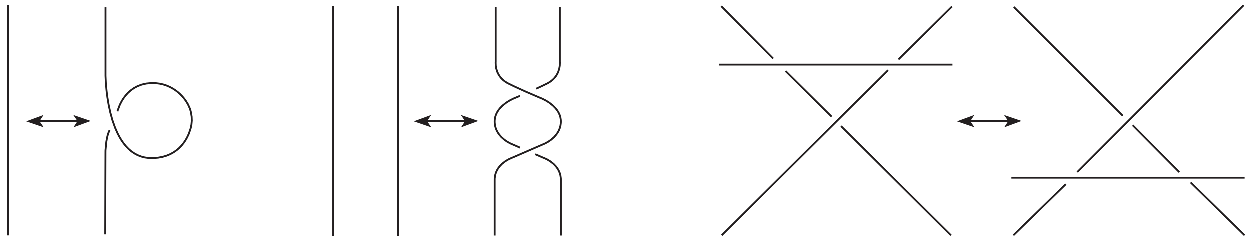
Reidemeister. "Nhóm" là một thuật ngữ trong đại số trừu tượng, nó đã nhanh chóng trở thành nguồn hiệu quả nhất cho các bất biến topo. Năm 1927, Reidemeister và độc lập với ông, nhà toán học Mỹ James Waddel Alexander cùng học trò của mình là G. B. Briggs, tìm được một chứng minh đơn giản hơn về sự tồn tại của nút, bằng cách sử dụng "giản đồ nút". Đó là hình minh họa của nút, được vẽ với những khe hở (đứt) nhỏ trong vòng để chỉ sự chồng lên nhau của các đoạn dây riêng biệt, như trong hình 27. Các chỗ đứt (hay khe hở) này thực ra không hiện diện trong bản thân vòng được thắt nút, nhưng chúng thể hiện cấu trúc ba chiều trên một giản đồ hai chiều. Bây giờ chúng ta có thể sử dụng các khe hở này để tách các giản đồ nút thành một số các mảnh phân biệt, tức các yếu tố cấu thành nên nó, và sau đó chúng ta có thể co dãn giản đồ để xem các thành phần ấy biến đổi thế nào.



Hình 27 Năm nút và một không-nút.

Nếu bạn nhìn lại cách chúng ta sử dụng tính bất biến của đặc số Euler, bạn sẽ thấy tôi đã đơn giản hóa hình khối bằng cách sử dụng một chuỗi các bước đặc biệt: hợp nhất hai mặt bằng cách bỏ đi một cạnh, hợp nhất hai cạnh bằng cách bỏ đi một đỉnh. Ta cũng có thể sử dụng cùng một mẹo như thế với các giản đồ nút, nhưng bây giờ bạn cần ba bước để đơn

giản hóa chúng, gọi là các bước Reidemeister, xem hình 28. Mỗi bước có thể thực hiện theo một hướng nào đó: thêm vào hay bỏ đi một phép xoắn, chồng hai dây lên nhau, kéo chúng rời xa nhau, hay kéo một dây vào vùng đã có hai dây khác cắt ngang nhau.



Hình 28 Các bước Reidemeister.

Với một vài thủ thuật sơ bộ để sắp xếp lại giản đồ nút, như là thay đổi những vị trí mà ở đó có ba đường cong chồng chéo lên nhau, ta có thể chứng minh rằng bất kỳ một phép biến dạng nào của một nút cũng có thể biểu diễn dưới dạng một chuỗi hữu hạn các bước Reidemeister áp dụng cho giản đồ của nó. Bây giờ chúng ta đã có thể chơi trò chơi của Euler, tất cả những thứ mà chúng ta phải làm chỉ đơn giản là tìm kiếm một bất biến. Một trong số đó là nhóm của nút, nhưng còn có một bất biến đơn giản hơn rất nhiều, nó chứng minh nút ba lá thực sự là một nút. Tôi có thể diễn giải điều này bằng cách tô màu các thành phần phân biệt của nó trên giản đồ nút. Tôi sẽ bắt đầu với một giản đồ hơi phức tạp hơn là tôi cần, với thêm một vòng nữa, để minh họa một số đặc điểm của ý tưởng này, hình 29.



Hình 29 Tô màu nút ba lá với thêm một vòng xoắn.

Phần xoắn thêm vào tạo ra bốn thành phần riêng biệt. Giả sử tôi sử dụng ba màu, chẳng hạn đỏ, vàng và xanh (tương ứng trong hình là đen, xám nhạt, và xám đậm) để tô cho mỗi thành phần. Phép tô màu này tuân theo hai quy tắc đơn giản:

- Chí ít phải sử dụng hai màu phân biệt. (Thực tế có cả thảy ba màu, nhưng đó là thông tin dư mà tôi không cần tới).
- Ở mỗi chỗ bắt chéo (hay chồng lên nhau), hoặc cả ba sợi ở gần giao điểm đều được tô màu khác nhau, hoặc phải được tô cùng một màu. Gần chỗ bắt chéo do có vòng phụ thêm của tôi, cả ba thành phần đều được tô màu vàng. Hai trong số các thành phần (màu vàng) này nối với nhau ở một điểm nào đó, còn ở gần chỗ bắt chéo này thì chúng tách rời nhau.

Một nhận xét tuyệt vời là: nếu một giản đồ nút có thể được tô bằng ba màu, tuân theo hai quy tắc trên, thì nó vẫn giữ nguyên những tính chất ấy sau bất kỳ một bước Reidemeister nào. Bạn có thể chứng minh điều này một cách dễ dàng bằng cách tìm ra các màu sẽ biến đổi thế nào sau các bước ấy. Chẳng hạn, nếu tôi không xoắn thêm một vòng phụ trong hình vẽ trên thì tôi vẫn giữ nguyên màu sắc trong đó và mọi thứ vẫn thế. Tại sao điều này lại tuyệt vời? Bởi vì nó chỉ ra rằng nút ba lá thực sự là một nút. Để lập luận, giả sử rằng nút được cởi ra; khi đó sau một số bước Reidemeister nó biến thành một vòng không nút. Vì ta có thể tô màu nút ba lá một cách dễ dàng để tuân theo hai quy tắc trên, nên chính điều này cũng phải áp dụng được cho vòng không nút. Nhưng một vòng không nút chỉ gồm có một sợi dây duy nhất không có bất kỳ sự chồng chéo nào,

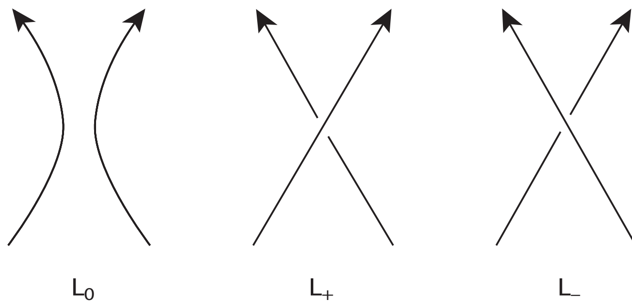
nên cách duy nhất để tô màu nó là sử dụng cùng một màu trên cả sợi dây. Nhưng điều này vi phạm quy tắc thứ nhất. Như vậy, bằng phản chứng, ta đã chứng minh được rằng không tồn tại chuỗi các bước Reidemeister nào như thế cả, tức là nút ba lá không thể tháo cởi được.

Điều đó chứng tỏ nút ba lá là một nút, nhưng không giúp ta phân biệt nó với các nút khác, như nút kép đối xứng hay nút stevedore. Một trong những cách sớm nhất có hiệu quả để làm điều đó đã được Alexander khám phá ra. Nó được suy ra từ các phương pháp đại số trừu tượng của Reidemeister, nhưng nó dẫn tới một bất biến có tính đại số theo nghĩa quen thuộc hơn của đại số dạy trong nhà trường. Nó được gọi là đa thức Alexander, và nó liên kết các nút với một công thức tạo bởi lũy thừa của một biến x. Nói một cách chặt chẽ, thuật ngữ đa thức chỉ được áp dụng cho các số mũ dương, nhưng ở đây chúng ta vẫn chấp nhận cả các số mũ âm nữa. Bảng 2 liệt kê một vài đa thức Alexander. Nếu hai nút trong bảng có đa thức Alexander khác nhau (các nút được nêu ở đây đều thế trừ nút granny và nút kép đối xứng) thì chúng phải có bản chất topo khác nhau. Điều ngược lại không đúng: nút kép đối xứng và nút granny có cùng đa thức Alexander nhưng vào năm 1952, Ralph Fox đã chứng minh được rằng về phương diện topo thì chúng khác nhau. Phép chứng minh đòi hỏi những kiến thức topo phức tạp đến kinh ngạc. Nó khó hơn mọi người tưởng rất nhiều.

Nút	Đa thức
Không-nút	1
Ba lá	$x - 1 + x^{-1}$
Hình số 8	$-x + 3 - x^{-1}$
Reef (đối xứng kép)	$x^2 - 2x + 3 - 2x^{-1} + x^{-2}$
Granny	$x^2 - 2x + 3 - 2x^{-1} + x^{-2}$
Stevedore	$-2x + 5 - 2x^{-1}$

Bảng 2 Các đa thức Alexander của các nút.

Khoảng sau năm 1960, lý thuyết nút đã rơi vào tình trạng đình trệ về mặt topo, nó trở nên im ắng hoàn toàn trong một đại dương bao la các câu hỏi còn để ngỏ, chờ đợi một luồng khí khai mở sáng tạo thổi vào. Và điều đó đã đến vào năm 1984, khi nhà toán học người New Zealand Vaughan Jones đã có một ý tưởng rất đơn giản mà có lẽ bất kỳ ai từ sau thời Reidemeister cũng có thể nghĩ tới. Jones không phải là một nhà lý thuyết nút, thậm chí cũng không phải là một nhà topo học. Ông là một nhà giải tích, làm việc với đại số các toán tử, một lĩnh vực có liên quan rất nhiều đến vật lý toán. Hoàn toàn không có gì đáng ngạc nhiên rằng những ý tưởng này có thể áp dụng cả cho lý thuyết nút, vì các nhà toán học và vật lý học đã từng biết tới những mối liên kết rất thú vị giữa đại số toán tử và các dây tết, một dạng đặc biệt của nút đa-sợi. Bất biến nút mới mà ông khám phá ra, gọi là đa thức Jones, cũng được định nghĩa bằng cách dùng giản đồ nút và ba loại bước. Tuy nhiên, các bước lại không bảo toàn loại topo của nút; tức chúng không bảo toàn "đa thức Jones". Dù vậy, điều rất đáng ngạc nhiên là ý tưởng này vẫn có thể sửa đổi để vận hành được và các đa thức Jones trở thành một bất biến nút.



Hình 30 Các bước của Jones.

Đối với bất biến này chúng ta phải chọn một hướng cụ thể dọc theo nút, được chỉ bằng một mũi tên. Đa thức Jones $V(x)$ được định nghĩa bằng 1 đối với không-nút. Với một nút L_0 bất kỳ đã cho, chuyển hai sợi phân biệt lại gần nhau mà không làm thay đổi bất kỳ chỗ bắt chéo nào trong giản đồ của nó. Phải rất thận trọng để gióng các hướng như trên hình vẽ: đó là lý do phải cần tới các mũi tên, và quá trình này sẽ không thể vận hành được nếu không có chúng. Thay thế miền L_0 bởi hai sợi cắt nhau theo hai cách khả dĩ (hình 30). Ký hiệu các giản đồ nút tạo thành sau phép thay thế này là L_+ và L_-. Bây giờ hãy định nghĩa:

$$(x^{1/2} - x^{-1/2})V(L_0) = x^{-1}V(L_+) - xV(L_-)$$

Bằng cách bắt đầu với không-nút và áp dụng các bước nói trên một cách đúng đắn, bạn có thể tìm ra đa thức Jones cho một nút bất kỳ. Thật bí ẩn, hóa ra nó lại là một bất biến topo. Và nó còn làm được những điều tốt hơn đa thức Alexander truyền thống: chẳng hạn, nó phân biệt nút kép đối xứng với nút granny, bởi vì chúng có các đa thức Jones khác nhau.

Khám phá của Jones đã mang lại cho ông huy chương Fields, giải thưởng uy tín nhất của toán học. Nó cũng gây ra sự bùng nổ các bất biến nút mới. Năm 1985, bốn nhóm các nhà toán học khác nhau, gồm tám người tất cả, đã đồng thời

khám phá ra cùng một sự tổng quát hóa của đa thức Jones và gửi bản thảo của họ một cách độc lập tới cùng một tạp chí. Tất cả bốn chứng minh đều khác nhau, và biên tập viên đã khuyên các tác giả hợp lực lại và cùng công bố một bài báo tổng hợp. Bất biến của họ được gọi là đa thức HOMFLY, cái tên được ghép từ những chữ cái đầu trong tên của họ. Nhưng ngay cả đa thức Jones và HOMFLY cũng chưa trả lời được hoàn toàn ba câu hỏi của lý thuyết nút. Người ta vẫn còn chưa biết một nút với đa thức Jones bằng 1 có phải là một không-nút hay không, mặc dù nhiều nhà topo học cho rằng điều này có lẽ là đúng. Có các nút phân biệt về mặt topo nhưng lại có cùng đa thức Jones; ví dụ đơn giản nhất được biết đến có mười chỗ chồng chéo trong giản đồ nút của nó. Một phép phân loại có hệ thống của tất cả các nút khả dĩ có thể vẫn còn là một giấc mơ xa vời của các nhà toán học.

Tất cả những điều trên rất đẹp, nhưng liệu có ích lợi gì không? Topo học có nhiều ứng dụng, nhưng hầu hết trong số đó đều là gián tiếp. Các nguyên lý topo học đã cung cấp một cái nhìn sâu sắc và xuyên thấu vào những lĩnh vực khác, có khả năng ứng dụng trực tiếp hơn. Chẳng hạn, hiểu biết của chúng ta về hỗn độn có nền tảng là các tính chất topo của hệ động lực, ví dụ như những dáng điệu kỳ lạ mà Poincaré đã nhận thấy khi ông viết lại bản thảo được giải thưởng của mình (xem Chương 4). Đường siêu cao tốc giữa các hành tinh là một đặc điểm topo của động lực học của Hệ Mặt Trời.

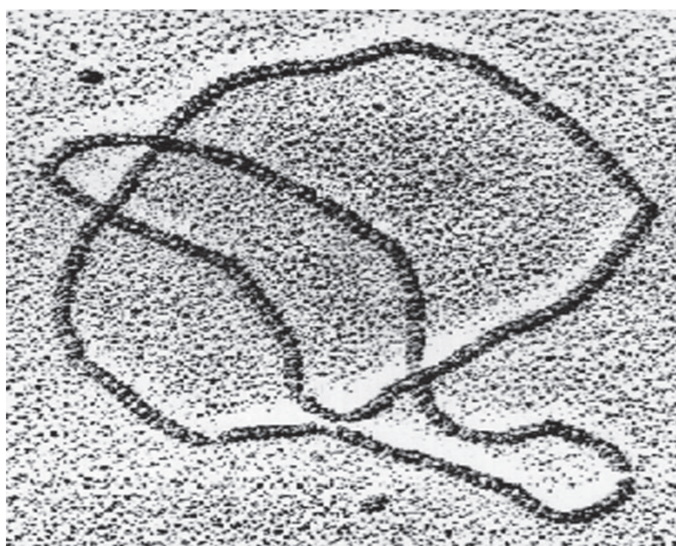
Những ứng dụng bí ẩn hơn của topo học lại xuất hiện ở biên giới của vật lý cơ bản. Ở đây những người sử dụng topo học nhiều nhất là các nhà lý thuyết trường lượng tử, bởi vì lý thuyết siêu dây, một lý thuyết có tham vọng thống nhất cơ

học lượng tử và thuyết tương đối, được xây dựng dựa trên topo học. Ở đây, những tương tự của đa thức Jones trong lý thuyết nút đã phát sinh trong bối cảnh các giản đồ Feynman, giản đồ cho biết các hạt lượng tử như electron và photon chuyển động trong không-thời gian, va chạm, hợp nhất và phân rã như thế nào. Giản đồ Feynman hơi giống với giản đồ nút, và những ý tưởng của Jones có thể được mở rộng tới phạm vi đó.

Đối với tôi, một trong những ứng dụng hấp dẫn nhất của topo học là việc sử dụng nó trong sinh học ngày càng nhiều, giúp chúng ta hiểu được sự vận hành của phân tử sự sống, đó là ADN. Topo học xuất hiện trong sinh học bởi ADN là một chuỗi xoắn kép, giống như hai tay vịn cầu thang xoắn ốc quấn quanh nhau. Hai sợi (mạch) ở đây được xoắn rất phức tạp, và các quá trình sinh học quan trọng, đặc biệt là cách một tế bào sao chép ADN của nó khi phân chia, phải tính đến topo học phức tạp này. Khi Francis Crick và James Watson công bố công trình của họ về cấu trúc phân tử của ADN vào năm 1953, họ đã kết thúc công trình này với một ám chỉ ngắn gọn về một cơ chế sao chép khả dĩ có thể xảy ra trong quá trình phân chia tế bào, trong đó hai sợi được kéo ra xa nhau và mỗi sợi lại được sử dụng như một khuôn mẫu cho một bản sao chép mới. Họ không muốn tuyên bố quá nhiều bởi vì họ ý thức được rằng có những trở ngại về mặt topo để kéo các sợi đã xoắn bện vào nhau ra xa. Suy xét quá cụ thể về đề xuất của họ ở giai đoạn còn quá sớm như vậy sẽ chỉ làm cho tình hình trở nên rối ren hơn.

Cuối cùng, hóa ra Crick và Watson lại đúng. Những trở ngại về mặt topo là có thực, nhưng sự tiến hóa đã cung cấp những phương pháp để khắc phục chúng, như các enzym đặc biệt để cắt và dán các sợi ADN. Không phải ngẫu nhiên mà tên

của một trong số các enzym đó lại là topoisomerase. Trong những năm 1990, các nhà toán học và sinh học phân tử đã sử dụng topo học để phân tích sự xoắn và xoay của ADN nhằm nghiên cứu cách thức hoạt động của nó trong tế bào, nơi mà các phương pháp nhiễu xạ tia X thông thường không thể sử dụng được bởi vì chúng đòi hỏi các ADN phải ở dạng tinh thể.



Hình 31 Vòng ADN tạo nên một nút ba lá.

Một số enzym, gọi là tái tổ hợp, cắt hai sợi của ADN và nối chúng lại theo một cách khác. Để xác định một enzym như thế hoạt động như thế nào khi nó nằm trong tế bào, các nhà sinh học đã áp dụng enzym đó cho một vòng kín của ADN. Sau đó họ quan sát hình dạng của vòng đã bị biến đổi qua kính hiển vi điện tử. Nếu enzym đó nối các sợi phân biệt với nhau, thì hình ảnh thu được sẽ là một nút, như hình 31. Nếu enzym giữ cho các sợi tách rời nhau, thì hình ảnh quan sát được sẽ là hai vòng liên kết với nhau. Các phương pháp từ lý thuyết nút như đa thức Jones và một lý thuyết khác mang tên "rối", sẽ giúp cho ta có thể biết khi nào kết quả là một nút hoặc một liên kết, và điều này cung cấp cho ta thông tin chi

tiết về cách hoạt động của một enzym. Chúng cũng đưa ra các tiên đoán mới đã được kiểm chứng bằng thực nghiệm, cho ta thêm tự tin rằng cơ chế do các tính toán topo chỉ ra là đúng đắn[1].

Tóm lại, bạn không bước vào thế giới topo mỗi ngày trong cuộc sống đời thường, ngoại trừ cái máy rửa bát mà tôi đề cập đến ở đầu chương này. Nhưng ẩn sau đó, topo học đã cung cấp thông tin về toàn bộ dòng chủ lưu của toán học, tạo điều kiện phát triển những kỹ thuật khác với các ứng dụng thực tế rõ ràng hơn. Đó là lý do tại sao các nhà toán học lại coi trọng topo học đến thế, trong khi phần còn lại của thế giới chẳng mấy khi nghe về nó.

7 Hình mẫu của may rủi

Phân bố chuẩn

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Hàm mật độ xác suất
của số này
bằng
một
chia cho
trừ
kỳ vọng
bình phương
độ lệch chuẩn
hai
lũy thừa
2,71828
căn bậc hai
hai
3,14159
độ lệch chuẩn

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Xác suất để quan sát được một giá trị cụ thể của dữ liệu đạt cực đại ở gần giá trị trung bình và giảm nhanh khi càng ra xa giá trị trung bình đó. Tốc độ suy giảm phụ thuộc vào một đại lượng có tên là độ lệch chuẩn.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó xác định một họ phân bố xác suất hình chuông đặc biệt, thường là những mô hình tốt của những quan sát thường gặp trong thế giới thực.

Nó đã dẫn tới những gì?

Khái niệm “người trung bình”, kiểm định ý nghĩa của các kết quả thí nghiệm, như các thử nghiệm trong y học, và một xu hướng sai lầm là mặc định phân bố chuẩn cứ như là không tồn tại một loại phân bố nào khác.

Toán học nghiên cứu các hình mẫu. Sự vận hành đầy tính ngẫu nhiên của may rủi dường như còn xa mới là những hình mẫu mà bạn có thể nhận biết được. Thực tế, một trong những định nghĩa hiện đang lưu hành của từ "ngẫu nhiên" có thể được tóm lại thành "không có hình mẫu nào cả". Các nhà toán học đã nghiên cứu các hình mẫu trong hình học, đại số và giải tích hàng thế kỷ trước khi họ nhận ra rằng ngay cả tính ngẫu nhiên cũng có những hình mẫu riêng của mình. Nhưng hình mẫu của may rủi không xung đột với ý tưởng cho rằng các sự kiện ngẫu nhiên không có hình mẫu, bởi vì tính quy luật của các sự kiện ngẫu nhiên đều mang tính thống kê. Chúng là đặc điểm của một loạt các sự kiện, như hành vi trung bình sau một chuỗi dài các phép thử. Chúng không cho chúng ta biết về sự kiện nào xảy ra ở thời điểm nào. Chẳng hạn, nếu bạn tung đi tung lại một con xúc xắc[1] thì bạn sẽ nhận được mặt 1 với tỉ lệ một phần sáu, và các mặt 2, 3, 4, 5, 6 cũng với tỉ lệ như thế – rõ ràng là một hình mẫu có tính thống kê. Nhưng điều này cũng không cho bạn biết mặt nào sẽ xuất hiện ở lần tung tới.

Mãi tới thế kỷ 19, các nhà toán học và các nhà khoa học mới nhận ra tầm quan trọng của các hình mẫu thống kê trong các sự kiện mang tính may rủi. Ngay cả hành động của con người, như là tự tử hay ly dị, cũng đều là đối tượng của các định luật định lượng, về trung bình và trong thời gian dài. Phải mất nhiều thời gian người ta mới dần quen được với

những cái mà thoạt nhìn dường như mâu thuẫn với ý chí tự do. Nhưng ngày nay các quy luật mang tính thống kê chính là cơ sở của các thử nghiệm trong y học, chính sách xã hội, phí bảo hiểm, phân bố rủi ro và thể thao chuyên nghiệp.

Và bài bạc, chính là điểm mà mọi chuyện bắt đầu.

Thật thích hợp là mọi thứ đã khởi đầu từ một học giả nghiện cờ bạc tên là Girolamo Cardano. Gần như là một kẻ vô công rồi nghề, Cardano đã thu được nhiều tiền mặt từ việc đặt cược vào các ván cờ và các trò may rủi. Ông đã sử dụng trí thông minh tuyệt vời của mình cho cả hai thứ. Cờ thì không phụ thuộc vào sự may rủi, vì để thắng đòi hỏi phải có một trí nhớ tốt để nhớ các vị trí và các nước đi chuẩn, và một trực giác nhạy bén về xu hướng của ván cờ. Tuy nhiên, trong một trò chơi may rủi, người chơi là đối tượng cho ý thích bất chợt của thần may mắn. Cardano nhận ra rằng ông có thể áp dụng khả năng toán học của mình để thu lợi ngay cả trong mối quan hệ hỗn loạn ấy. Ông có thể nâng cao hiệu quả của mình trong các trò chơi may rủi nhờ nắm bắt được ưu thế – tức khả năng thắng hoặc thua – tốt hơn các đối thủ của ông. Ông cũng đã viết một cuốn sách về chủ đề này, nhan đề *Sách về các trò chơi may rủi (Liber de Ludo Aleae).* Nhưng tới tận năm 1633 nó mới được xuất bản. Nội dung học thuật của cuốn sách là sự trình bày có hệ thống đầu tiên về toán xác suất. Nội dung không mấy hay ho trong đó là một chương về cách lừa gạt và tránh bị trừng phạt.

Một trong những nguyên lý cơ bản của Cardano là, trong một trò cá cược sòng phẳng, tiền đặt cược phải tỉ lệ với số cách chơi mà trong đó mỗi người chơi có thể giành chiến

thắng. Chẳng hạn, giả sử những người chơi tung một quân xúc xắc, và người chơi đầu tiên sẽ thắng nếu thu được mặt 6, trong khi người chơi thứ hai sẽ thắng nếu thu được một mặt nào đó khác. Trò chơi này sẽ rất thiếu công bằng nếu mỗi người đều đặt cược cùng một số tiền, bởi vì người đầu tiên chỉ có một cách duy nhất để giành chiến thắng, trong khi người kia có tới năm. Nếu người thứ nhất đặt 1 bảng, và người thứ hai đặt 5 bảng, thì sự may mắn mới công bằng. Cardano ý thức được rằng phương pháp tính toán may mắn công bằng này phụ thuộc vào các cách khác nhau để giành chiến thắng một cách công bằng, nhưng trong các trò xúc xắc, đánh bài hay tung đồng xu, rõ ràng là ta biết làm thế nào để đảm bảo chắc chắn rằng điều kiện này có thể áp dụng được. Tung đồng xu cho ta hai kết cục, sấp hoặc ngửa, và chúng có khả năng xảy ra như nhau nếu như đó là một đồng xu chuẩn. Nếu như đồng xu có xu hướng cho kết cục ngửa nhiều hơn sấp, thì rõ ràng đồng xu đó bị thiên lệch – gian lận. Tương tự như vậy, sáu kết cục của quân xúc xắc chuẩn cũng phải gần như nhau, hay như 52 kết cục cho một lá bài được lấy ra từ cả bộ bài.

Tính logic đằng sau khái niệm công bằng ở đây hơi luẩn quẩn, bởi vì chúng ta suy ra sự sai lệch từ sự không ăn khớp với các điều kiện số hiển nhiên. Nhưng các điều kiện này được củng cố từ nhiều thứ hơn là chỉ thuần túy từ việc đếm. Chúng dựa trên cảm giác về đối xứng. Nếu đồng xu là một cái đĩa kim loại phẳng, mật độ đều, thì hai kết cục khi tung sẽ liên quan với nhau thông qua sự đối xứng của đồng xu (lật nó). Với quân xúc xắc, các kết cục thu được liên quan đến các đối xứng của hình lập phương. Và cho các lá bài, đối xứng hiển nhiên nhất chính là việc không lá nào quá khác với lá nào, ngoại trừ giá trị ghi trên mặt chúng. Các tần suất

1/2, 1/6, 1/52 với bất kỳ kết cục cho trước nào đều dựa trên các đối xứng cơ bản đó. Một đồng xu không cân đối hay một quân xúc xắc bị lệch có thể được tạo ra bằng cách chèn thêm trọng lượng; một lá bài thiên lệch có thể được tạo ra bằng cách đánh dấu tinh vi ở mặt sau nhằm tiết lộ giá trị của nó cho những ai đã biết dấu hiệu đó.

Còn có những cách lừa lọc khác nữa liên quan tới sự khéo léo của bàn tay, chẳng hạn như đánh tráo quân xúc xắc lệch vào và ra khỏi trò chơi trước khi mọi người nhận ra rằng lúc nào nó cũng cho kết cục là mặt 6. Nhưng cách "lừa đảo" an toàn nhất là chiến thắng bằng chiến lược, nó tuyệt đối trung thực, và chiến thắng là do nắm được ưu thế tốt hơn các đối thủ của mình. Theo một nghĩa nào đó, bạn có một nền tảng cao về đạo đức, nhưng bạn có thể cải thiện cơ may tìm ra một đối thủ ngây thơ phù hợp bằng việc lừa đảo không phải các ưu thế thật mà là ưu thế mà đối thủ của bạn trông đợi. Có nhiều ví dụ trong đó ưu thế thật khác xa ưu thế mà nhiều người phỏng đoán một cách tự nhiên.

Một ví dụ là trò chơi vương miện và cái neo, được chơi phổ biến trong giới thủy thủ Anh ở thế kỷ 18. Nó sử dụng ba quân xúc xắc, mỗi quân không mang các con số từ 1 đến 6 mà là sáu ký hiệu: một vương miện, một mỏ neo và bốn lá bài rô, bích, cơ và chuồn. Những ký hiệu này cũng được dán trên một tấm thảm. Người chơi đặt cược bằng cách để tiền trên thảm và tung ba quân xúc xắc. Nếu bất kỳ ký hiệu nào mà họ đã đặt cược hiện ra, nhà cái sẽ trả họ tiền cược, nhân với số quân xúc xắc có hiện ký tự đã được đặt cược. Chẳng hạn, nếu họ đặt 1 bảng cho vương miện, và hai vương miện xuất hiện, thì họ sẽ thắng 2 bảng thêm vào số tiền đặt cược của họ, còn nếu ba vương miện xuất hiện, họ sẽ giành được 3 bảng thêm

vào tiền cược. Tất cả nghe có vẻ khá hợp lý, nhưng lý thuyết xác suất cho ta thấy rằng, nếu chơi trong thời gian dài thì một người chơi có thể thua 8% tiền đặt cược của mình.

Lý thuyết xác suất bắt đầu cất cánh khi nó thu hút được sự chú ý của Blaise Pascal. Pascal là con của một nhân viên thu thuế ở Rouen và là một đứa trẻ phi thường. Năm 1646, ông cải đạo sang phái Jansen, một giáo phái của công giáo La Mã mà Giáo hoàng Innocent X xếp vào dạng tà đạo năm 1655. Trước đó, vào năm 1654, Pascal đã từng trải nghiệm cái mà ông gọi là sự “cải đạo” lần thứ hai, có lẽ là do tai nạn suýt chết khi những con ngựa kéo xe của ông ngã xuống cạnh cầu Neuilly và cỗ xe của ông suýt rơi khỏi cầu. Kể từ đó, hầu như các công trình của ông đều viết về triết học của tôn giáo. Nhưng ngay trước khi tai nạn xảy ra, ông và Fermat đã viết thư cho nhau để trao đổi về một vấn đề toán học có liên quan đến cờ bạc. Hiệp sĩ de Meré, một nhà văn Pháp, tự xưng là hiệp sĩ mặc dù ông không hề được phong tước này, là một người bạn của Pascal và ông đã đặt câu hỏi rằng tiền đặt cược trong một chuỗi các trò chơi may rủi sẽ được phân chia như thế nào nếu như cuộc chơi này bị dừng lại giữa chừng. Câu hỏi này không phải là mới; nó đã xuất hiện từ thời Trung cổ rồi. Cái mới ở đây là lời giải đáp cho nó. Trong quá trình trao đổi thư từ, Pascal và Fermat đã tìm ra câu trả lời đúng. Cùng với điều đó, họ đã tạo ra một ngành toán học mới: lý thuyết xác suất.

Khái niệm trung tâm trong lời giải của họ chính là thứ mà ngày nay chúng ta gọi là “kỳ vọng”. Trong một trò may rủi, đó là giá trị trung bình mà người chơi thu về trong một thời gian dài. Chẳng hạn, có thể thu về 92 xu trong trò chơi vương miện

và mỏ neo với tiền đặt cược là 1 bảng. Sau khi cải giáo lần thứ hai, Pascal đã bỏ lại quá khứ cờ bạc ở phía sau, nhưng ông đã tận dụng sự giúp đỡ của nó trong một luận điểm triết học nổi tiếng, sự đặt cược của Pascal[2]. Như một người chống đối, Pascal giả định rằng một số người có lẽ đã xem sự tồn tại của Chúa là rất ít khả năng. Trong cuốn *Các tư tưởng (Pensées)* của mình, xuất bản năm 1669, Pascal đã phân tích các hệ quả từ quan điểm xác suất:

> Chúng ta hãy thử cân cái được và cái mất trong việc đặt cược rằng Chúa [tồn tại]. Chúng ta hãy đánh giá hai cơ hội. Nếu bạn thắng, bạn sẽ được tất; nếu bạn thua, bạn sẽ mất tất. Vậy thì không nên lưỡng lự nữa mà hãy đặt cược rằng Ngài tồn tại... Ở đây có vô hạn cuộc sống hạnh phúc đời đời để mà được, một cơ hội thắng trước một số hữu hạn nguy cơ thua, và thứ mà bạn đặt cược cũng là hữu hạn. Và như vậy đề nghị của chúng tôi có một sức mạnh vô hạn khi chỉ có hữu hạn để đặt cược trong một trò chơi mà ở đó sự rủi ro của được và mất là như nhau, nhưng có vô hạn để được.

Lý thuyết xác suất đã trở thành lĩnh vực toán học hoàn chỉnh vào năm 1713, khi Jacob Bernoulli công bố cuốn *Nghệ thuật của phỏng đoán (Ars Conjectandi)*. Ông bắt đầu với “định nghĩa làm việc” thông thường của xác suất của một biến cố: xét về lâu dài, tỉ phần của các trường hợp mà sự kiện đó xảy ra gần như là tất cả thời gian. Tôi nói “định nghĩa làm việc” là bởi vì cách tiếp cận này đối với xác suất sẽ gặp khó khăn nếu bạn muốn thử làm cho nó trở thành cơ bản. Chẳng hạn, giả sử rằng tôi có một đồng xu chuẩn, và tôi tung nó liên tục. Phần lớn thời gian tôi sẽ thu được một dãy ngẫu nhiên các

mặt sấp và ngửa, và nếu tôi tung nó đủ lâu tôi sẽ thu được mặt ngửa gần như trong một nửa thời gian. Tuy nhiên, hiếm khi tôi thu được mặt ngửa chính xác trong nửa thời gian: điều này là không thể nếu như tôi tung đồng xu một số lẻ lần chẳng hạn. Nếu tôi cố gắng sửa đổi định nghĩa bằng cách lấy cảm hứng từ giải tích, tức là xác suất thu được mặt ngửa là giới hạn của các mặt ngửa thu được khi số lần tung tiến ra vô hạn, thì tôi sẽ phải chứng minh rằng xác suất đó tồn tại. Nhưng đôi khi giới hạn đó không tồn tại. Ví dụ, giả sử rằng dãy các mặt ngửa (N) và sấp (S) thu được có dạng:

SNNSSSNNNNNNSSSSSSSSSSSS…

với một sấp, hai ngửa, ba sấp, sáu ngửa, mười hai sấp, và cứ thế – số lần xuất hiện các mặt tăng gấp đôi ở mỗi giai đoạn sau lần xuất hiện liên tiếp ba mặt sấp. Sau khi tung ba lần, tỉ lệ nhận được mặt ngửa là 2/3, sau sáu lần là 1/3, và sau 12 lần lại là 2/3, sau 24 lần là 1/3,... như vậy tỉ lệ này dao động qua lại giữa 2/3 và 1/3, và bởi vậy nó không có giới hạn xác định.

Đồng ý là một dãy kết cục như vậy khi tung đồng xu rất ít khả năng xảy ra, nhưng để định nghĩa "ít khả năng xảy ra" thì ta cần phải định nghĩa xác suất, mà đó lại chính là cái mà giới hạn nói trên được giả thiết là sẽ đạt tới. Nghĩa là logic của chúng ta là một vòng tròn luẩn quẩn. Vả lại, thậm chí nếu giới hạn đó tồn tại, thì nó có thể không phải là giá trị "đúng" 1/2. Một trường hợp đặc biệt xảy ra là đồng xu luôn ngửa, khi ấy giới hạn bằng 1. Lại một lần nữa, điều này gần như chẳng bao giờ xảy ra, nhưng...

Bernoulli đã quyết định tiếp cận vấn đề tổng thể theo hướng ngược lại. Xuất phát bằng cách *định nghĩa* đơn giản

xác suất của mặt ngửa và sấp là số *p* nằm giữa 0 và 1. Đồng xu là chuẩn nếu *p* = 1/2 và lệch nếu nó nhận giá trị khác. Từ đây Bernoulli chứng minh một định lý cơ bản, luật của các số lớn. Đưa vào một quy tắc hợp lý để gán các giá trị xác suất cho một dãy các sự kiện lặp lại, luật số lớn phát biểu rằng, về lâu dài, ngoại trừ một phần nhỏ các phép thử trở nên nhỏ tùy ý, tỉ lệ ngửa thực sự tiến tới một giới hạn, và giới hạn đó là *p*. Về mặt triết học, định lý này chứng tỏ rằng bằng cách gán các xác suất – tức là các con số – theo một cách tự nhiên, cách giải thích "tỉ lệ xảy ra biến cố trong thời gian dài, trừ một số ngoại lệ hiếm hoi" là hợp thức. Như vậy, Bernoulli đã đưa ra quan điểm rằng các số được gán cho xác suất đã cung cấp một mô hình toán học nhất quán cho quá trình tung đồng xu liên tục.

Chứng minh của Bernoulli dựa trên một hình mẫu số học, một thứ đã quá quen thuộc với Pascal. Nó thường được gọi là tam giác Pascal, mặc dù ông không phải là người đầu tiên tìm ra nó. Các nhà sử học đã lần ra nguồn gốc của nó ở trong *Chandas Shastra*, một cuốn sách viết bằng chữ Phạn được gán cho Pingala, viết vào khoảng giữa các năm 500 và 200 TCN. Bản thảo gốc thì không còn nữa, nhưng công trình này được biết đến qua các bình luận bằng tiếng Hindu ở thế kỷ 10. Tam giác Pascal trông thế này:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

trong đó tất cả các hàng đều bắt đầu và kết thúc bởi 1, và mỗi số trong hàng là tổng của hai số liên tiếp ngay bên trên nó. Chúng ta gọi đó là các hệ số nhị thức, bởi vì chúng phát sinh từ đại số của nhị thức (hai biến) $(p + q)^n$ và bạn có thể thấy tam giác Pascal xuất hiện ở hệ số của các số hạng khác nhau. Cụ thể là:

$$(p + q)^0 = 1$$
$$(p + q)^1 = p + q$$
$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$
$$(p + q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

và tam giác Pascal được thấy như hệ số của các số hạng riêng rẽ.

Nhận thức then chốt của Bernoulli là ở chỗ nếu chúng ta tung đồng xu n lần, với xác suất thu được mặt ngửa là p, thì xác suất của một số lần tung cụ thể nhận được mặt ngửa là hệ số tương ứng của $(p + q)^n$ với $q = 1 - p$. Chẳng hạn, nếu tôi tung đồng xu ba lần, khi đó tám kết quả khả dĩ nhận được là:

NNN
NNS NSN SNN
NSS SNS SSN
SSS

với các nhóm được tôi chia theo số lần nhận được mặt ngửa. Như vậy, trong tổng số tám kết cục có thể nhận được, có:

1 nhóm với 3 mặt ngửa
3 nhóm với 2 mặt ngửa
3 nhóm với 1 mặt ngửa
1 nhóm với 0 mặt ngửa

Mối liên kết giữa kết quả này với các hệ số nhị thức không phải là sự trùng hợp ngẫu nhiên. Nếu bạn khai triển công thức đại số $(N + S)^3$ nhưng không rút gọn các số hạng đồng dạng lại, bạn sẽ thu được:

$$NNN + NNS + NSN + SNN + NSS + SNS + SSN + SSS$$

Rút gọn lại theo số lần thu được mặt ngửa ta được:

$$N^3 + 3N^2S + 3NS^2 + S^3$$

Sau cùng, chỉ còn là vấn đề thay thế N và S bằng xác suất của nó, tương ứng là p hoặc q mà thôi.

Nhưng ngay cả trong trường hợp này, mỗi kết cục đặc biệt như NNN và SSS chỉ xảy ra một lần trên tám, và các kết cục thông thường hơn xuất hiện trong sáu kết cục còn lại. Để chứng minh luật số lớn của Bernoulli, ta phải cần tới một tính toán phức tạp hơn sử dụng các tính chất cơ bản của các hệ số nhị thức.

Các tiến bộ toán học thường xảy ra do sự thiếu hiểu biết. Khi các nhà toán học không biết làm thế nào để tính một thứ gì đó quan trọng, họ thường tìm cách rón rén tiếp cận nó một cách gián tiếp. Trong trường hợp chúng ta đang nói tới, vấn đề là tính toán các hệ số nhị thức. Đã đành là có một công thức tường minh, nhưng chẳng hạn nếu bạn muốn biết xác suất nhận được 42 mặt ngửa khi tung đồng xu 100 lần, bạn sẽ phải thực hiện 200 phép nhân và rút gọn một phân số rất phức tạp. (Cũng có cách làm tắt, nhưng vẫn rất rối rắm). Trong chưa đầy 1 giây, máy tính của tôi đã cho kết quả là

$$28.258.808.871.162.574.166.368.460.400p^{42}q^{58}$$

nhưng Bernoulli không có thứ xa xỉ ấy. Mà cũng chẳng ai có cho tới tận những năm 1960 và hệ thống đại số của máy tính còn chưa thực sự phổ biến rộng rãi mãi tới cuối những năm 1980.

Vì không thể tính toán trực tiếp như vậy, nên những hậu bối ngay sau Bernoulli đã cố gắng tìm ra những phép gần đúng (xấp xỉ) tốt. Vào khoảng năm 1730, Abraham De Moivre đã đề xuất một công thức xấp xỉ để tính các xác suất có liên quan với việc tung đi tung lại một đồng xu lệch. Cách làm này dẫn tới khám phá hàm sai số hay phân bố chuẩn, thường được nhắc đến dưới cái tên "đường cong hình chuông" do hình dạng của nó. Dưới đây là điều ông đã chứng minh được. *Phân bố chuẩn* $\Phi(x)$ với kỳ vọng μ và phương sai σ^2 được định nghĩa bởi công thức:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

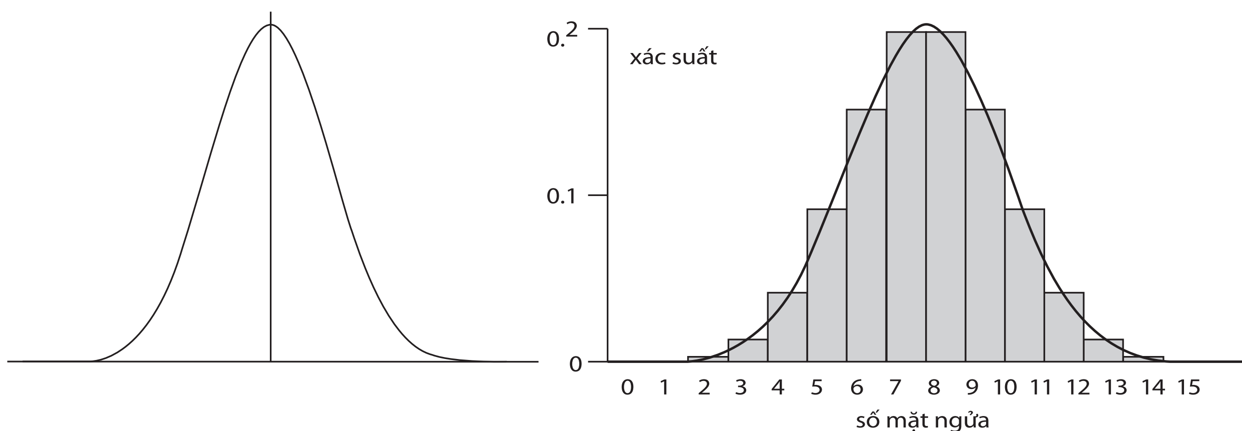
Khi đó với n lớn, xác suất nhận được m mặt ngửa sau khi tung đồng xu lệch n lần sẽ rất gần với $\Phi(x)$ khi

$$x = m/n - p, \mu = np, \sigma = npq$$

Ở đây, "kỳ vọng" có nghĩa là giá trị trung bình, còn "phương sai" là độ đo sự phân tán của dữ liệu – tức độ rộng của đường hình chuông. Căn bậc hai của phương sai, tức bản thân σ, được gọi là độ lệch chuẩn. Đường cong trên hình 32 (*trái*) cho thấy sự phụ thuộc của $\Phi(x)$ vào giá trị của x. Đường cong này trông hơi giống một quả chuông, từ đó mà có cái tên không chính thức nói trên. Đường cong hình chuông là một ví dụ của một phân bố xác suất; điều này có nghĩa là xác suất để nhận được dữ liệu nằm giữa hai giá trị đã cho bằng diện tích bên dưới đường cong và giữa hai đường thẳng đứng tương ứng với hai giá trị đó. Tổng diện tích nằm dưới đường cong

hình chuông bằng 1, đó là nhờ hệ số $\sqrt{2\pi}$ mà ta không hề trông đợi.

Ý tưởng này có thể được nắm bắt dễ dàng thông qua một ví dụ cụ thể. Hình 32 (*phải*) là đồ thị biểu diễn xác suất thu được số mặt ngửa khác nhau khi tung một đồng xu chuẩn 15 lần (các thanh hình chữ nhật) cùng với đường cong xấp xỉ hình chuông.

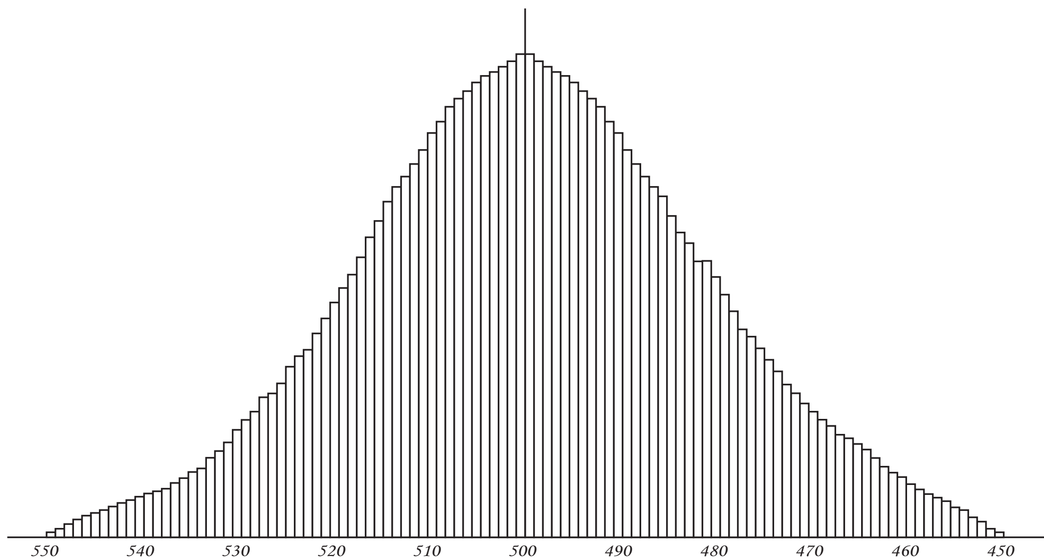


Hình 32 *Trái*: Đường cong hình chuông. *Phải*: Nó xấp xỉ số mặt ngửa trong 15 lần tung một đồng xu chuẩn như thế nào.

Đường hình chuông dần có được địa vị mang tính biểu tượng khi nó bắt đầu làm sáng tỏ các dữ liệu không chỉ trong toán học thuần túy mà còn trong thực nghiệm khoa học xã hội. Năm 1835, một người Bỉ tên là Adolphe Quetelet đã đi tiên phong trong các phương pháp định lượng trong xã hội học. Ông đã thu thập và phân tích một số lượng lớn dữ liệu về tội phạm, tỉ lệ ly dị, tự tử, sinh đẻ, tử vong, chiều cao và cân nặng con người, v.v. – những biến mà không ai nghĩ sẽ phù hợp với một quy luật toán học nào đó, bởi vì, các nguyên nhân đằng sau chúng quá phức tạp và liên quan đến sự lựa chọn của con người. Chẳng hạn, sự đau khổ về tình cảm đã đẩy người ta tới tự sát. Nghe có vẻ hơi khôi hài khi nghĩ rằng thứ đó lại có thể được quy về một công thức đơn giản.

Những phản đối đó sẽ đúng khi bạn muốn dự đoán chính xác xem ai sẽ tự tử, và tự tử khi nào. Nhưng khi Quetelet tập trung vào các vấn đề thống kê, ví dụ như tỉ lệ tự tử trong các nhóm người khác nhau, ở các vùng miền khác nhau, và trong các năm khác nhau, ông bắt đầu nhận ra các hình mẫu. Và chúng đã gây ra tranh cãi: nếu bạn dự đoán ở Paris năm tới sẽ có sáu vụ tự tử, thì làm sao điều đó có ý nghĩa nếu mỗi người trong số đó đều có ý chí tự do? Tất cả họ đều có thể thay đổi suy nghĩ của mình. Nhưng dân số tạo thành từ những người tự tử không định rõ trước, nó xuất hiện như là hệ quả của những lựa chọn không phải chỉ bởi riêng những người tự tử, mà còn bởi những người đã nghĩ đến việc đó nhưng không làm. Con người thực hiện ý chí tự do trong bối cảnh của nhiều thứ khác nữa có ảnh hưởng tới cái mà họ tự do quyết định: ở đây có những ràng buộc bao gồm những vấn đề về tài chính, vấn đề quan hệ, trạng thái tinh thần, nền tảng tôn giáo... Trong mọi trường hợp, đường cong hình chuông không đưa ra được những dự đoán chính xác, mà nó chỉ khẳng định con số nào thường xảy ra nhất mà thôi. Năm hay bảy vụ tự tử có thể xảy ra, để lại rất nhiều chỗ cho những người khác thực thi ý chí tự do và thay đổi ý nghĩ của mình.

Rồi một ngày, cuối cùng dữ liệu sẽ chiến thắng, vì bất cứ lý do gì, con người *trong tập thể* vẫn hành xử dễ dự đoán hơn là các cá nhân. Có lẽ ví dụ đơn giản nhất là về chiều cao. Khi Quetelet vẽ đồ thị tỉ lệ số người với chiều cao cho trước, ông đã nhận được một đường cong hình chuông rất đẹp, thể hiện trên hình 33. Ông nhận được cùng một đường cong như thế cho nhiều biến xã hội khác.



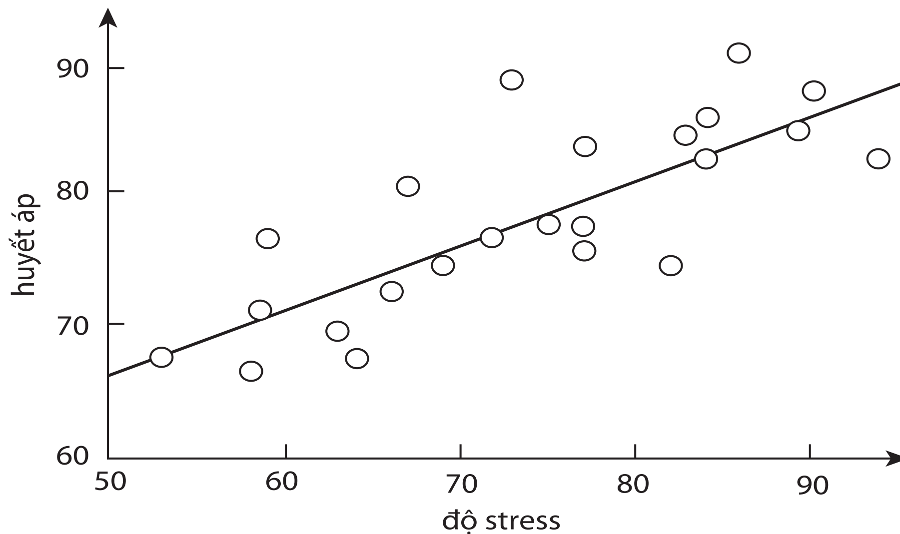
Hình 33 Đồ thị biểu diễn số người (trục tung) có chiều cao đã cho.

Quá ấn tượng bởi kết quả mà mình thu được, Quetelet đã viết hẳn một cuốn sách *Chuyên luận về con người và sự phát triển các năng lực (Sur l'homme et le développement de ses facultés)* xuất bản năm 1835. Trong đó, ông giới thiệu về khái niệm "người trung bình", một cá thể tưởng tượng mà tất cả các khía cạnh đều có giá trị trung bình. Từ lâu người ta đã biết rằng lý thuyết này không hoàn toàn có hiệu lực: "người" trung bình – tức là, một người, như vậy tính toán bao gồm cả phụ nữ và đàn ông – có (hơi ít hơn) một vú, một tinh hoàn, 2,3 con, v.v. Tuy nhiên Quetelet nhìn người trung bình của ông như một sự công bằng xã hội, không chỉ là một hư cấu toán học mang tính khơi gợi. Nó không đến mức quá ngớ ngẩn. Chẳng hạn, nếu sức khỏe con người được chia đều cho tất cả, thì mọi người đều có sức khỏe trung bình. Đây không phải là một mục tiêu thực tế, trừ khi xảy ra những thay đổi khổng lồ về xã hội, nhưng một số người với quan điểm quân bình mạnh mẽ có lẽ sẽ bảo vệ (xem) nó như là một mục tiêu đáng ao ước.

Đường cong hình chuông nhanh chóng trở thành một biểu tượng trong lý thuyết xác suất, đặc biệt là thống kê, một nhánh ứng dụng của nó. Có hai nguyên nhân chính: việc tính toán đường cong hình chuông tương đối đơn giản, và còn có một nguyên nhân lý thuyết cho việc nó cũng xuất hiện trong thực hành. Một trong những nguồn gốc chính cho lối tư duy này là thiên văn học ở thế kỷ 18. Các dữ liệu quan sát thường bị sai lệch do những thay đổi nhỏ trong máy móc, do lỗi của người quan sát, hay đơn giản là do sự chuyển động của các dòng không khí trong khí quyển. Các nhà thiên văn thời đó muốn quan sát các hành tinh, sao chổi và các tiểu hành tinh, và tính toán quỹ đạo của chúng, điều này đòi hỏi phải tìm ra một quỹ đạo phù hợp với dữ liệu nhất. Nhưng sự phù hợp này không bao giờ là hoàn hảo cả.

Giải pháp thực tiễn cho vấn đề này đã xuất hiện trước. Đại thể là thế này: Vẽ một đường thẳng qua vùng dữ liệu sao cho tổng sai số nhỏ nhất có thể. Sai số ở đây phải được coi là một số dương, và cách dễ dàng để nhận được điều này trong khi vẫn giữ không phương hại gì đến đại số ở đây, là bình phương các sai số đó. Như vậy, sai số toàn phần là tổng các bình phương độ lệch của các quan sát so với mô hình đường thẳng đó, và đường thẳng mong muốn sẽ làm tối thiểu hóa tổng đó. Năm 1805, nhà toán học người Pháp Adrien-Marie Legendre đã tìm ra một công thức đơn giản cho đường thẳng này, khiến cho việc tính toán nó trở nên dễ dàng hơn. Kết quả được gọi là phương pháp bình phương tối thiểu. Hình 34 minh họa phương pháp này cho các dữ liệu nhân tạo liên hệ *stress* (được đo qua bảng các câu hỏi) với huyết áp. Đường thẳng trên hình vẽ, được tìm ra nhờ sử dụng công thức của Legendre, là phù hợp nhất với độ đo sai số bình phương. Trong mười năm,

phương pháp bình phương tối thiểu đã trở thành phương pháp chuẩn của các nhà thiên văn Pháp, Phổ và Ý. Trong hai mươi năm sau đó, nó cũng trở thành chuẩn mực ở Anh.



Hình 34 Dùng phương pháp bình phương tối thiểu để liên hệ huyết áp với stress. Các vòng tròn nhỏ: dữ liệu. Đường liền nét: đường thẳng phù hợp nhất.

Gauss đã biến phương pháp bình phương tối thiểu thành nền tảng trong tác phẩm của ông về cơ học thiên thể. Ông bước vào lĩnh vực này từ năm 1801, mở đầu bằng việc dự đoán thành công sự quay trở lại của tiểu hành tinh Ceres sau khi nó bị ẩn trong ánh sáng chói lòa của Mặt Trời, trong khi hầu hết các nhà thiên văn khác đều cho rằng các dữ liệu hiện có là quá hạn chế. Thành công này đã giúp danh tiếng toán học của Gauss vang xa hơn trong công chúng, và mang đến cho ông danh hiệu giáo sư thiên văn học trọn đời của đại học Göttingen. Gauss đã không sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu trong tiên đoán đặc biệt này: những tính toán của ông quy về giải một phương trình đại số bậc tám mà ông đã tìm ra nghiệm nhờ một phương pháp số được khám phá ra một cách đặc biệt. Nhưng trong các công trình sau đó của ông, đỉnh cao là tác phẩm *Lý thuyết chuyển động của*

các thiên thể theo các quỹ đạo conic quanh Mặt Trời (*Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientum*) công bố năm 1809, ông đã đặc biệt nhấn mạnh đến phương pháp bình phương tối thiểu. Ông cũng khẳng định rằng ông đã phát triển ý tưởng này và sử dụng nó 10 năm trước Legendre, làm mọi thứ rối lên đôi chút. Tuy nhiên, điều này rất nhiều khả năng là đúng, và cách chứng minh của Gauss cho phương pháp này cũng khá khác biệt. Legendre coi đó là bài toán làm khớp đường cong, trong khi Gauss lại nhìn nhận nó dưới góc độ làm khớp một phân bố xác suất. Sự biện minh của ông cho công thức này giả định rằng các dữ liệu mà đường thẳng này phải làm khớp tuân theo một đường hình chuông.

Vẫn còn phải biện minh cho sự biện minh này. Tại sao các sai số do quan sát lại phải tuân theo phân bố chuẩn? Năm 1810, Laplace đã đưa ra một câu trả lời đáng ngạc nhiên xuất phát từ thiên văn học. Cách làm chuẩn mực trong rất nhiều ngành khoa học là: cùng một quan sát được thực hiện nhiều lần, độc lập với nhau, và sau đó lấy giá trị trung bình. Vì vậy, sẽ là rất tự nhiên nếu ta mô hình hóa phương pháp này bằng toán học. Laplace sử dụng phép biến đổi Fourier (xem Chương 9) để chứng minh rằng, kết quả trung bình của nhiều quan sát được mô tả bằng đường cong hình chuông, ngay cả nếu các quan sát riêng lẻ không như thế. Kết quả của ông, có tên là định lý giới hạn trung tâm, là một bước ngoặt lớn trong xác suất và thống kê, vì nó đã cung cấp một sự biện minh về mặt lý thuyết cho việc sử dụng phân bố ưa thích của các nhà toán học, đường cong hình chuông, trong việc phân tích các sai số quan sát[3].

Định lý giới hạn trung tâm lựa chọn đường cong hình chuông như là một phân bố xác suất duy nhất phù hợp với kỳ vọng của rất nhiều quan sát lặp đi lặp lại. Nhờ vậy mà nó có tên là "phân bố chuẩn", và được coi là lựa chọn mặc định cho một phân bố xác suất, không chỉ vì phân bố chuẩn có những tính chất toán học thú vị, mà còn vì có một lý do vững chắc cho rằng nó đã mô hình hóa được các dữ liệu thực. Sự tổ hợp các thuộc tính này đã tỏ ra rất hấp dẫn đối với các nhà khoa học có mong muốn hiểu thấu các hiện tượng xã hội, và nó đã cuốn hút Quetelet, bởi vì nó đã cung cấp một cách thức để phân tích dữ liệu từ những hồ sơ lưu trữ. Năm 1865, Francis Galton đã nghiên cứu về mối liên quan giữa chiều cao của trẻ em và cha mẹ chúng. Đó là một phần của mục tiêu rộng lớn hơn: tìm hiểu về tính di truyền – các đặc tính của con người di truyền từ cha mẹ tới con cái như thế nào. Thật trớ trêu, định lý giới hạn trung tâm của Laplace ngay từ đầu đã khiến Galton nghi ngờ về sự tồn tại của kiểu kế thừa này. Và ngay cả khi nó tồn tại, sẽ rất khó chứng minh bởi vì định lý giới hạn trung tâm là một con dao hai lưỡi. Quetelet đã tìm thấy một đường cong hình chuông rất đẹp cho chiều cao, nhưng dường như lại ngụ ý rất ít về những nhân tố khác nhau có ảnh hưởng đến chiều cao, bởi vì định lý giới hạn trung tâm cho dù thế nào cũng tiên đoán một phân bố chuẩn, bất kể phân bố của những nhân tố kia là thế nào. Ngay cả nếu những đặc tính của cha mẹ cũng nằm trong những nhân tố ấy, thì chúng cũng sẽ bị lấn át bởi tất cả những nhân tố khác như dinh dưỡng, sức khỏe, v.v.

Tuy nhiên, đến năm 1889, Galton đã tìm được cách thoát ra khỏi tình thế lưỡng nan này. Cách chứng minh định lý

tuyệt vời của Laplace dựa trên việc lấy trung bình những ảnh hưởng của rất nhiều nhân tố khác nhau, nhưng chúng đều phải thỏa mãn một số điều kiện chặt chẽ. Năm 1875, Galton đã mô tả những điều kiện này là “rất thiếu tự nhiên”, và lưu ý rằng những ảnh hưởng được lấy trung bình này

> đều phải tác dụng độc lập với nhau (1), tất cả phải bình đẳng [tức là đều có cùng phân bố xác suất] (2), tất cả những nhân tố thêm vào được xử lý như những khả năng thay thế đơn giản “trên trung bình” hoặc “dưới trung bình” (3); và được tính toán dựa trên giả định rằng các biến gây ảnh hưởng là nhiều vô hạn (4)....

Trong những điều kiện nói trên, không có điều kiện nào áp dụng được cho sự di truyền của con người. Điều kiện (4) tương đương với giả định của Laplace rằng số các nhân tố được cộng thêm vào tiến ra vô hạn, như vậy nói “nhiều vô hạn” là hơi phóng đại lên một chút; tuy nhiên, cái mà toán học thiết lập là để nhận được một phép gần đúng tốt cho phân bố chuẩn, bạn phải tổ hợp một lượng lớn các nhân tố. Mỗi nhân tố đó đóng góp một phần nhỏ vào giá trị trung bình: chẳng hạn, có một trăm nhân tố thì mỗi nhân tố đóng góp một phần trăm giá trị của nó. Galton gọi những nhân tố như thế là “nhỏ nhặt”. Mỗi nhân tố tự nó chẳng có tác dụng gì đáng kể.

Có một lối thoát tiềm tàng, và Galton đã nắm bắt được. Định lý giới hạn trung tâm cung cấp một điều kiện đủ để cho một phân bố là chuẩn, chứ không phải là điều kiện cần. Ngay cả khi những giả thiết của nó không được thỏa mãn, thì phân bố được quan tâm có thể vẫn là phân bố chuẩn vì *nhiều lý do khác*. Nhiệm vụ của Galton là tìm ra những lý

do ấy là gì. Để có hy vọng về mối liên hệ với sự di truyền thì những nguyên nhân đó phải áp dụng cho một tổ hợp gồm một ít các ảnh hưởng lớn và khác loại, chứ không phải cho một số lớn những ảnh hưởng không đáng kể. Ông đã chậm rãi mò mẫm lời giải và tìm ra nó thông qua hai thí nghiệm, đều được thực hiện vào năm 1877. Một là thiết bị mà ông gọi là *quincunx*, trong đó các viên bi rơi xuống một mặt dốc khi nảy ra khỏi một mảng chông, với cùng một xác suất đi sang trái hoặc phải. Theo lý thuyết, các viên bi sẽ chất đống ở đáy dốc theo phân bố nhị thức, một xấp xỉ rời rạc của phân bố chuẩn, và do vậy chúng sẽ – và thực ra đã – tạo thành một đống gần giống hình chuông, như hình 32 (*phải*). Cái nhìn sâu sắc và then chốt của Galton đó là tưởng tượng tạm dừng các viên bi khi chúng đang lăn xuống trên đoạn dốc. Chúng vẫn tạo thành một đường cong hình chuông, nhưng sẽ hẹp hơn hình chuông cuối cùng. Tưởng tượng rằng ta thả ra chỉ một ngăn các viên bi. Nó sẽ rơi xuống đáy, và trải ra thành một đường cong hình chuông nhỏ. Tình hình cũng như thế đối với một ngăn bất kỳ nào khác. Và điều đó có nghĩa rằng, đường cong hình chuông lớn cuối cùng có thể được coi là tổng của rất nhiều những đường cong hình chuông nhỏ. Đường cong hình chuông này sẽ tự tái lập khi một vài nhân tố, mỗi nhân tố tuân theo đường cong hình chuông riêng biệt của bản thân mình, được kết hợp lại với nhau.

Lý lẽ đanh thép đã xuất hiện khi Galton trồng đậu ngọt Hà Lan. Năm 1875, ông phân phối giống cho một vài người bạn. Mỗi người nhận 70 hạt giống, nhưng người thì nhận được hạt nhẹ, người thì nhận được hạt nặng hơn một chút, và cứ như thế. Năm 1877, ông đo trọng lượng hạt giống của các thế hệ tiếp sau. Mỗi nhóm đều theo phân bố chuẩn, nhưng giá trị

trung bình của trọng lượng thì khác nhau trong mỗi trường hợp khi được so sánh với trọng lượng của mỗi hạt giống trong nhóm ban đầu. Khi ông tổ hợp dữ liệu của tất cả các nhóm, kết quả nhận được lại là phân bố chuẩn, nhưng phương sai thì lớn hơn, tức đường cong hình chuông rộng hơn. Lại một lần nữa, điều này gợi ý rằng tổ hợp của một vài đường cong hình chuông nhỏ sẽ dẫn tới một đường cong hình chuông khác. Galton đã truy ngược lại nguyên nhân toán học của điều này. Giả sử rằng hai biến ngẫu nhiên đều có phân bố chuẩn nhưng không nhất thiết phải có cùng giá trị kỳ vọng hay cùng phương sai. Khi đó tổng của chúng cũng là phân bố chuẩn, với kỳ vọng của tổng bằng tổng các kỳ vọng, và phương sai bằng tổng các phương sai. Hiển nhiên, điều này cũng đúng đối với tổng của ba, bốn, hay nhiều hơn nữa các biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.

Định lý này vẫn có hiệu lực khi một số lượng nhỏ các nhân tố được kết hợp lại, mỗi nhân tố có thể được nhân với một hằng số nào đó, và như vậy nó cũng có thể được áp dụng cho bất kỳ một tổ hợp tuyến tính nào. Phân bố chuẩn vẫn dùng được ngay cả khi mỗi nhân tố có ảnh hưởng lớn. Bây giờ thì Galton có thể nhận biết kết quả này được áp dụng cho sự di truyền thế nào. Giả sử biến ngẫu nhiên cho bởi chiều cao của một đứa trẻ là một tổ hợp nào đó của các biến ngẫu nhiên tương ứng cho chiều cao của cha mẹ, và chúng có phân bố chuẩn. Giả sử rằng nhân tố di truyền là cộng tính, thì chiều cao của đứa trẻ cũng sẽ có phân bố chuẩn.

Galton viết ra các ý tưởng của mình vào năm 1889 dưới nhan đề *Di truyền tự nhiên (Natural Inheritance)*. Đặc biệt, ông đã bàn về một ý tưởng mà ông gọi là hồi quy. Khi một cặp

vợ chồng một cao một thấp có con, thì chiều cao trung bình của lũ trẻ sẽ ở tầm trung, và thực tế, nó thường là giá trị trung bình chiều cao của cha mẹ. Phương sai tương ứng cũng là phương sai trung bình, nhưng phương sai của cặp cha mẹ xấp xỉ nhau, do vậy phương sai cũng không thay đổi bao nhiêu. Khi nhiều thế hệ kế tiếp qua đi, chiều cao trung bình sẽ "hồi quy" về một giá trị trung gian cố định, trong khi phương sai sẽ gần như không thay đổi. Do vậy đường cong hình chuông nguyên thủy của Quetelet có thể tồn tại từ thế hệ này sang thế hệ kế tiếp. Đỉnh của nó sẽ nhanh chóng an bài ở một giá trị cố định, kỳ vọng toàn phần, trong khi chiều rộng của nó vẫn giữ nguyên. Như vậy mỗi thế hệ kế tiếp sẽ có cùng tính đa dạng về chiều cao, bất kể việc hồi quy về giá trị kỳ vọng. Tính đa dạng có thể được duy trì thông qua các cá thể hiếm hoi không thể hồi quy và tự duy trì trong một quần thể đủ lớn.

Với vai trò trung tâm của đường cong hình chuông vốn gắn bó chặt chẽ với những thứ mà ở thời kỳ đó được coi là những nền tảng vững chắc, các nhà thống kê đã có thể xây dựng dựa trên những hiểu biết sâu sắc của Galton và những người làm việc trong các lĩnh vực khác có thể áp dụng những kết quả này. Khoa học xã hội là một ngành được hưởng lợi sớm, nhưng sinh học đã nối tiếp ngay sau đó, và khoa học vật lý đã vượt lên, nhờ Legendre, Laplace, và Gauss. Chẳng mấy chốc toàn bộ bộ công cụ của thống kê đã sẵn sàng cho những ai muốn rút ra những hình mẫu từ các dữ liệu. Tôi sẽ chỉ tập trung vào một kỹ thuật thường xuyên được sử dụng để xác định hiệu quả của thuốc và phác đồ điều trị, cùng với nhiều ứng dụng khác. Kỹ thuật này được gọi là kiểm định giả thuyết, và mục tiêu của nó là đánh giá ý nghĩa của các hình mẫu biểu

kiến trong dữ liệu. Kỹ thuật này do bốn người xây dựng nên: đó là ba người Anh Ronald Aylmer Fisher, Karl Pearson, và Egon con trai ông, cùng với một người Ba Lan sinh ở Nga nhưng hầu hết thời gian sống ở Mỹ, Jerzy Neyman. Tôi sẽ tập trung vào Fisher, người đã phát triển những ý tưởng cơ bản khi ông làm việc với tư cách một nhà thống kê nông nghiệp ở Trạm Thí nghiệm Rothamstead, có nhiệm vụ phân tích các giống cây trồng mới.

Giả sử bạn đang gây giống một loại khoai tây mới. Dữ liệu của bạn gợi ý rằng loại giống này kháng sâu bệnh tốt hơn. Nhưng toàn bộ các dữ liệu này chịu sai số do nhiều nguồn khác nhau gây ra, do vậy bạn không thể hoàn toàn tin tưởng rằng những con số đó củng cố cho kết luận vừa nêu ở trên của bạn – hẳn là không thể tin tưởng như một nhà vật lý, người đã thực hiện các phép đo rất chính xác và loại bỏ được hầu hết các sai số. Fisher nhận thấy rằng vấn đề then chốt là phải phân biệt được sự sai khác thực sự với những sai khác phát sinh thuần túy do ngẫu nhiên, và rằng để làm điều đó, ta phải đặt câu hỏi: sự sai khác đó có thể sẽ như thế nào nếu chỉ có ngẫu nhiên tham gia mà thôi.

Chẳng hạn, giả sử rằng giống khoai tây mới này có sức đề kháng gấp đôi, theo nghĩa là tỉ lệ giống mới sống sót sau dịch bệnh lớn gấp đôi tỉ lệ giống cũ. Có thể hình dung được rằng hiệu ứng này là do ngẫu nhiên, và bạn có thể tính được xác suất của nó. Thực tế, thứ bạn tính chính là xác suất của một kết quả chí ít cũng cực đoan như kết quả quan sát thấy từ các số liệu. Vậy trường hợp tỉ lệ sống sót của giống mới sau dịch bệnh gấp đôi tỉ lệ sống sót của giống cũ sẽ xảy ra với xác suất là bao nhiêu? Thậm chí những tỉ lệ lớn hơn cũng được xét đến

ở đây, bởi vì xác suất nhận được *chính xác* tỉ số gấp đôi bị chặn xuống còn rất nhỏ. Khoảng giá trị của kết quả mà bạn tính đến càng rộng thì ảnh hưởng của ngẫu nhiên càng có khả năng xảy ra hơn, vì thế bạn có thể vững tin hơn vào kết luận của mình nếu tính toán của bạn gợi ý rằng đó không phải là kết quả của ngẫu nhiên. Nếu xác suất được rút ra từ tính toán này thấp, chẳng hạn là 0,05, thì kết quả khó có thể là ngẫu nhiên được, và nó được cho là có ý nghĩa ở mức 95%. Nếu xác suất tính được thấp hơn, chẳng hạn là 0,01, thì kết quả cực kỳ không thể là ngẫu nhiên, và nó được cho là có ý nghĩa ở mức 99%. Những tỉ lệ phần trăm ấy chỉ ra rằng nếu chỉ do ngẫu nhiên thôi, thì kết quả sẽ không thể cực đoan như kết quả mà bạn quan sát được trong 95% hay 99% các phép thử.

Fisher mô tả phương pháp của mình như một phép so sánh giữa hai giả thuyết phân biệt: giả thuyết cho rằng các dữ liệu là có ý nghĩa ở mức đã nói và cái gọi là giả thuyết-không cho rằng các kết quả nhận được là do ngẫu nhiên. Ông khăng khăng rằng phương pháp của ông không nên được giải thích như sự xác nhận giả thuyết cho rằng các dữ liệu là có ý nghĩa; mà nó nên được giải thích như sự bác bỏ giả thuyết-không. Tức là, nó cung cấp cho ta bằng chứng chống lại khẳng định các số liệu *không* có ý nghĩa.

Điều này xem ra là một sự phân biệt rất tinh tế, vì bằng chứng chống lại khẳng định các số liệu không có ý nghĩa chắc chắn sẽ được tính đến như bằng chứng ủng hộ khẳng định là nó có ý nghĩa. Tuy nhiên, điều này không đúng hoàn toàn, và lý do ở đây là giả thuyết-không còn có một giả định phụ gắn sẵn trong nó. Để tính xác suất mà kết quả chí ít cũng là do ngẫu nhiên, bạn cần có một mô hình lý thuyết. Cách đơn

giản nhất để có một mô hình như vậy là giả định một phân bố xác suất cụ thể. Giả định này chỉ áp dụng trong mối liên kết với giả thuyết-không, bởi vì đó là cái mà bạn sử dụng để tính tổng. Bạn không giả định là dữ liệu tuân theo phân bố chuẩn. Nhưng phân bố mặc định cho giả thuyết-không là chuẩn: đường cong hình chuông.

Mô hình gắn vào có một hệ quả quan trọng, mà việc "vứt bỏ giả thuyết-không" có xu hướng triệt tiêu nó. Giả thuyết-không cho rằng "dữ liệu sinh bởi ngẫu nhiên". Do vậy thật quá dễ để đọc mệnh đề trên là "vứt bỏ các dữ liệu do ngẫu nhiên", mà điều này đến lượt mình có nghĩa là bạn chấp nhận rằng chúng *không* phải là do ngẫu nhiên. Mặc dù vậy, thực tế, giả thuyết-không nói rằng dữ liệu là do ngẫu nhiên *và* ảnh hưởng của ngẫu nhiên tuân theo phân bố chuẩn, như vậy có hai nguyên nhân để vứt bỏ giả thuyết-không: các số liệu không do ngẫu nhiên *hoặc* chúng không theo phân bố chuẩn. Nguyên nhân thứ nhất củng cố ý nghĩa của số liệu, nhưng nguyên nhân thứ hai thì không. Nó nói rằng bạn đã chọn sai mô hình thống kê.

Trong các công trình về nông nghiệp của Fisher, nhìn chung có nhiều bằng chứng về phân bố chuẩn trong dữ liệu. Do vậy sự khác biệt mà tôi nói tới ở trên thực ra không quan trọng. Mặc dù vậy, trong nhiều ứng dụng khác của kiểm định giả thuyết, nó có thể là quan trọng. Nói rằng các tính toán bác bỏ giả thuyết-không có ưu điểm là đúng, nhưng bởi vì giả thiết phân bố chuẩn không được nhắc đến một cách tường minh nên rất dễ quên, vì vậy bạn cần kiểm tra tính chuẩn của phân bố của dữ liệu trước khi bạn kết luận rằng những kết quả bạn thu được có ý nghĩa thống kê. Khi phương pháp này

ngày càng được nhiều người sử dụng, những người đã được huấn luyện để tìm tính tổng quát nhưng lại không biết các giả thiết đằng sau chúng, thì giả định sai lầm rằng phép kiểm định đã chỉ ra rằng dữ liệu của bạn là có ý nghĩa càng có nguy cơ cao xảy ra. Đặc biệt khi phân bố chuẩn đã trở thành một giả thiết mặc định tự động.

Trong ý thức của công chúng, thuật ngữ "đường cong hình chuông" được gắn chặt với cuốn sách gây tranh cãi, đó là cuốn *Đường cong hình chuông* (*The Bell Curve*) xuất bản năm 1994 của hai người Mỹ, nhà tâm lý Richard J. Herrnstein và nhà khoa học chính trị Charles Murray. Chủ đề chính của cuốn sách là mối liên hệ được tuyên bố giữa trí thông minh, đo bởi chỉ số thông minh (IQ), và các biến số xã hội như thu nhập, nghề nghiệp, tỉ lệ thụ thai và tội ác. Các tác giả lập luận rằng chỉ số IQ tiên đoán những biến số trên tốt hơn là địa vị xã hội và kinh tế của cha mẹ hay trình độ giáo dục. Nguyên nhân gây ra tranh cãi và những lập luận liên quan rất rối rắm. Một vài nét phác họa không thể mang lại tính công bằng cho cuộc tranh luận, nhưng những vấn đề đó đưa ta quay trở lại với Quetelet và xứng đáng được nhắc đến.

Sự tranh cãi là điều không thể tránh được, bất kể ưu điểm hay nhược điểm học thuật của cuốn sách thế nào, bởi vì nó đụng chạm đến một vấn đề rất nhạy cảm: mối liên hệ giữa chủng tộc và trí tuệ. Các bản tin truyền thông có xu hướng nhấn mạnh đề xuất nói rằng những khác biệt về IQ phần lớn là do nguồn gốc gen, nhưng cuốn sách đã thận trọng hơn về mối liên hệ này, nó đã để ngỏ sự tương tác giữa gen, môi trường và trí tuệ. Một vấn đề gây tranh cãi khác là phân tích ngụ ý rằng sự phân tầng xã hội ở Hoa Kỳ (và thực tế ở nhiều

nơi khác nữa) đã phát triển rất nhanh trong suốt thế kỷ 20, nguyên nhân chính vẫn là sự khác biệt về trí tuệ. Còn một nguyên nhân khác nữa là chuỗi các khuyến nghị về chính sách để xử lý vấn đề bị cáo buộc này. Một trong số đó là giảm thiểu sự di cư, vì theo cuốn sách khẳng định thì điều đó làm giảm chỉ số IQ trung bình. Có lẽ gây tranh cãi nhất là đề xuất cần ngừng các chính sách phúc lợi xã hội, chính sách được cho là khuyến khích các phụ nữ nghèo sinh con.

Trớ trêu thay, ý tưởng này lại bắt nguồn từ chính Galton. Cuốn sách xuất bản năm 1869 của ông nhan đề *Thiên tài di truyền* (*Hereditary Genius*) đã được viết dựa trên các công trình trước đó nhằm phát triển ý tưởng cho rằng "các khả năng tự nhiên của con người có được từ di truyền chịu đúng những hạn chế như là những đặc điểm về hình thức và thể chất của toàn bộ thế giới hữu cơ. Do đó… việc tạo ra một chủng tộc những người có trí thông minh cao thông qua hôn nhân hợp pháp qua vài thế hệ là hoàn toàn khả thi." Ông khẳng định rằng khả năng sinh sản của những người kém trí tuệ hơn thường là cao hơn, nhưng tránh đưa ra bất kỳ gợi ý nào về sự chọn lọc có chủ ý thiên về trí tuệ. Thực tế, ông bày tỏ hy vọng rằng xã hội sẽ thay đổi để những người thông minh hơn hiểu được sự cần thiết của việc họ phải có nhiều con hơn.

Đối với nhiều người, đề xuất của Herrnstein và Murray về việc thiết lập lại hệ thống phúc lợi khá gần gũi với phong trào ưu sinh đầu thế kỷ 20, trong đó 60.000 người Mỹ bị triệt sản do bị cho là ốm đau về mặt tinh thần. Ưu sinh trở nên mất uy tín trầm trọng khi nó liên quan với phát xít Đức và nạn diệt chủng, và rất nhiều những hoạt động của nó giờ đây được coi là vi phạm luật nhân quyền, trong nhiều trường hợp thậm chí

còn là tội ác chống lại nhân loại. Đề xuất chọn lọc dòng dõi con người vốn đã được nhìn nhận một cách rộng rãi là mang tính phân biệt chủng tộc. Nhiều nhà khoa học tán thành những kết luận khoa học của cuốn sách nhưng chống lại tính phân biệt chủng tộc của nó; một số người trong đó vẫn ít tin tưởng vào các đề xuất chính sách.

Đường cong hình chuông khởi xướng một cuộc tranh luận dài hơi về các phương pháp được sử dụng để biên soạn dữ liệu, về các phương pháp toán học được sử dụng để phân tích chúng, về sự giải thích các kết quả, và những đề xuất về chính sách dựa trên những giải thích đó. Một nhóm công tác được thành lập bởi Hiệp hội Tâm lý học Mỹ kết luận rằng một số điểm trong cuốn sách là đúng đắn: điểm số IQ là một chỗ dựa tốt để tiên đoán thành tựu học thuật, nó có tương quan với địa vị nghề nghiệp, và không có sự khác biệt về thành tích giữa nam và nữ. Mặt khác, bản báo cáo của nhóm cũng tái khẳng định rằng cả gen và môi trường đều có ảnh hưởng đến IQ và họ không tìm thấy bằng chứng quan trọng nào nói rằng những khác biệt về điểm số IQ trên phương diện sắc tộc được quyết định bởi yếu tố di truyền.

Những ý kiến phê bình khác lập luận rằng có các sai sót trong phương pháp luận khoa học, chẳng hạn như đã bỏ qua những số liệu bất lợi, và rằng việc nghiên cứu và một số hưởng ứng đối với nó, ở một mức độ nào đó, có thể có động lực từ chính trị. Chẳng hạn, đúng là sự phân tầng xã hội đã tăng một cách đột ngột ở Mỹ, nhưng có thể lý luận rằng nguyên nhân chính là sự từ chối nộp thuế của những người giàu, chứ không phải là do những khác biệt về trí tuệ. Cũng có sự thiếu nhất quán giữa những vấn đề bị cáo buộc và giải pháp được đề

xuất. Nếu sự nghèo đói khiến con người có nhiều con cái hơn, và bạn tin rằng đó là một điều xấu, thì thử hỏi tại sao bạn lại muốn làm cho họ thậm chí còn nghèo khổ hơn?

Một phần quan trọng của nền tảng mà thường bị lờ đi, đó là định nghĩa của IQ. Không phải là thứ có thể đo được một cách trực tiếp như là chiều cao hay cân nặng, IQ được suy ra một cách thống kê từ các bài trắc nghiệm. Đối tượng kiểm tra được đưa cho các câu hỏi và điểm số của họ được phân tích nhờ sử dụng một nhánh của phương pháp bình phương tối thiểu gọi là phân tích phương sai. Giống như phương pháp bình phương tối thiểu, kỹ thuật này giả định rằng dữ liệu tuân theo phân bố chuẩn, và nó tìm cách cô lập các nhân tố quyết định lượng biến thiên lớn nhất trong dữ liệu, và do đó chúng là các nhân tố quan trọng nhất trong việc mô hình hóa dữ liệu. Năm 1904, nhà tâm lý học Charles Spearman đã áp dụng kỹ thuật này cho một số bài trắc nghiệm khác nhau. Ông nhận thấy rằng điểm số mà các đối tượng nhận được ở các bài trắc nghiệm khác nhau thực ra có tương quan mạnh với nhau; tức là nếu ai đó làm tốt một bài trắc nghiệm nào đó, thì họ sẽ có xu hướng làm tốt tất cả các bài kiểm tra. Về mặt trực giác, có vẻ như họ đang đo đạc cùng một thứ. Phân tích của Spearman chỉ ra rằng một thừa số chung duy nhất – một biến toán học, mà ông gọi là *g*, viết tắt của *general intelligence* (trí tuệ tổng quát) – giải thích được hầu như toàn bộ mối tương quan này. IQ là một phiên bản đã được tiêu chuẩn hóa của biến số *g* của Spearman.

Một câu hỏi then chốt là *g* có phải một đại lượng thực hay chỉ là một hư cấu toán học? Câu trả lời đã trở nên rất phức tạp bởi các phương pháp sử dụng để chọn các bài kiểm tra

IQ. Chúng giả định rằng phân bố "đúng" của trí thông minh trong một cộng đồng dân số là phân bố chuẩn – được định danh là đường cong hình chuông – và định cỡ các bài kiểm tra bằng cách dùng toán học xử lý các kết quả thu được để chuẩn hóa giá trị trung bình và độ lệch chuẩn. Việc làm này ẩn chứa một mối nguy hiểm tiềm tàng, đó là bạn nhận được thứ mà bạn mong đợi, bởi vì bạn thực hiện từng bước để lọc đi bất cứ thứ gì mâu thuẫn với nó. Stephen Jay Gould đã lên án những mối nguy hiểm này trong cuốn sách *Những đo đạc sai lạc về con người* (*The Mismeasure of Man*) xuất bản năm 1981, trong đó, ông đã chỉ ra rằng điểm số thô của các bài kiểm tra IQ không phải lúc nào cũng tuân theo phân bố chuẩn.

Nguyên nhân chủ yếu khiến người ta nghĩ rằng *g* biểu diễn đặc điểm chân thực của trí tuệ con người là nó là *một* nhân tố: nói một cách toán học, nó định nghĩa một chiều duy nhất. Nếu nhiều bài kiểm tra khác nhau có vẻ như đo cùng một thứ, thì thật hấp dẫn để kết luận rằng cái thứ đó phải có thực. Nếu không, tại sao các kết quả này lại giống nhau như thế? Một phần của câu trả lời có lẽ là: những kết quả của các bài kiểm tra IQ bị quy giản về một điểm số duy nhất. Điều đó đã nén một tập hợp các câu hỏi đa chiều và các thái độ tiềm tàng thành câu trả lời một chiều. Hơn nữa, bài kiểm tra đã được chọn lọc sao cho điểm số của nó có tương quan mạnh mẽ với quan điểm về các câu trả lời thông minh của người ra đề, và không ai bận tâm xem xét lại khi sử dụng nó.

Tương tự như vậy, hãy tưởng tượng việc thu thập dữ liệu về một vài khía cạnh khác nhau của "kích cỡ" trong thế giới động vật. Bạn có thể cân, đo chiều cao và các chiều dài, chiều rộng, đường kính của chân trái đằng sau, cỡ răng và nhiều thứ

khác của một con vật. Mỗi phép đo như thế sẽ chỉ là một con số. Nhìn chung chúng sẽ có tương quan chặt chẽ với nhau: những động vật cao lớn sẽ có xu hướng nặng cân hơn, răng to hơn, chân to hơn... Nếu bạn sử dụng phương pháp phân tích phương sai cho dữ liệu, rất có khả năng bạn sẽ tìm thấy rằng một tổ hợp duy nhất của những dữ liệu ấy sẽ giải thích được hầu hết tính hay thay đổi, cũng như biến *g* của Spearman đối với các phép đo khác nhau của những thứ được cho là có liên quan đến trí thông minh. Nhưng liệu điều này có tất yếu suy ra rằng tất cả những đặc điểm đó của động vật đều có cùng một nguyên nhân ẩn phía sau? Rằng có *một thứ* điều khiển tất cả? Liệu có phải: đó là mức độ của hormone sinh trưởng? Nhưng có lẽ không phải. Sự phong phú về hình dạng của động vật không thể nén một cách thuận tiện vào một con số được. Rất nhiều các đặc điểm khác không có tương quan gì với kích thước cả: như khả năng bay, có sọc vằn hay lốm đốm, ăn thịt hay ăn cỏ. Tổ hợp đặc biệt duy nhất của các phép đo giải thích được hầu hết sự biến thiên có thể chỉ là một hệ quả toán học của các phương pháp được sử dụng để tìm ra nó – đặc biệt nếu các biến đã được chọn sẵn, như ở đây, để từ lúc bắt đầu đã có nhiều điểm chung.

Trở lại với Spearman, chúng ta thấy rằng biến *g* được khoe khoang nhiều của ông có lẽ chỉ là biến một chiều bởi vì các bài kiểm tra IQ chỉ là một chiều. IQ là một phương pháp thống kê được dùng để lượng hóa các loại khả năng đặc biệt trong việc giải quyết vấn đề, thuận tiện về mặt toán học, nhưng không nhất thiết phải tương ứng với một thuộc tính có thực của não bộ con người, và cũng không nhất thiết phải biểu diễn bất kỳ thứ gì mà chúng ta gọi là “trí thông minh”.

Do tập trung vào một vấn đề, mà cụ thể là IQ, và sử dụng nó để thiết đặt chính sách, cuốn *Đường cong hình chuông* đã bỏ qua bối cảnh rộng lớn hơn. Thậm chí nếu việc tạo dựng dân cư của một dân tộc bằng di truyền là có lý, thì tại sao lại chỉ hạn chế quá trình đó cho người nghèo? Ngay cả khi xét về trung bình, người nghèo có IQ thấp hơn người giàu, một ngày nào đó có thể một đứa trẻ nghèo nhưng thông minh sẽ làm tốt hơn một đứa trẻ giàu nhưng ngớ ngẩn, bất chấp những lợi thế hiển nhiên về mặt xã hội và giáo dục mà đứa trẻ giàu kia được hưởng. Vậy tại sao lại áp dụng việc cắt giảm phúc lợi xã hội khi mà bạn có thể hướng chính xác hơn đến cái mà bạn tuyên bố là vấn đề thực sự: đó là chính bản thân trí tuệ? Tại sao không cải thiện giáo dục? Thực tế, tại sao lại hướng chính sách của bạn chỉ để làm tăng trí thông minh? Còn có nhiều đặc điểm đáng mong muốn khác của con người. Tại sao không làm giảm thiểu tính khờ dại, tính hung hăng, hay tính tham lam?

Sẽ là sai lầm nếu chúng ta nghĩ về một mô hình toán học cứ như nó là thực tại vậy. Trong vật lý học, nơi mà các mô hình thường rất phù hợp với thực tại, điều này có thể là một cách suy nghĩ thuận tiện ít gây ra tác hại. Nhưng trong khoa học xã hội, các mô hình thường không tốt bằng các bức biếm họa. Sự lựa chọn nhan đề cho cuốn *Đường cong hình chuông* đã ngụ ý về xu hướng đó, xu hướng hòa nhập mô hình với thực tại. Ý tưởng cho rằng IQ là một loại thước đo chính xác khả năng của con người, thuần túy chỉ vì nó có nguồn gốc toán học, cũng phạm chính sai lầm đó. Sẽ thật vô nghĩa nếu các chính sách xã hội có ảnh hưởng rộng và có khả năng gây bất đồng cao lại dựa trên những mô hình toán học quá đơn

giản và thiếu sót. Điểm quan trọng thực sự về *Đường cong hình chuông*, điểm mà nó đã có tác dụng một cách sâu rộng nhưng vô tình, đó là sự thông minh, trí tuệ và sự thông thái không phải là một.

Lý thuyết xác suất được sử dụng rộng rãi trong những thử nghiệm y học về thuốc và cách điều trị để kiểm định ý nghĩa thống kê của dữ liệu. Những kiểm định này thường (nhưng không phải luôn luôn) dựa trên các giả định rằng phân bố ẩn phía sau là phân bố chuẩn. Một ví dụ điển hình là việc phát hiện các cụm ung thư. Một cụm, đối với một bệnh nào đó, là một nhóm trong đó bệnh này xảy ra thường xuyên hơn chúng ta mong đợi trong toàn bộ dân số. Cụm có thể mang tính địa lý, hoặc có thể liên quan một cách ẩn dụ hơn tới những người có lối sống đặc biệt, hay một thời kỳ cụ thể nào đó. Chẳng hạn, những đô vật chuyên nghiệp đã nghỉ hưu, hay những chàng trai sinh giữa những năm 1960-1970.

Những cụm bệnh biểu kiến có thể hoàn toàn là do ngẫu nhiên. Những số ngẫu nhiên hiếm khi trải ra một cách đồng đều; thay vì thế chúng thường cụm lại với nhau. Trong những mô phỏng ngẫu nhiên của chương trình Xổ số quốc gia Anh, khi sáu số nằm giữa 1 và 49 được rút thăm ngẫu nhiên thì hơn một nửa cho thấy có một loại hình mẫu có quy luật, chẳng hạn hai số trong đó là hai số tự nhiên liên tiếp, hoặc ba số cách nhau cùng một lượng, như 5, 9, 13. Trái với trực giác chung, ngẫu nhiên kết khối lại. Khi một cụm biểu kiến được tìm thấy, các nhà chức trách y tế sẽ cố gắng đánh giá xem đó có phải là do ngẫu nhiên hay có thể có một mối liên hệ nhân quả nào đó hay không. Có một thời, hầu hết con cái của các phi công chiến đấu của Israel là con trai. Cũng dễ nghĩ ra

các cách giải thích khả dĩ: phi công thì nam tính rất cao, mà những người đàn ông nam tính cao như thế sẽ sinh ra con trai nhiều hơn (thực ra, điều này không đúng) rồi phi công bị phơi nhiễm bức xạ nhiều hơn bình thường, họ cũng thường phải trải qua sự tăng trọng lượng cao hơn, nhưng hiện tượng này cũng không tồn tại lâu, nó chỉ là một cụm ngẫu nhiên mà thôi. Trong những dữ liệu sau này, nó hoàn toàn biến mất. Trong bất kỳ một quần thể dân cư nào, luôn xảy ra trường hợp có nhiều trẻ em thuộc một giới tính hơn giới tính còn lại; sự bình đẳng giới một cách chính xác là rất không thực tế. Để đánh giá ý nghĩa của cụm, bạn cần tiếp tục quan sát và xét xem nó có tồn tại dai dẳng hay không.

Tuy nhiên, sự chần chừ đó không thể kéo dài vô hạn định được, đặc biệt nếu cụm đó mang một dịch bệnh nghiêm trọng. Ví dụ, AIDS được phát hiện lần đầu tiên như một cụm các ca bệnh viêm phổi ở những người đàn ông đồng tính tại Mỹ trong thập niên 80. Sợi amiang là nguyên nhân của một dạng ung thư phổi, u trung biểu mô, lần đầu được nhận thấy trong một cụm những người từng là công nhân amiang. Do vậy, các phương pháp thống kê đã được sử dụng để đánh giá xem cụm bệnh có thể phát triển thế nào nếu nó phát sinh từ các nguyên nhân ngẫu nhiên. Các phương pháp kiểm định ý nghĩa và các phương pháp liên quan đã được sử dụng rộng rãi cho mục đích đó.

Lý thuyết xác suất cũng là cơ sở để chúng ta tìm hiểu về rủi ro. Từ này mang một ý nghĩa cụ thể và có tính chuyên môn kỹ thuật. Nó ngụ ý khả năng tiềm tàng gây ra hậu quả không mong muốn của một hành động nào đó. Chẳng hạn, đi máy bay có thể vướng vào một vụ tai nạn, hút thuốc có thể bị ung thư phổi, xây dựng nhà máy năng lượng nguyên tử có thể dẫn

tới việc thoát phóng xạ trong một tai nạn hay do một cuộc tấn công của bọn khủng bố, xây đập thủy điện có thể cướp đi nhiều mạng sống nếu đập bị vỡ. “Hành động” ở đây có thể mang nghĩa là không làm gì đó: không tiêm vacxin cho trẻ có thể khiến nó chết vì dịch bệnh, chẳng hạn. Trong trường hợp này, vẫn có rủi ro liên quan tới việc tiêm vacxin cho trẻ, chẳng hạn phản ứng thuốc. Trên tổng thể dân số thì rủi ro này nhỏ hơn, nhưng cho một nhóm cụ thể thì nó có thể lớn.

Rất nhiều khái niệm rủi ro đã được sử dụng trong nhiều bối cảnh khác nhau. Theo định nghĩa toán học thông thường thì rủi ro liên quan tới hành động hoặc không hành động là xác suất của một kết quả bất lợi, nhân với tổn thất phải gánh chịu sau đó. Theo định nghĩa này, một trong mười cơ hội giết mười người cũng có cùng mức rủi ro như một trong một triệu cơ hội giết một triệu người. Định nghĩa toán học này có lý theo nghĩa là có những lý do cụ thể đằng sau nó, nhưng điều đó không có nghĩa là nó nhất thiết phải có nghĩa. Chúng ta đã thấy rằng “xác suất” ngụ ý đến tính dài hạn, nhưng đối với một số sự kiện hiếm hoi thì dài hạn lại thực sự là rất lâu. Con người, và xã hội của họ, có thể thích ứng với một số lượng nhỏ cái chết lặp đi lặp lại, nhưng đối với một đất nước mà bỗng nhiên một lúc mất đi hàng triệu người thì sẽ gặp những khó khăn cực kỳ to lớn, bởi vì các dịch vụ công cộng và nền công nghiệp sẽ đồng thời phải chịu những thử thách nghiêm trọng. Có thể hơi thoải mái mà nói rằng trong 10 triệu năm nữa, tổng số tử vong trong cả hai trường hợp có thể so sánh với nhau được. Do vậy, các phương pháp mới đang được phát triển để định lượng rủi ro trong những trường hợp như thế.

Các phương pháp thống kê được rút ra từ các câu hỏi về cờ

bạc có ứng dụng hết sức đa dạng. Chúng cung cấp các công cụ để phân tích các dữ liệu khoa học, y tế và xã hội. Giống như các công cụ khác, những điều xảy ra phụ thuộc vào việc nó được sử dụng như thế nào. Bất cứ ai sử dụng các phương pháp thống kê đều cần phải ý thức được những giả định ẩn sau các phương pháp đó, và các hệ quả của chúng. Mù quáng đưa các dữ liệu vào máy tính và coi các kết quả nhận được như là chân lý mà không hiểu biết giới hạn của các phương pháp được sử dụng là một trong những nguyên nhân gây ra thảm họa. Tuy vậy, những ứng dụng hợp lý của thống kê đã giúp cải thiện thế giới của chúng ta đến mức không còn nhận ra được nữa. Và tất cả những điều đó bắt đầu với đường cong hình chuông của Quetelet.

8 Những dao động tốt

Phương trình sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Gia tốc của một đoạn nhỏ trên dây đàn violin tỉ lệ với độ dịch chuyển trung bình của các đoạn lân cận.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó tiên đoán rằng dây đàn sẽ chuyển động thành các sóng, và nó tổng quát hóa một cách tự nhiên cho các hệ vật lý khác trong đó có sóng.

Nó đã dẫn tới những gì?

Các bước tiến lớn trong hiểu biết của chúng ta về sóng nước, sóng âm, sóng ánh sáng, dao động đàn hồi,... Các nhà nghiên cứu địa chấn sử dụng một phiên bản đã sửa đổi của nó để rút ra cấu trúc bên trong của Trái Đất thông qua cách nó dao động. Các công ty dầu mỏ sử dụng một phương pháp tương tự để tìm dầu. Trong Chương 11 chúng ta sẽ thấy nó tiên đoán thế nào về sự tồn tại của sóng điện từ, dẫn tới sự xuất hiện của radio, tivi, radar, và các phương tiện truyền thông hiện đại.

Chúng ta sống trong thế giới của các sóng. Tai chúng ta phát hiện các sóng nén trong không khí: ta gọi đó là “nghe”. Mắt chúng ta nhận biết các sóng điện từ: ta gọi đó là “nhìn”. Khi một thị trấn hay một thành phố gặp động đất, sự tàn phá ở đây là do các sóng trong phần vỏ rắn của Trái Đất gây ra. Khi một con thuyền dập dềnh lên xuống trên mặt đại dương, nó đang phản ứng lại với sóng nước. Vận động viên lướt sóng sử dụng sóng đại dương để tiêu khiển; máy thu thanh, tivi, và mạng điện thoại di động đều sử dụng sóng điện từ, tương tự như các sóng giúp chúng ta nhìn thấy, nhưng ở những bước sóng khác. Rồi lò vi sóng nữa... chà, cái tên nói lên tất cả rồi, phải không nào?

Với rất nhiều ví dụ thực tế về các sóng có tác động tới đời sống hằng ngày, ngay cả trong nhiều thế kỷ trước, các nhà toán học, những người đã quyết định bước theo khám phá đầy tính sử thi của Newton rằng tự nhiên có các quy luật, không thể không bắt đầu nghĩ tới các sóng. Mặc dù vậy, cái đã thúc đẩy họ bắt đầu lại đến từ nghệ thuật, đặc biệt là âm nhạc. Làm thế nào mà một dây violin lại có thể tạo ra âm thanh? Cái gì đã *làm* điều đó?

Có một lý do để bắt đầu với đàn violin, một loại lý do hấp dẫn các nhà toán học, mặc dù không phải là việc các chính phủ hay các nhà doanh nghiệp xem xét đầu tư cho các nhà toán học và chờ đợi sẽ nhanh chóng thu về lợi nhuận. Một dây đàn violin có thể được mô hình một cách hợp lý bằng

một dây mảnh dài vô hạn, và chuyển động của nó – rõ ràng là nguyên do của âm thanh mà nhạc cụ này tạo ra – có thể được giả định là diễn ra trong một mặt phẳng. Điều này giúp làm cho bài toán trở nên "thấp chiều", tức là bạn có cơ may giải được nó. Một khi bạn hiểu được ví dụ đơn giản này về sóng, bạn sẽ có cơ hội tốt để chuyển sự hiểu biết ấy, theo từng bước nhỏ, tới các ví dụ hiện thực hơn và thực tiễn hơn về các sóng.

Một lựa chọn khác là húc đầu vào những bài toán có độ phức tạp cao, có thể sẽ hấp dẫn đối với các nhà chính trị và các nhà lãnh đạo nền công nghiệp, nhưng thường dễ bị sa lầy vào các vấn đề phức tạp. Toán học phát triển mạnh là nhờ sự giản dị, và nếu cần thì các nhà toán học sẽ sáng tạo ra chúng để đưa ra một lộ trình đi vào các vấn đề phức tạp hơn. Họ miễn cưỡng nói tới các mô hình này như là "các đồ chơi", dù đó là những đồ chơi với mục đích rất nghiêm túc. Các mô hình đồ chơi của sóng đã dẫn đến thế giới điện tử học và viễn thông toàn cầu tốc độ cao, máy bay phản lực dân dụng thân rộng, vệ tinh nhân tạo, máy thu thanh, tivi, hệ thống cảnh báo sóng thần... của hôm nay, nhưng chúng ta sẽ không đạt tới bất kỳ thứ gì trong số đó, nếu không có một số nhà toán học bắt tay nghiên cứu cách hoạt động của cây đàn violin, bằng cách sử dụng một mô hình chẳng thực tế một chút nào, ngay cả đối với một cây đàn violin.

Những người theo trường phái Pythagor đã tin rằng thế giới dựa trên các con số, cụ thể ý họ muốn nói rằng đó là toàn bộ các con số hay các tỉ số giữa chúng. Một số niềm tin của họ có xu hướng trở nên thần bí, họ gán cho các con số cụ thể những thuộc tính của con người: 2 cho đàn ông, 3 cho phụ nữ, 5 là tượng trưng cho hôn nhân, v.v. Số 10 rất quan trọng với họ vì

nó bằng 1 + 2 + 3 + 4, và họ tin rằng có bốn nguyên tố cơ bản: đất, khí, lửa, nước. Những loại tư biện này gây ngạc nhiên đối với tư duy hiện đại, nó có vẻ hơi điên rồ một chút – phải, chí ít là trong suy nghĩ của tôi – nhưng chúng là hợp lý trong một thời đại mà con người chỉ vừa mới bắt đầu nghiên cứu thế giới xung quanh mình và đang tìm kiếm những hình mẫu quan trọng. Và phải mất một thời gian người ta mới tìm ra hình mẫu nào có ý nghĩa và hình mẫu nào là rác rưởi.

Một trong những thành công lớn của thế giới quan của trường phái Pythagor xuất phát từ âm nhạc. Nhiều câu chuyện được lưu truyền: theo một trong số đó, một lần Pythagor đi qua một lò rèn và ông để ý thấy rằng những cây búa có kích thước khác nhau thì gây ra âm thanh ở những cao độ khác nhau, và những cây búa liên quan với nhau qua các con số đơn giản: kích cỡ của cây búa này gấp đôi cây búa kia chẳng hạn – thì sẽ tạo ra các hòa âm. Mặc dù câu chuyện này nghe thật hấp dẫn, nhưng nếu ai đã từng thử với cây búa thực sẽ thấy ngay rằng thao tác của người thợ rèn chẳng hề tạo ra những âm thanh du dương nào cả, và những cây búa có hình dạng quá ư phức tạp để có thể ngân lên một cách hài hòa. Nhưng ở đây có một chút sự thật: nói chung, các vật nhỏ tạo ra âm thanh ở âm vực cao hơn các vật lớn.

Các câu chuyện có lý lẽ mạnh hơn khi chúng nói về một chuỗi các thí nghiệm mà những người theo trường phái Pythagor thực hiện bằng cách sử dụng một sợi dây được kéo căng, một nhạc cụ thô sơ có tên là *canon*. Chúng ta biết đến các thí nghiệm này bởi vì Ptolemy đã nhắc đến chúng trong cuốn *Hài hòa (Harmonics)* của ông xuất bản khoảng năm 150 TCN. Bằng cách chuyển dịch vật đỡ tới các vị trí khác nhau dọc theo dây, những người theo trường phái Pythagor nhận

thấy rằng khi hai dây có cùng độ căng và có tỉ lệ chiều dài dây đơn giản, như là 2:1 hay 3:2, thì chúng sẽ tạo ra những nốt hài hòa một cách khác thường. Những tỉ lệ phức tạp hơn sẽ tạo ra những tiếng chói tai và nghe rất khó chịu. Sau này, các nhà khoa học đã đẩy những ý tưởng này đi xa hơn rất nhiều, có lẽ là hơi quá xa: việc nghe thuận tai hay không còn phụ thuộc vào tính chất vật lý của đôi tai, một thứ phức tạp hơn rất nhiều so với tính chất vật lý của một sợi dây riêng lẻ, và nó cũng có một chiều kích văn hóa nữa bởi vì tai của những đứa trẻ đang tuổi lớn được luyện tập qua các âm thanh chung thường xuất hiện trong môi trường sống của chúng. Tôi dự đoán rằng trẻ em ngày nay sẽ đặc biệt nhạy cảm đối với những khác biệt trong tiếng chuông điện thoại di động. Tuy nhiên, có một câu chuyện có cơ sở khoa học hẳn hoi đằng sau những phức tạp này và nhiều chi tiết trong đó xác nhận và giải thích được những khám phá trước đây của những người theo trường phái Pythagor và dụng cụ âm nhạc chỉ gồm một dây của họ.

Các nhạc sĩ đã mô tả các cặp nốt nhạc theo khoảng cách (quãng) giữa chúng, một độ đo số bước ngăn cách chúng trong một âm giai nào đó. Quãng cơ bản nhất là quãng tám, tám phím trắng trên đàn piano. Các nốt cách nhau một quãng tám thì có âm rất giống nhau, trừ một điều là nốt này cao hơn nốt kia, và chúng cực kỳ hài hòa. Trong thực tế, những hòa âm dựa trên quãng tám nghe có vẻ khá du dương. Trên đàn violin, có thể chơi một nốt cao hơn dây buông một quãng tám bằng cách nhấn giữa dây buông đó ép vào cần đàn. Một dây với chiều dài bằng một nửa dây ban đầu sẽ tạo ra một nốt cao hơn nốt của dây ban đầu một quãng tám. Như vậy, quãng tám được gắn với một tỉ số đơn giản 2:1.

Các quãng hòa âm khác cũng gắn với các tỉ số đơn giản.

Quãng hòa âm quan trọng nhất của âm nhạc phương Tây là quãng bốn, gắn với tỉ số 4:3, và quãng năm, theo tỉ số 3:2. Những cái tên này sẽ trở nên có nghĩa nếu bạn xét một âm giai gồm các nốt: C D E F G A B C. Với nốt C làm cơ sở, nốt tương ứng với quãng bốn sẽ là F, quãng năm là G, và quãng tám sẽ là C. Nếu ta đánh số các nốt liên tiếp từ 1 ở nốt cơ sở, thì tương ứng chúng sẽ là các nốt thứ 4, thứ 5, thứ 8 tương ứng trên âm giai. Hình học này đặc biệt trực quan trên một nhạc cụ như guitar, gồm các đoạn dây kim loại, "các phím" được gắn vào theo các vị trí thích hợp. Phím tương ứng với quãng bốn ở vị trí bằng một phần tư so với chiều dài dây, với quãng năm là một phần ba, và quãng tám là một nửa. Bạn có thể kiểm tra điều này bằng một thước dây.

Các tỉ lệ này cung cấp một cơ sở lý thuyết cho một âm giai và dẫn tới chính âm giai mà hiện nay được sử dụng trong hầu hết âm nhạc châu Âu. Câu chuyện này rất phức tạp, vậy nên tôi sẽ chỉ trình bày một phiên bản đã được đơn giản hóa. Để thuận tiện hơn sau này, kể từ đây, tôi sẽ viết tỉ số 3:2 thành phân số 3/2. Bắt đầu với một nốt cơ sở và tăng lên quãng năm, ta nhận được các dây với chiều dài:

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

Thực hiện phép nhân, ta thu được dãy:

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{27}{8} \quad \frac{81}{16} \quad \frac{243}{32}$$

Ngoại trừ hai nốt đầu tiên, tất cả các nốt này đều quá cao để vẫn nằm trong quãng tám, nhưng chúng ta có thể hạ thấp chúng xuống một hoặc nhiều quãng tám, bằng cách chia liên tiếp các phân số đó cho 2 cho đến khi kết quả thu được nằm giữa 1 và 2. Ta thu được dãy phân số

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{243}{128}$$

Cuối cùng, sắp xếp chúng lại theo thứ tự tăng dần, ta thu được:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128}$$

Chúng khá tương ứng với các nốt C D E G A B trên đàn piano. Chú ý rằng ở đây không xuất hiện nốt F. Thực tế, với đôi tai của chúng ta, khoảng giữa 81/64 và 3/2 nghe rộng hơn các khoảng khác. Để trám vào khoảng trống này, chúng ta chèn tỉ số 4/3 vào, đó là tỉ số của quãng bốn, rất gần với nốt F trên piano. Cũng rất hữu ích nếu chúng ta hoàn tất âm giai này với nốt C thứ hai, cao hơn một quãng tám, với tỉ số là 2. Bây giờ chúng ta thu được một âm giai dựa hoàn toàn trên các quãng bốn, quãng năm và quãng tám, với các cao độ theo tỉ số:

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
C	D	E	F	G	A	B	C

Vì chiều dài tỉ lệ nghịch với cao độ, nên chúng ta phải lấy nghịch đảo các phân số để thu được các chiều dài tương ứng.

Chúng ta vừa mới giải thích rõ tất cả các phím trắng trên đàn piano, nhưng còn có cả các phím đen nữa. Chúng xuất hiện bởi vì các số liên tiếp trong âm giai mang hai tỉ số khác nhau: 9/8 (gọi là một âm hay *ton*) và 256/243 (là bán âm hay bán ton). Chẳng hạn, tỉ số của 81/64 và 9/8 là 9/8 nhưng tỉ số của 4/3 và 81/64 lại là 256/243. Tên gọi ton và bán ton chỉ ra một sự so sánh gần đúng của các quãng. Về trị số mà nói, chúng là 1,125 và 1,05. Số đầu lớn hơn, như vậy một ton tương ứng với sự thay đổi về cao độ nhiều hơn so với một bán ton. Hai bán ton cho tỉ số $1{,}05^2$, tức là khoảng 1,11; không xa

1,125. Như vậy hai bán ton gần như bằng một ton. Nhưng tôi thừa nhận là không *quá* gần.

Tiếp tục theo cách này chúng ta có thể chia mỗi ton thành hai quãng, mỗi quãng gần với một bán ton, để thu được âm giai 12 nốt. Điều này có thể được làm theo nhiều cách khác nhau, dẫn tới những kết quả hơi khác nhau một chút. Tuy nhiên khi đã hoàn thành, có một số vấn đề nhỏ nhưng vẫn nghe được khi thay đổi khóa của bản nhạc: các quãng sẽ thay đổi chút ít nếu, chẳng hạn, chúng ta dịch mỗi nốt lên một bán ton. Hiệu ứng này có thể tránh được nếu chúng ta đã chọn một tỉ lệ cụ thể cho một bán ton và sắp đặt sao cho lũy thừa 12 của chúng bằng với 2. Khi đó hai ton sẽ chính xác là một bán ton, 12 bán ton sẽ tạo thành một quãng tám, và bạn có thể thay đổi âm giai bằng cách dịch tất cả các nốt lên hoặc xuống theo một số cố định.

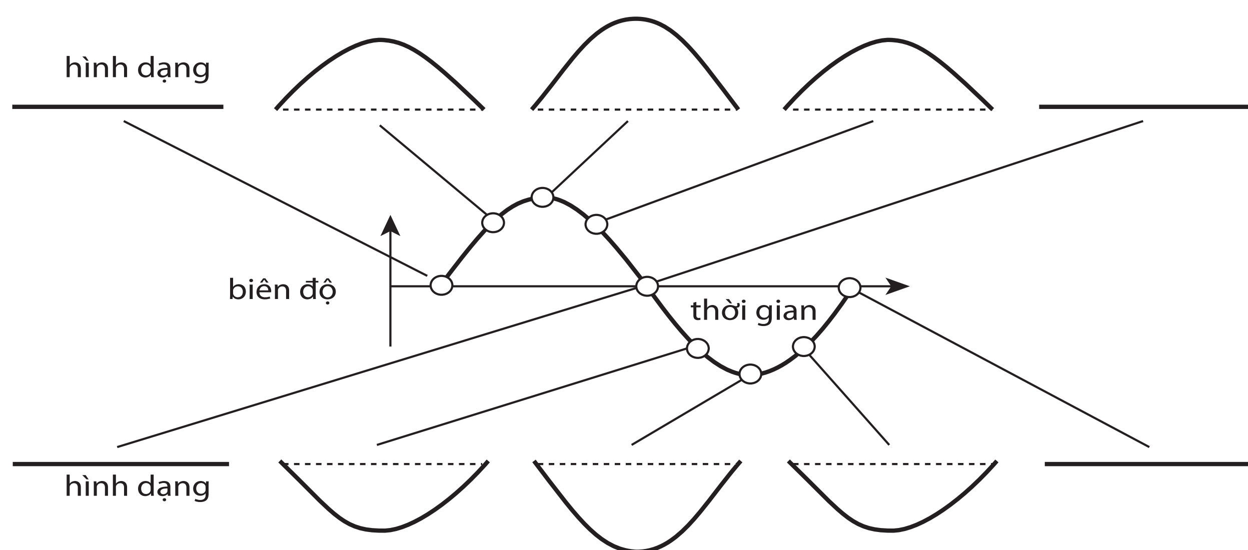
Có một số như thế, cụ thể là căn bậc 12 của 2, xấp xỉ 1,059, và nó dẫn tới cái gọi là "âm giai phân bố đều". Đây là một sự thỏa hiệp, chẳng hạn, trên âm giai phân bố đều, tỉ lệ 4/3 cho một quãng bốn là $1{,}059^5 = 1{,}335$, thay vì $4/3 = 1{,}333$. Một nhạc sĩ được đào tạo bài bản có thể phát hiện ra sự khác biệt này, nhưng thật dễ dàng quen với nó và hầu hết chúng ta đều không nhận thấy.

Từ đó lý thuyết về sự hài hòa trong tự nhiên của trường phái Pythagor thực sự đã được gắn vào cơ sở của âm nhạc phương Tây. Để giải thích tại sao các tỉ số đơn giản lại song hành cùng với sự hài hòa của âm nhạc, chúng ta phải xem xét vật lý của một sợi dây rung động. Tâm lý cảm nhận của con người cũng sẽ đi vào câu chuyện, nhưng chưa phải lúc này.

Điểm then chốt ở đây chính là định luật hai của Newton, liên hệ gia tốc với lực. Bạn cũng phải biết lực tác dụng như thế nào lên một sợi dây có sức căng thay đổi khi sợi dây chuyển động, hơi dãn ra hay co lại. Để làm điều này, ta sử dụng một kết quả mà người cộng sự không mong muốn và hay cãi cọ của Newton là Hooke đã tìm ra năm 1660, được gọi là định luật Hooke: Sự thay đổi chiều dài của một lò xo tỉ lệ với lực tác dụng lên nó. (Thực tế, dây đàn violin cũng là một loại lò xo, nên có thể áp dụng được định luật này). Tuy vậy, vẫn còn một trở ngại. Chúng ta có thể áp dụng các định luật của Newton cho một hệ hữu hạn các khối lượng: ta viết một phương trình cho mỗi khối lượng, và cố gắng hết sức để giải hệ phương trình thu được. Nhưng một dây đàn violin là hệ có khối lượng phân bố liên tục, giống như một đường thẳng gồm vô số các điểm. Do vậy các nhà toán học ở thời kỳ đó nghĩ rằng có thể coi dây đàn là một tập hợp nhiều chất điểm xếp rất gần nhau và liên kết với nhau bởi các lò xo tuân theo định luật Hooke. Họ viết ra các phương trình đã được đơn giản hóa ít nhiều để có thể giải được; rồi họ giải chúng; và cuối cùng họ cho số lượng các chất điểm tăng lên tùy ý, và tìm xem điều gì sẽ xảy ra với nghiệm.

John Bernoulli thực hiện chương trình này vào năm 1727, và kết quả nhận được quả là đẹp phi thường khi xét đến những khó khăn đã được giấu nhẹm đi. Để tránh sự mập mờ trong những mô tả sau đây, hãy tưởng tượng rằng cây đàn violin được đặt nằm ngửa với các dây nằm ngang. Nếu bạn gảy, sợi dây đàn sẽ dao động lên xuống, vuông góc với cây đàn. Bạn hãy ghi nhớ hình ảnh này. Sử dụng chiếc vĩ sẽ khiến cho các dây đàn dao động sang hai bên, và sự tham gia của

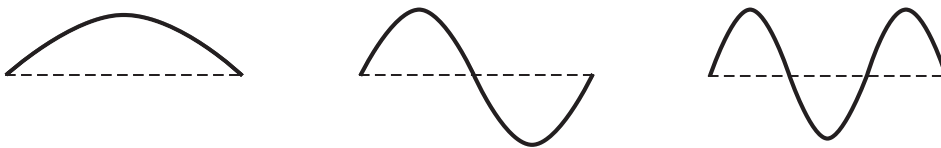
chiếc vĩ sẽ làm cho mọi chuyện trở nên rối rắm thêm. Trong mô hình toán học này, tất cả những gì chúng ta có là một sợi dây với hai đầu cố định chứ không có chiếc đàn violin; sợi dây dao động lên xuống trong một mặt phẳng. Với cách bố trí như thế, Bernoulli đã khám phá ra rằng hình dạng của sợi dây đang dao động ở một thời điểm bất kỳ là một đường hình sin. Biên độ của dao động – độ cao lớn nhất của đường cong này – cũng biến đổi theo một đường hình sin, nhưng theo thời gian chứ không phải theo không gian. Nghiệm của ông có thể viết dưới dạng $\sin ct \sin x$ với c là một hằng số nào đó, xem hình 35. Phần không gian $\sin x$ cho ta biết hình dáng, nhưng nó thay đổi bởi một thừa số là $\sin ct$ ở thời điểm t. Công thức này cho thấy sợi dây dao động lên xuống, lặp đi lặp lại nhiều lần cùng một dạng dao động. Chu kỳ của dao động, tức thời gian giữa hai lặp lại liên tiếp, là $2\pi/c$.



Hình 35 Các ảnh chụp tức thời liên tiếp của sợi dây dao động. Hình dạng của đường cong hình sin tại mỗi thời điểm. Biên độ cũng thay đổi theo thời gian dưới dạng hình sin.

Đây là nghiệm đơn giản nhất mà Bernoulli đã nhận được, nhưng còn có các nghiệm khác nữa; tất cả đều là các đường

hình sin, tức các “mode” dao động khác nhau, với 1, 2, 3 hay nhiều hơn các sóng dọc theo chiều dài của dây, xem hình 36. Một lần nữa, đường hình sin lại là ảnh chụp nhanh của hình dạng dao động ở một thời điểm bất kỳ, và biên độ lại được nhân với một thừa số phụ thuộc thời gian, đồng thời thừa số này cũng biến thiên theo dạng hình sin. Các công thức tương ứng bây giờ là $\sin 2ct \sin 2x$, $\sin 3ct \sin 3x$, v.v. Các chu kỳ dao động tương ứng là $2\pi/2c$, $2\pi/3c$, v.v; do vậy càng có nhiều sóng thì sợi dây dao động càng nhanh.



Hình 36 Ảnh chụp nhanh các mode 1, 2, 3 của sợi dây dao động. Trong mỗi trường hợp sợi dây đều dao động lên xuống, và biên độ của nó cũng biến thiên theo thời gian dưới dạng hình sin.

Hai đầu sợi dây luôn được cố định do cấu tạo của dụng cụ, và cũng là giả thiết của mô hình toán học. Trong tất cả các mode dao động, ngoại trừ mode đầu tiên, còn thì đều có thêm các điểm không dao động trên sợi dây; các điểm này xảy ra ở những chỗ đường cong cắt trục nằm ngang. Các “nút” này chính là nguyên nhân toán học để có các tỉ số đơn giản trong những thí nghiệm của trường phái Pythagor. Chẳng hạn, vì các mode dao động 2 và 3 xảy ra trên cùng một dây, nên khoảng cách giữa các nút liên tiếp trong đường cong mode-2 lớn gấp 3/2 lần khoảng cách tương ứng trong đường cong mode-3. Điều này lý giải vì sao các tỉ số như 3:2 lại xuất hiện một cách tự nhiên từ động lực học của sợi dây dao động, nhưng không giải thích được vì sao các tỉ số như thế lại hài hòa, còn các tỉ số khác thì không. Trước khi trả lời câu hỏi đó, tôi sẽ giới thiệu chủ đề chính của chương này: phương trình sóng.

Phương trình sóng xuất hiện từ định luật chuyển động thứ hai của Newton nếu chúng ta áp dụng phương pháp tiếp cận của Bernoulli ở cấp độ các phương trình chứ không phải nghiệm của chúng. Năm 1746, Jean Le Rond d'Alembert đã đi theo quy trình chuẩn này, coi các dây đàn violin dao động như một tập hợp các chất điểm, nhưng thay vì giải các phương trình và tìm kiếm các hình mẫu khi số các chất điểm tiến tới vô hạn, ông lại đi tìm cái đã xảy ra đối với các phương trình. Ông đã rút ra được một phương trình mô tả sự thay đổi hình dạng của sợi dây theo thời gian. Nhưng trước khi chỉ cho bạn thấy phương trình đó thế nào, chúng ta cần biết một ý tưởng mới, gọi là "đạo hàm riêng".

Hãy tưởng tượng bạn đang ở giữa đại dương, quan sát các sóng với các hình dạng và kích cỡ khác nhau đi qua. Và khi chúng vượt qua, bạn sẽ bị dập dềnh lên xuống. Về mặt vật lý, bạn có thể mô tả môi trường xung quanh bạn đang thay đổi như thế nào theo một số cách khác nhau. Đặc biệt, bạn có thể tập trung vào sự thay đổi theo thời gian hoặc theo không gian. Khi thời gian trôi qua ở vị trí của bạn, tốc độ thay đổi độ cao của bạn đối với thời gian chính là đạo hàm (theo nghĩa giải tích, Chương 3) độ cao của bạn, cũng đối với thời gian. Nhưng nó không mô tả được hình dạng của đại dương ở gần bạn, mà chỉ mô tả được các sóng cao như thế nào khi đi qua chỗ bạn mà thôi. Để mô tả hình dạng, bạn có thể cho "đóng băng thời gian" (một cách hình thức thôi) và tìm xem các sóng cao thấp thế nào: không chỉ ở vị trí của bạn, mà ở cả xung quanh đó nữa. Và nhờ vậy bạn có thể sử dụng giải tích để tính được độ *dốc* của các con sóng ở chỗ bạn. Bạn đang ở đỉnh hay ở hõm sóng? Nếu bạn ở đó thì độ dốc sẽ bằng 0. Hay bạn đang ở lưng chừng theo chiều xuống của con sóng? Nếu vậy thì độ dốc sẽ

khá lớn. Nhờ giải tích, bạn có thể tính được độ dốc bằng cách lấy đạo hàm chiều cao của sóng theo biến không gian.

Nếu một hàm u chỉ phụ thuộc vào một biến, giả sử là x, chúng ta viết đạo hàm dưới dạng $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$: "độ biến thiên nhỏ của u chia độ biến thiên nhỏ của x". Nhưng trong bối cảnh các sóng ở đại dương, hàm số u, chiều cao của con sóng, không chỉ phụ thuộc vào biến không gian x mà còn phụ thuộc cả vào thời gian t nữa. Ở bất kỳ thời điểm cố định nào, chúng ta cũng có thể tính được $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$, nó cho ta biết độ dốc địa phương của con sóng. Nhưng thay vì cố định thời gian và để không gian biến thiên, chúng ta cũng có thể cố định biến không gian và để thời gian biến thiên; nó cho ta biết tốc độ dập dềnh của chúng ta. Ta có thể sử dụng ký hiệu $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ cho "đạo hàm theo thời gian" của u và giải thích nó như là "độ biến thiên nhỏ của u chia cho độ biến thiên nhỏ của t". Nhưng ký hiệu này ẩn chứa một điều gì đó mập mờ, độ biến thiên nhỏ của độ cao $\mathrm{d}u$ có thể, và thường là, khác nhau trong hai trường hợp. Nếu bạn quên điều này, rất có thể bạn sẽ tính sai. Khi ta lấy đạo hàm theo không gian, chúng ta cho biến không gian biến thiên một chút và xem độ cao thay đổi thế nào; khi chúng ta lấy đạo hàm theo thời gian, chúng ta cho biến thời gian biến thiên một chút và xem độ cao thay đổi thế nào. Không có lý do gì để sự thay đổi theo thời gian lại phải bằng với sự thay đổi theo không gian cả.

Do đó các nhà toán học quyết định phải nhắc nhở chính mình về sự mập mờ này bằng cách thay đổi ký hiệu d thành thứ gì đó không (trực tiếp) khiến họ nghĩ về "sự biến thiên nho nhỏ". Và họ đã chọn một ký hiệu d cong rất đạt, viết là ∂. Từ đó họ ký hiệu hai đạo hàm trên là $\partial u/\partial x$ và $\partial u/\partial t$. Bạn có thể cãi rằng đây cũng chẳng phải là một bước tiến gì lớn lao cả,

bởi vì nó cũng dễ dàng gây hiểu lầm hai ý nghĩa khác nhau của ∂u. Có hai câu trả lời cho sự phê phán này. Thứ nhất là trong bối cảnh này bạn không nhất thiết phải coi ∂u như một sự biến thiên cụ thể của u. Câu trả lời thứ hai, đó là việc sử dụng ký hiệu mới nhắc nhở bạn không bị nhầm lẫn nữa. Câu trả lời thứ hai thực sự có tác dụng: ngay khi nhìn thấy ∂, nó sẽ gợi bạn nghĩ tới tốc độ thay đổi đối với nhiều biến khác nhau. Các tốc độ thay đổi này được gọi là *đạo hàm riêng*, bởi vì về mặt khái niệm bạn chỉ thay đổi một phần trong tập hợp các biến, trong khi phần còn lại được giữ nguyên.

Khi d'Alembert tìm ra phương trình cho sợi dây dao động, ông cũng đã phải đối mặt với tình huống này. Hình dạng của sợi dây phụ thuộc vào không gian – bạn nhìn ở khoảng cách nào dọc theo sợi dây – và vào thời gian. Định luật thứ hai về chuyển động của Newton nói với ông rằng gia tốc của một đoạn nhỏ trên sợi dây tỉ lệ với lực tác dụng lên nó. Gia tốc là đạo hàm (cấp hai) theo thời gian. Nhưng lực gây ra bởi các đoạn lân cận của sợi dây kéo đoạn dây mà chúng ta đang xét, còn từ "lân cận" ở đây có ý nghĩa là độ biến thiên nhỏ của "không gian". Việc tính toán những lực này đã dẫn ông tới phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

với $u(x,t)$ là vị trí theo phương thẳng đứng tại điểm có tọa độ x trên sợi dây và tại thời gian t, và c là hằng số liên quan tới sức căng của sợi dây và tính đàn hồi của nó. Thực tế những tính toán này dễ hơn cách tính của Bernoulli, bởi vì chúng tránh được việc phải đưa vào những đặc điểm cụ thể của các nghiệm riêng[1].

Công thức đẹp đẽ của d'Alembert chính là *phương trình sóng*. Giống như định luật hai của Newton, nó là một phương trình vi phân – có chứa đạo hàm (cấp hai) của u. Vì đó là các đạo hàm riêng, nên đây là một *phương trình đạo hàm riêng*. Đạo hàm cấp hai theo biến không gian mô tả lực tác dụng lên dây, và đạo hàm cấp hai theo thời gian chính là gia tốc. Phương trình sóng tạo ra một tiền lệ: hầu hết các phương trình quan trọng trong vật lý toán cổ điển, và rất nhiều các phương trình hiện đại đều là các phương trình đạo hàm riêng.

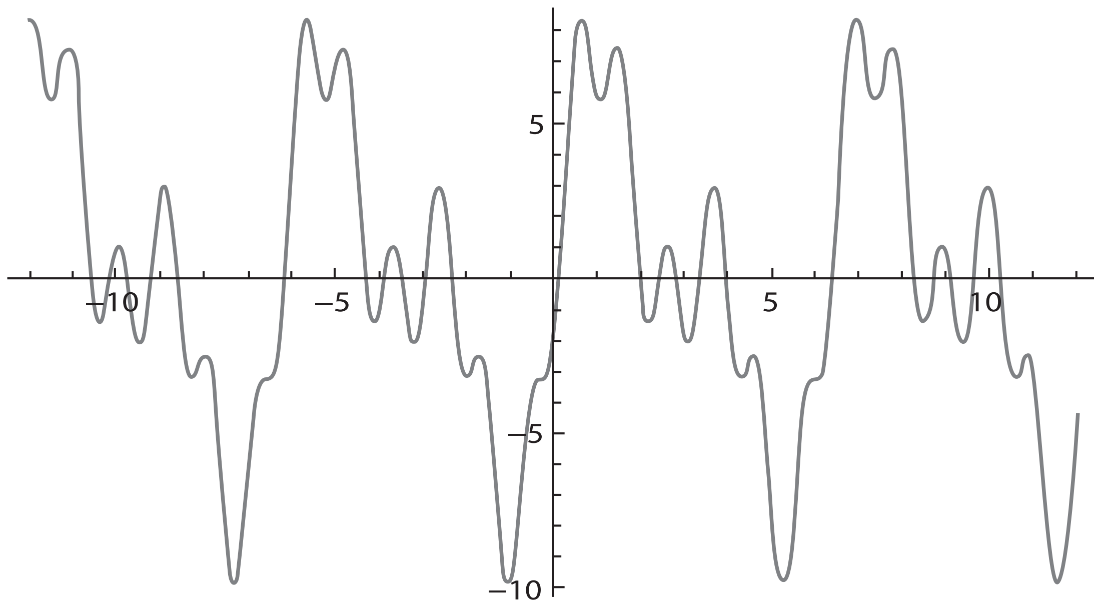
Khi d'Alembert viết ra các phương trình sóng này, ông đã sẵn sàng để giải nó. Nhiệm vụ này đã trở nên dễ dàng hơn nhiều bởi vì hóa ra chúng lại là các phương trình *tuyến tính*. Các phương trình đạo hàm riêng có rất nhiều nghiệm, thực ra là có vô số nghiệm, bởi vì mỗi trạng thái ban đầu cho ta một nghiệm riêng biệt. Chẳng hạn, về mặt lý thuyết, dây đàn violin có thể bị uốn thành bất cứ dạng nào mà bạn muốn trước khi bạn buông nó ra, và phương trình sóng sẽ tiếp nhận nó. "Tuyến tính" ở đây có nghĩa là nếu $u(x,t)$ và $v(x,t)$ là các nghiệm thì bất kỳ tổ hợp tuyến tính nào có dạng $au(x,t) + bv(x,t)$ với a, b là các hằng số cũng sẽ là nghiệm. Tính chất tuyến tính của phương trình sóng phát sinh từ phép gần đúng mà Bernoulli và d'Alembert phải dùng để tìm được cái mà họ có thể giải được: tất cả các nhiễu động đều được coi là rất nhỏ. Bây giờ lực gây ra bởi sợi dây có thể được lấy gần đúng là một tổ hợp tuyến tính độ dịch chuyển của các chất điểm riêng rẽ. Một phép gần đúng tốt hơn có thể dẫn tới một phương trình đạo hàm riêng phi tuyến và như vậy sẽ phức tạp hơn rất nhiều. Về lâu dài, những vấn đề phức tạp như thế cũng cần phải được giải quyết, nhưng những người tiên phong đã có đủ chuyện để bận tâm rồi, nên họ bằng lòng làm

việc với một phương trình gần đúng nhưng rất đẹp và giới hạn sự chú ý vào các sóng có biên độ nhỏ. Và công việc đã tiến triển rất tốt. Thực tế, phương trình đó cũng có thể dùng được khá tốt trong cả trường hợp các sóng có biên độ lớn, quả là một phần thưởng may mắn.

D'Alembert biết rằng mình đã đi đúng đường, bởi vì ông tìm thấy các nghiệm trong đó một dạng cố định chuyển động dọc theo sợi dây, giống như các sóng vậy[2]. Tốc độ của sóng hóa ra lại chính là hằng số *c* trong phương trình. Sóng này có thể di chuyển cả sang phải và sang trái, và từ đây nguyên lý chồng chất bước lên sân khấu. D'Alembert đã chứng minh được rằng mỗi nghiệm là một sự chồng chất của hai sóng, một hướng về bên phải và một hướng về bên trái. Hơn nữa, mỗi sóng riêng rẽ có thể có bất kỳ hình dạng nào[3]. Sóng dừng (còn gọi là sóng đứng) được tìm thấy trên sợi dây đàn violin với hai đầu cố định hóa ra lại là tổng hợp của hai sóng có cùng hình dạng, sóng này ngược với sóng kia, một sóng thì đi sang bên trái và sóng (ngược) thì đi về bên phải. Tại hai đầu, hai sóng này triệt tiêu nhau hoàn toàn; đỉnh của sóng này trùng với hõm của sóng kia. Và do vậy chúng tuân theo đúng các điều kiện biên vật lý.

Các nhà toán học giờ đây bối rối vì sự giàu có của mình. Họ có tới hai phương pháp để giải phương trình sóng: một của Bernoulli, dẫn tới nghiệm dạng sin và cos, và một của d'Alembert dẫn tới các sóng với bất kỳ hình dạng nào. Thoạt tiên nghe có vẻ như nghiệm của d'Alembert tổng quát hơn: sin và cos là các hàm số, nhưng hầu hết các hàm số không có dạng sin và cos. Tuy nhiên, phương trình sóng là tuyến tính,

do vậy bạn có thể tổ hợp các nghiệm dạng Bernoulli bằng cách nhân chúng với các hằng số và cộng lại. Để đơn giản, chỉ xét ảnh chụp nhanh ở một thời điểm cố định, bỏ qua sự phụ thuộc về thời gian. Chẳng hạn, hình 37 cho thấy đồ thị của hàm $5\sin x + 4\sin 2x - 2\cos 6x$. Nó có dạng khá bất thường, và uốn lượn rất nhiều nhưng vẫn trơn và gợn sóng.



Hình 37 Tổ hợp điển hình của các hàm sin và cos với biên độ và tần số khác nhau.

Điều làm nhức nhối những nhà toán học thận trọng là vài hàm số có vẻ như rất xù xì, gai góc, và bạn không thể thu được các hàm này từ sự tổ hợp các hàm sin và cos. Đúng thế, bạn không thu được chúng nếu bạn sử dụng một số hữu hạn các số hạng – và điều đó đã gợi ý một lối thoát. Một chuỗi vô hạn hội tụ của các hàm sin và cos (tức chuỗi vô hạn mà tổng của nó có nghĩa) cũng thỏa mãn phương trình sóng. Như vậy, phải chăng các hàm ziczac cũng thỏa mãn như các hàm trơn? Các nhà toán học hàng đầu đã tranh luận về câu hỏi này và đạt đến một bước quan trọng khi chính vấn đề này đã xuất hiện trong lý thuyết về nhiệt. Các bài toán về

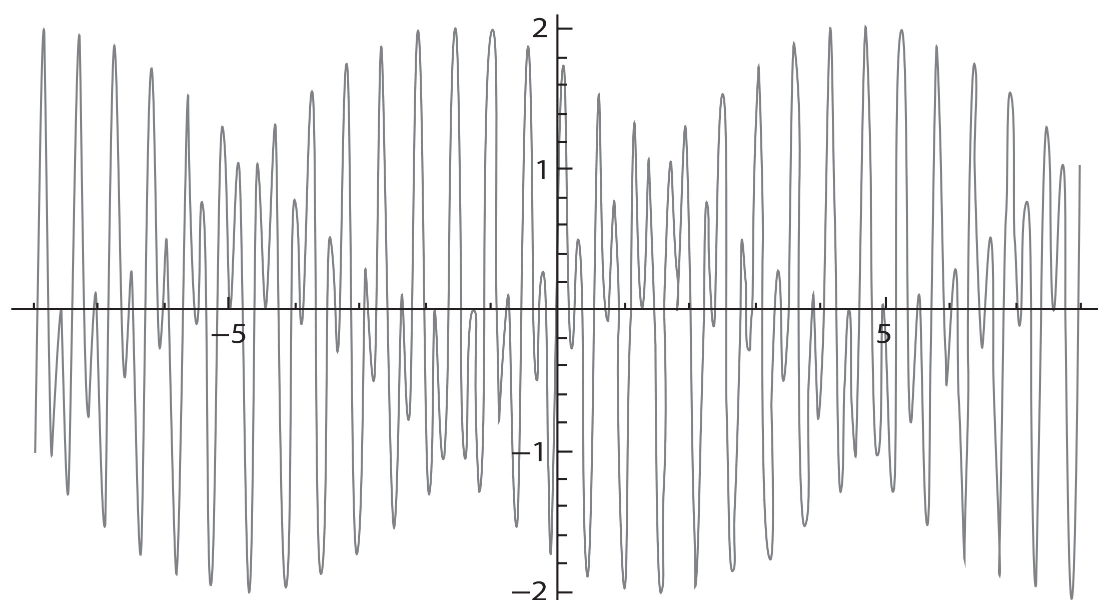
dòng nhiệt có liên quan một cách tự nhiên với các hàm số không liên tục với các bước nhảy đột ngột còn tồi tệ hơn cả các hàm ziczac ở trên. Tôi sẽ bàn về câu chuyện này trong Chương 9, nhưng kết quả là hầu hết các dạng "hợp lý" của sóng đều có thể biểu diễn bởi các chuỗi vô hạn của các hàm sin và cos, do vậy bạn có thể lấy các tổ hợp hữu hạn của sin và cos để biểu diễn gần đúng các dạng sóng với độ chính xác tùy ý.

Các hàm số sin và cos đã giải thích được tại sao các tỉ số hài hòa kia lại có ấn tượng mạnh như thế đối với những người thuộc trường phái Pythagor. Các sóng đặc biệt đó rất quan trọng trong lý thuyết âm, bởi vì chúng biểu diễn các ton "thuần khiết" – tức các nốt đơn trên một nhạc cụ được coi là lý tưởng. Nhưng bất kỳ một nhạc cụ thực nào cũng phát ra một hỗn hợp của các nốt "tinh khiết". Nếu bạn gảy một dây đàn violin, nốt chính mà bạn nghe thấy sẽ là một sóng dạng sin x bị chồng chất thêm một chút sóng dạng sin $2x$, có thể là cả sin $3x$ và v.v. Nốt chính ở đây được gọi là nốt cơ bản, và các nốt còn lại là các họa âm. Con số đứng trước biến x gọi là số sóng. Các tính toán của Bernoulli nói với chúng ta rằng, số sóng tỉ lệ với tần số của sóng: đối với một sóng hình sin cụ thể, tần số là số lần rung của sợi dây trong một đơn vị thời gian của nốt cơ bản.

Đặc biệt, sin $2x$ có tần số gấp đôi tần số của sin x. Điều này nghĩa là gì? Tức là nốt ấy *cao hơn một quãng tám*. Đây là nốt nghe hài hòa nhất nếu được chơi cùng với nốt cơ bản. Nếu bạn nhìn dạng của sợi dây ở mode dao động thứ hai (sin $2x$) trong hình 36, bạn sẽ thấy rằng nó cắt trục ngang ở trung điểm cũng như ở hai đầu. Ở điểm đó, được gọi là nút,

nó vẫn còn đứng yên. Nếu bạn đặt ngón tay mình lên đó, hai nửa của sợi dây vẫn có thể dao động theo dạng sin $2x$, chứ không phải ở dạng sin x. Điều này giải thích phát hiện của trường phái Pythagor rằng sợi dây có độ dài một nửa sẽ tạo ra một nốt cao hơn một quãng tám. Các tỉ số tối giản khác mà họ đã khám phá cũng được giải thích tương tự: tất cả chúng đều gắn với các đường cong hình sin mà tần số của chúng có tỉ số như thế, và những đường cong ấy gần như khớp với nhau trên một sợi dây chiều dài không đổi và có hai đầu cố định.

Tại sao những tỉ số này lại tạo nên sự hài hòa? Có thể lý giải một phần rằng các sóng hình sin với các tần số không phải là các tỉ số đơn giản gây ra một hiện tượng gọi là "phách" khi chúng chồng chất với nhau. Chẳng hạn một tỉ số như 11:23 tương ứng với sin $11x$ + sin $23x$, như trong hình 38, với rất nhiều các thay đổi đột ngột trong hình dạng. Một phần khác, đó là tai chúng ta đáp ứng các âm thanh tới theo cách cũng gần giống như sợi dây đàn violin. Tai chúng ta cũng rung. Khi hai nốt gõ lên, âm thanh tương ứng cũng giống như tiếng ồn vo ve, nghe lớn hơn và mềm hơn, lặp đi lặp lại. Như vậy, nó nghe không thể hài hòa được. Tuy nhiên, còn phần thứ ba của lời giải thích nữa: tai của trẻ con trở nên hòa hợp với âm thanh mà nó nghe thường xuyên. Có nhiều những dây thần kinh liên kết giữa não và tai hơn những vị trí khác. Và do vậy, bộ não điều chỉnh sự hưởng ứng của đôi tai với các âm thanh tới. Nói cách khác, những âm thanh mà chúng ta coi là hài hòa còn có chiều kích văn hóa nữa. Nhưng vì các tỉ số đơn giản nhất là hài hòa một cách tự nhiên, nên hầu hết các nền văn hóa đều sử dụng chúng.



Hình 38 Phách.

Các nhà toán học rút ra phương trình sóng lần đầu tiên trong một thiết đặt đơn giản nhất mà họ có thể nghĩ tới: một sợi dây căng dao động, tức là một hệ một chiều. Các ứng dụng thực tiễn đòi hỏi phải có một lý thuyết tổng quát hơn, bằng cách dựng mô hình các sóng trong hai hoặc ba chiều. Ngay cả trong âm nhạc, một cái trống cũng đòi hỏi mô hình hai chiều để mô tả những hình mẫu dao động của hai màng trống. Vấn đề tương tự cũng xuất hiện cho sóng nước ở bề mặt đại dương. Khi xảy ra động đất, cả Trái Đất rung lên như một cái chuông, mà hành tinh của chúng ta là ba chiều. Nhiều lĩnh vực khác của vật lý bao gồm các mô hình có số chiều là hai hoặc ba. Mở rộng phương trình sóng cho số chiều cao hơn hóa ra lại rất đơn giản; tất cả những điều bạn phải làm là thực hiện lại các tính toán đã được áp dụng cho sợi dây đàn violin. Khi đã học được cách chơi trong thiết đặt đơn giản đó, thì việc chơi với một thiết đặt thực tế hơn sẽ không mấy khó khăn.

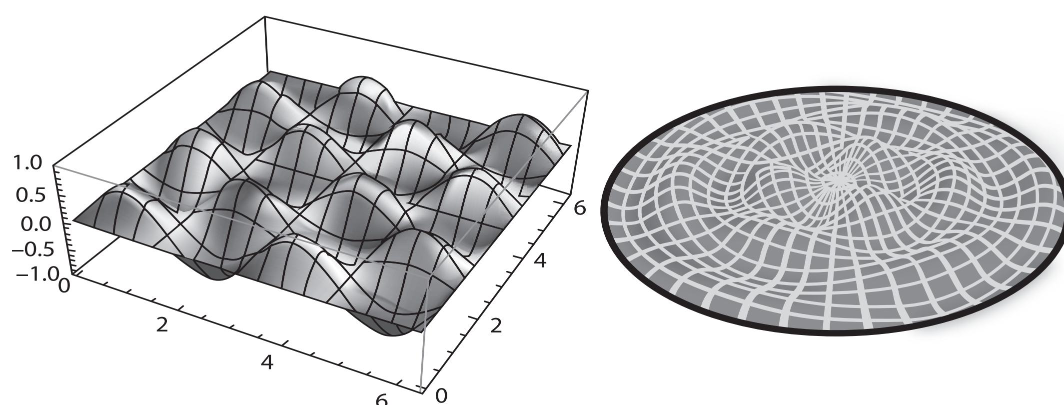
Chẳng hạn trong không gian ba chiều, chúng ta sử dụng ba tọa độ không gian (x, y, z) và tọa độ thời gian t. Sóng được mô

tả là một hàm số u phụ thuộc vào bốn tọa độ này. Chẳng hạn, hàm này có thể là hàm mô tả áp lực trong một khối khí khi sóng âm đi qua nó. Đưa ra các giả thiết y hệt như d'Alembert đã làm, đặc biệt là giả thiết biên độ các nhiễu loạn là rất nhỏ, với phương pháp tiếp cận tương tự, ta nhận được phương trình cũng rất đẹp sau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Tổng trong ngoặc được gọi là Laplacian, và nó tương ứng với sự chênh lệch trung bình giữa giá trị của u ở điểm đang xét và lân cận của điểm đó. Biểu diễn này xuất hiện thường xuyên trong vật lý toán tới mức có một ký hiệu đặc biệt dành riêng cho nó: $\nabla^2 u$. Để nhận được Laplacian cho trường hợp hai chiều, chúng ta chỉ cần bỏ đi số hạng có liên quan tới z, dẫn tới phương trình sóng hai chiều cần tìm.

Tính mới lạ trong số chiều cao hơn là ở chỗ: hình dạng mà trong đó các sóng nảy sinh, gọi là miền xác định của phương trình, có thể rất phức tạp. Trong trường hợp một chiều, hình dạng kết nối duy nhất đó là một khoảng, một đoạn của đường thẳng. Trong trường hợp hai chiều, nó có thể là hình bất kỳ mà bạn có thể vẽ trong mặt phẳng, và trong trường hợp ba chiều, là bất kỳ hình nào trong không gian. Bạn có thể mô hình hóa một cái trống vuông, một cái trống hình chữ nhật, hình tròn[4], hay cái trống có dạng của một con mèo. Đối với động đất, bạn có thể chọn miền hình cầu, hay chính xác hơn, một hình ellipsoid hơi dẹt ở hai cực. Nếu bạn đang thiết kế một chiếc ôtô và muốn loại bỏ những dao động không mong muốn, miền xác định cho phương trình của bạn phải có dạng một cái xe ôtô, hay bất kỳ một phần nào của xe mà các kỹ sư muốn tập trung vào.



Hình 39 *Trái*: Một ảnh chụp nhanh của trống hình chữ nhật dao động với số sóng bằng 2 và 3. *Phải*: Ảnh chụp nhanh mode 1 của một trống tròn.

Đối với bất kỳ sự chọn lựa hình dạng nào của miền xác định, có những hàm tương tự như các hàm sin và cos của Bernoulli: hình mẫu đơn giản nhất của dao động. Các hình mẫu này được gọi là các mode, hay các mode chuẩn, nếu bạn muốn làm cho những điều bạn đang nói trở nên tuyệt đối rõ ràng. Ta có thể thu được tất cả các sóng khác bằng cách chồng chất các mode chuẩn, và sử dụng các chuỗi vô hạn một lần nữa nếu cần thiết. Tần số của các mode chuẩn biểu diễn tần số dao động tự nhiên của miền xác định của phương trình. Nếu miền xác định là hình chữ nhật, thì đó là các hàm số lượng giác có dạng sin *mx* cos *ny*, với *m*, *n* là các số nguyên, cho ta hình dạng sóng như trong hình 39 (*trái*). Nếu đó là một hình tròn, chúng được xác định bởi các hàm mới có tên là các hàm Bessel, với những hình dạng thú vị hơn, hình 39 (*phải*). Những kết quả toán học này không chỉ áp dụng cho trống mà còn cho cả sóng nước, sóng âm, sóng điện từ như ánh sáng, chẳng hạn (Chương 11), thậm chí là các sóng lượng tử nữa (Chương 14). Nó là cơ bản đối với tất cả các lĩnh vực trên. Laplacian cũng xuất hiện trong các phương trình mô tả các hiện tượng vật lý khác; đặc biệt là điện trường, từ trường và

trường hấp dẫn. Thủ thuật ưa thích của các nhà toán học là bắt đầu với một vấn đề “chơi chơi”, một vấn đề đơn giản đến nỗi không thể có ý nghĩa thực tiễn, nhưng hóa ra lại mang đến những kết quả rất tốt đối với các sóng.

Đó là một lý do giải thích tại sao sẽ rất dại dột nếu đánh giá một ý tưởng toán học chỉ thông qua bối cảnh ban đầu khi nó xuất hiện. Việc mô hình hóa một sợi dây đàn violin có vẻ như vô nghĩa khi bạn lại muốn hiểu về động đất. Nhưng nếu bạn nhảy ngay vào chỗ nước sâu, và cố gắng đương đầu với tất cả những vấn đề rối rắm của một trận động đất thực sự, bạn sẽ bị chết chìm. Bạn nên bắt đầu chèo ở chỗ nước nông và lấy thêm tự tin để bơi một ít quãng trong hồ. Sau đó bạn mới có thể sẵn sàng để dùng ván nhảy cao được.

Phương trình sóng là một thành công ngoạn mục, và trong một vài lĩnh vực của vật lý, nó mô tả thực tại một cách khá chính xác. Tuy vậy, để dẫn ra nó đòi hỏi phải có một số giả thiết đơn giản hóa. Khi những giả thiết này không sát thực tế, chính những ý tưởng vật lý có thể được thay đổi để phù hợp với bối cảnh, dẫn tới một vài phiên bản khác nhau của phương trình sóng.

Động đất là một ví dụ điển hình. Ở đây, vấn đề chính không phải là giả thiết của d’Alembert cho rằng biên độ của sóng là nhỏ, mà là những thay đổi trong các tính chất vật lý của miền xác định. Những tính chất này có thể có ảnh hưởng lớn tới sóng địa chấn, tức những dao động truyền xuyên qua Trái Đất. Bằng cách tìm hiểu những ảnh hưởng này, chúng ta có thể nhìn sâu hơn vào hành tinh của chúng ta và xem cấu tạo của nó thế nào.

Có hai kiểu sóng địa chấn: sóng nén và sóng biến dạng trượt, thường được viết tắt là sóng P và sóng S. (Còn có nhiều sóng khác nữa, đây chỉ là một giải thích đơn giản hóa, đề cập đến một vài tính chất cơ bản mà thôi). Cả hai sóng này đều có thể xuất hiện trong môi trường rắn, nhưng sóng S không tồn tại trong môi trường lỏng. Các sóng P là sóng nén, tương tự với sóng âm trong không khí, và những thay đổi về áp suất diễn ra dọc theo phương truyền sóng. Các sóng này gọi là sóng dọc. Còn sóng S là sóng ngang, phương dao động vuông góc với phương truyền sóng, giống như sóng trên dây đàn violin. Nó khiến các khối rắn biến dạng trượt, giống như một bộ bài bị đẩy về một bên, khiến cho các lá bài trượt dọc theo nhau. Chất lỏng thì không hành xử như một bộ bài.

Khi xảy ra động đất, nó phát ra cả hai loại sóng nói trên. Sóng P truyền nhanh hơn, nên một nhà địa chấn học ở đâu đó trên bề mặt Trái Đất sẽ quan sát được chúng đầu tiên. Sau đó sóng S chậm hơn mới truyền đến. Năm 1906, nhà địa chất học người Anh, Richard Oldham lợi dụng sự khác biệt này đã có một khám phá quan trọng về phần bên trong hành tinh của chúng ta. Nói một cách nôm na, Trái Đất có một lõi sắt, bao quanh bởi lớp vỏ đá (manti), và các lục địa trôi nổi ở trên lớp vỏ manti đó. Oldham gợi ý rằng lớp bên ngoài của lõi phải là chất lỏng. Nếu vậy, sóng S không thể đi qua lớp đó, nhưng sóng P thì có thể. Như vậy có một kiểu bóng của sóng S, và bạn có thể tìm ra nó ở đâu bằng cách quan sát các tín hiệu thu được từ động đất. Nhà toán học Anh Harold Jeffreys đã phân loại chi tiết hơn vào năm 1926, và xác nhận rằng gợi ý của Oldham là đúng đắn.

Nếu trận động đất đủ mạnh, nó có thể khiến cả hành tinh dao động theo một trong các mode chuẩn của nó – các hàm

tương tự cho Trái Đất của hàm sin và cos cho đàn violin. Cả hành tinh sẽ rung lên như một quả chuông, theo nghĩa đen, nếu chúng ta chỉ nghe các tần số rất thấp có liên quan. Những dụng cụ đủ nhạy để ghi lại các mode này đã xuất hiện vào những năm 1960, và chúng đã được sử dụng để quan sát hai trận động đất mạnh nhất còn được ghi lại một cách khoa học. Đó là trận động đất ở Chile năm 1960 (độ lớn 9,5) và ở Alaska năm 1964 (độ lớn 9,2). Trận động đất đầu tiên làm thiệt mạng 5000 người, trận thứ hai là 130, do nó xảy ra ở một vùng hẻo lánh. Cả hai đều gây ra sóng thần và làm thiệt hại hết sức nặng nề. Cả hai đều cho ta cái nhìn chưa từng có vào sâu bên trong lòng Trái Đất, do đã kích thích được những mode dao động cơ bản của Trái Đất.

Những phiên bản phức tạp của phương trình sóng đã mang tới cho các nhà địa chấn học khả năng nhìn thấu những gì xảy ra dưới chân chúng ta hàng trăm kilomet. Họ có thể lập bản đồ các mảng kiến tạo trượt lên nhau của Trái Đất, mảng này trượt lên mảng kia, còn gọi là sự hút chìm. Sự hút chìm là nguyên nhân của động đất, đặc biệt là động đất do đứt gãy nghịch chờm giống như hai trận động đất vừa kể trên. Nó cũng tạo ra các dãy núi dọc theo bờ các lục địa, chẳng hạn như dãy Andes, và cả các núi lửa, nơi các mảng trượt xuống quá sâu bắt đầu tan chảy và magma tràn lên bề mặt. Một khám phá gần đây cho thấy một mảng không nhất thiết bị hút chìm toàn bộ, mà có thể bị nứt gãy thành các phiến khổng lồ, chìm xuống lớp manti ở các độ sâu khác nhau.

Phần thưởng lớn nhất trong lĩnh vực này đó là tìm ra cách đáng tin cậy để dự báo động đất và sự phun trào của núi lửa. Đây là những điều khó nắm bắt vì những điều kiện gây ra những hiện tượng như thế là sự kết hợp rối rắm của rất nhiều thành tố

ở các địa điểm khác nhau. Tuy nhiên, đã có một số tiến bộ, và phiên bản phương trình sóng của các nhà địa chấn đã làm nền cho nhiều phương pháp đang được điều tra nghiên cứu.

Chính những phương trình này đã có nhiều ứng dụng mang tính thương mại hơn. Những công ty dầu mỏ thăm dò "vàng lỏng" cách một vài kilomet dưới mặt đất bằng cách cho nổ ở mặt đất, rồi dùng sóng phản hồi từ các sóng địa chấn, họ có thể lập được bản đồ địa chất ngầm. Vấn đề toán học chính ở đây là xây dựng lại bản đồ địa chất từ những tín hiệu nhận được, hơi giống với việc sử dụng các phương trình sóng theo hướng giật lùi. Thay vì giải các phương trình trong một miền đã biết để xem các sóng ra sao, các nhà toán học lại sử dụng các hình mẫu quan sát được của các sóng để tìm lại những đặc điểm địa chất của miền xác định. Những trường hợp làm giật lùi như thế này – tức giải bài toán ngược, theo thuật ngữ chuyên ngành – luôn khó hơn là làm theo cách khác. Một trong những công ty lớn về dầu khí đã thực hiện những tính toán như vậy gần 25.000 lần mỗi ngày.

Khoan tìm dầu mỏ có những vấn đề của riêng nó, giống như biến cố lớn ở giàn khoan Deepwater Horizon, năm 2010, đã cho thấy rõ điều đó. Nhưng ở thời điểm hiện nay, xã hội con người phụ thuộc nặng nề vào dầu mỏ, và sẽ phải mất hàng thập kỷ để giảm thiểu một cách đáng kể sự phụ thuộc này, ngay cả khi tất cả mọi người đều mong muốn như thế. Lần sau khi đổ dầu đầy bình của mình, bạn hãy bớt chút thời gian nghĩ về những nhà toán học tiên phong, những người muốn biết tại sao dây đàn violin lại có thể tạo ra âm thanh. Thời ấy, đó không phải là một vấn đề mang tính thực tiễn, và cho đến bây giờ vẫn thế. Nhưng nếu không có những khám phá của họ, thì ôtô của bạn sẽ không thể đưa bạn đến được đâu cả.

9 Gợn sóng và đốm sáng

Phép biến đổi Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Bất kỳ hình mẫu dao động nào trong không gian và thời gian đều có thể xem là chồng chất của các hình mẫu dạng sin với các tần số khác nhau.

Tại sao nó lại quan trọng?

Các thành phần tần số có thể được sử dụng để phân tích các hình mẫu, tạo nên các hình mẫu để tìm các đặc điểm quan trọng và bỏ đi các ồn nhiễu ngẫu nhiên.

Nó đã dẫn tới những gì?

Kỹ thuật của Fourier được sử dụng rất rộng rãi, chẳng hạn, trong xử lý ảnh và cơ học lượng tử. Nó được sử dụng để tìm kiếm cấu trúc của các phân tử sinh học lớn như ADN, để nén dữ liệu ảnh trong các bức ảnh kỹ thuật số, để làm sạch các bản thu âm cũ kỹ hoặc bị hư hỏng, và còn để phân tích các trận động đất nữa. Các biến thể hiện đại được sử dụng để lưu trữ dữ liệu về dấu vân tay hiệu quả hơn và để cải thiện các phép chụp chiếu trong y tế.

Cuốn *Những nguyên lý* của Newton đã mở ra cánh cửa cho những nghiên cứu toán học về tự nhiên, nhưng những người đồng hương của ông đã quá bận tâm tới cuộc tranh luận về chuyện ai là người được hưởng quyền sở hữu trí tuệ của phép tính vi tích phân để có thể tìm ra những thứ nằm bên ngoài nó. Trong khi những bộ óc tinh tế nhất của nước Anh đang sôi sùng sục lên với thứ mà họ đã biết là những luận điệu đáng hổ thẹn về nhà toán học vĩ đại nhất còn đang sống của đất nước – hầu hết trong số đó có lẽ cũng là lỗi lầm của chính Newton, bởi ông nghe theo những người bạn có thiện chí nhưng kém hiểu biết – thì những đồng nghiệp ở châu lục đã mở rộng những ý tưởng của Newton về các định luật của tự nhiên tới hầu hết các ngành trong khoa học vật lý. Phương trình sóng xuất hiện và nhanh chóng theo sau là các phương trình tương tự về hấp dẫn, tĩnh điện, đàn hồi và dòng nhiệt. Một số mang tên của những người khám phá ra chúng, như phương trình Laplace, phương trình Poisson. Nhưng phương trình cho nhiệt thì không; nó mang một cái tên rất nôm na và không hoàn toàn chính xác: “phương trình nhiệt”. Phương trình này do Joseph Fourier đề xuất, và những ý tưởng của ông đã dẫn tới việc sản sinh ra một lĩnh vực mới của toán học mà những phân nhánh của nó đã tỏa rộng ra rất nhiều so với ban đầu. Những ý tưởng này có lẽ đã được khởi phát từ phương trình sóng, nơi mà những phương pháp tương tự đã thấp thoáng xuất hiện trong ý thức tập thể của cộng đồng toán học, nhưng lịch sử chọn nhiệt.

Phương pháp mới đã có một khởi đầu đầy hứa hẹn: năm 1807, Fourier đã gửi một bài báo về dòng nhiệt cho Viện Hàn lâm Khoa học Pháp, dựa trên một phương trình đạo hàm riêng mới. Mặc dù, cơ quan đầy uy tín này từ chối cho đăng công trình đó, nhưng nó đã thúc đẩy Fourier phát triển xa hơn ý tưởng của mình và thử lại một lần nữa. Vào thời đó, Viện Hàn lâm hằng năm có giải thưởng cho những nghiên cứu về bất kỳ chủ đề nào mà họ cho là đủ thú vị, và họ chọn chủ đề về nhiệt cho giải thưởng năm 1812. Fourier đệ trình đúng lúc công trình đã chỉnh sửa và mở rộng của mình và đã giành được giải thưởng. Phương trình truyền nhiệt của ông có dạng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

trong đó $u(x, t)$ là nhiệt độ tại vị trí x của một thanh kim loại tại thời điểm t, với giả thiết rằng thanh này là vô cùng mảnh, và α là một hằng số gọi là hệ số *khuếch tán nhiệt*, do vậy lẽ ra nên gọi nó là phương trình nhiệt độ. Ông cũng phát triển một phiên bản có số chiều cao hơn:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

đúng cho bất kỳ miền xác định nào cho trước trong mặt phẳng hoặc không gian.

Phương trình truyền nhiệt giống phương trình sóng một cách kỳ lạ, chỉ có một khác biệt quan trọng. Phương trình sóng sử dụng đạo hàm cấp hai theo thời gian: $\partial^2 u/\partial t^2$, nhưng trong phương trình truyền nhiệt nó được thay thế bởi đạo hàm cấp một $\partial u/\partial t$. Đây dường như chỉ là một sự thay đổi nhỏ, nhưng ý nghĩa vật lý thì lại rất lớn lao. Nhiệt không duy trì vô hạn định, như một dây đàn violin có thể dao động mãi

mãi (theo phương trình sóng, không có ma sát hay dao động tắt dần). Thay vì thế, nhiệt tiêu tán, mất dần theo thời gian, trừ phi có nguồn nhiệt nào đó liên tục bổ sung cho nó. Như vậy, bài toán điển hình ở đây là: đốt nóng một đầu của thanh kim loại để giữ nó ở một nhiệt độ ổn định và làm lạnh đầu kia một cách tương tự để xem nhiệt độ biến thiên dọc theo thanh sẽ như thế nào khi nó được đặt trong trạng thái dừng. Câu trả lời là nhiệt sẽ giảm dần theo hàm mũ. Một bài toán điển hình khác, đó là chỉ định profin (profile) nhiệt độ ban đầu dọc theo thanh và xem nó biến thiên thế nào theo thời gian. Có lẽ nên để cho một nửa thanh ban đầu ở nhiệt độ cao và nửa kia ở nhiệt độ thấp hơn; phương trình sẽ cho ta thấy nhiệt truyền thế nào từ phần nóng hơn sang phần lạnh hơn.

Có lẽ khía cạnh hấp dẫn nhất trong bài báo giành giải thưởng của Fourier không phải là phương trình, mà là cách ông giải nó. Nếu profin nhiệt độ ban đầu là hàm lượng giác, chẳng hạn sin x, thì việc giải phương trình này khá dễ dàng (đối với những người đã có kinh nghiệm), và đáp số là $e^{-\alpha t}\sin x$. Nó giống với mode cơ bản của phương trình sóng, nhưng ở phương trình sóng nghiệm là sin ct sin x. Dao động vĩnh cửu của dây đàn violin tương ứng với thành phần sin ct, ở đây đã được thay thế bằng hàm mũ với số mũ âm $-\alpha t$ cho chúng ta thấy rằng toàn bộ profin nhiệt độ giảm dần trên thanh theo cùng một tốc độ (Sự khác biệt về mặt vật lý ở đây là sóng bảo toàn năng lượng nhưng dòng nhiệt thì không). Tương tự, với profin sin5x, nghiệm là $e^{-25\alpha t}\sin 5x$, cũng tắt dần, nhưng nhanh hơn nhiều. 25 là 5^2, và đây là ví dụ về một hình mẫu tổng quát, áp dụng được cho các profin ban đầu có dạng sinnx hay cosnx[1]. Để giải phương trình truyền nhiệt, ta chỉ cần nhân với $e^{-n^2\alpha t}$.

Bây giờ câu chuyện cũng đi theo cùng nguyên tắc chung như phương trình sóng. Phương trình truyền nhiệt là tuyến tính, do vậy chúng ta có thể chồng chất các nghiệm. Nếu profin ban đầu là

$$u(x,0) = \sin x + \sin 5x$$

thì nghiệm sẽ là

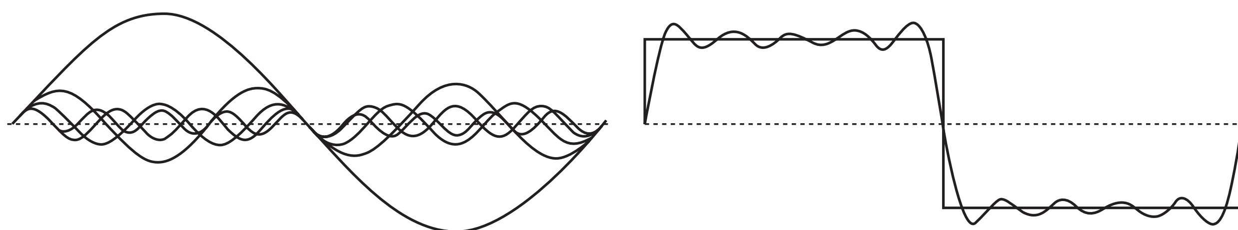
$$u(x,t) = e^{-\alpha t}\sin x + e^{-25\alpha t}\sin 5x$$

và ở mỗi mode nghiệm này sẽ tắt dần với tốc độ khác nhau. Nhưng các profin ban đầu như thế này có vẻ hơi giả tạo. Để giải bài toán mà tôi đã nhắc đến lúc trước, chúng ta cần một profin ban đầu thỏa mãn $u(x, 0) = 1$ ở nửa thanh, nhưng bằng –1 ở nửa thanh còn lại. Profin này không liên tục, mà có dạng vuông góc theo thuật ngữ thường dùng trong kỹ thuật. Nhưng các đường hình sin và cos lại liên tục, cho nên không sự chồng chất nào của các hàm sin và cos có thể biểu diễn một sóng vuông góc như thế.

Không có chồng chất hữu hạn nào, đó là điều chắc chắn. Nhưng, lại một lần nữa, điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta cho phép một tổ hợp có *vô hạn* các số hạng? Khi đó chúng ta có thể thử biểu diễn profin ban đầu như là một chuỗi vô hạn có dạng

$$u(x,0) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots$$
$$+b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \ldots$$

với các hằng số a_0, a_1, a_2, a_3,...,b_1, b_2, b_3... phù hợp (không có b_0 vì $\sin 0x = 0$.) Bây giờ, dường như chúng ta có thể thu được một sóng vuông góc (xem hình 40). Thực ra, hầu hết các hệ số có thể cho bằng 0. Chỉ riêng các b_n với n lẻ là cần thiết và khi đó $b_n = 8/n\pi$.



Hình 40 Cách nhận được sóng vuông góc từ các hàm sin và cos. *Trái*: Các sóng thành phần hình sin. *Phải*: Tổng của chúng là một sóng vuông góc. Ở đây chúng tôi chỉ vẽ một ít số hạng của chuỗi Fourier. Các số phụ thêm sẽ làm cho sự xấp xỉ trở nên tốt hơn.

Thậm chí Fourier còn có các công thức tổng quát cho các hệ số a_n và b_n đối với một hàm profin $f(x)$ cho trước theo các tích phân:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Sau một hành trình dài vất vả qua các khai triển chuỗi lũy thừa của các hàm lượng giác, ông đã nhận ra rằng có một cách đơn giản hơn rất nhiều để rút ra các công thức như thế. Nếu bạn lấy hai hàm lượng giác khác nhau, ví dụ cos $2x$ và sin $5x$, nhân chúng với nhau và lấy tích phân từ 0 đến 2π, kết quả bạn nhận được là 0. Thậm chí là cả với cos $5x$ và sin $5x$ cũng thế. Nhưng nếu chúng giống nhau, cả hai đều là sin $5x$ chẳng hạn, thì tích phân tích của chúng lại không bằng 0 mà là π. Nếu bạn bắt đầu bằng cách giả sử rằng $f(x)$ là tổng của một chuỗi lượng giác, khi nhân tất cả với sin $5x$ và lấy tích phân, thì tất cả các thành phần trong tổng đều biến mất, ngoại trừ thành phần có chứa sin $5x$, tức là $b_5\sin 5x$. Kết quả phép lấy tích phân trong trường hợp này là π. Chia cho π, bạn sẽ nhận được công thức Fourier cho b_5. Làm tương tự bạn sẽ thu được tất cả các hệ số còn lại.

Mặc dù giành được giải thưởng của Viện Hàn lâm, nhưng công trình của Fourier đã bị chỉ trích một cách thẳng thắn

vì không đủ chặt chẽ, và Viện Hàn lâm đã từ chối xuất bản. Điều này là rất không bình thường và nó đã làm Fourier phát cáu, nhưng Viện Hàn lâm vẫn giữ ý kiến của họ. Fourier đã bị chọc tức. Trực giác vật lý mách bảo ông rằng ông đã đúng, và nếu bạn đặt chuỗi của ông vào phương trình, thì rõ ràng nó là một nghiệm. Thế nghĩa là *ổn rồi*. Vấn đề thực sự ở đây là ông đã vô tình gợi lại một vết thương cũ. Như chúng ta đã thấy ở Chương 8, Euler và Bernoulli đã tranh luận trong nhiều năm ròng về một vấn đề tương tự cho phương trình sóng, mà ở đó sự tiêu tán với thời gian theo hàm mũ của Fourier được thay bằng một dao động vô tận có dạng hình sin trong biên độ của sóng. Các vấn đề toán học ẩn sau chuyện này thì như nhau. Thực tế, Euler đã công bố các công thức dưới dạng tích phân cho các hệ số ở trường hợp phương trình sóng.

Tuy nhiên, Euler chưa bao giờ khẳng định công thức này cũng áp dụng được cho các hàm số $f(x)$ không liên tục, điều gây tranh cãi nhất trong công trình của Fourier. Mô hình dây đàn violin dù sao cũng không bao hàm điều kiện ban đầu không liên tục – những điều kiện như vậy chỉ phù hợp với một dây đàn bị đứt, mà dây như thế thì sẽ không bao giờ dao động cả. Nhưng với trường hợp về nhiệt, giữ một phần của thanh kim loại ở một nhiệt độ và phần kề đó ở một nhiệt độ khác cũng là chuyện tự nhiên thôi. Trong thực tế, việc chuyển trạng thái là trơn nhưng rất dốc, tuy nhiên một mô hình không liên tục là hợp lý và thuận tiện hơn cho tính toán. Sự thật là, nghiệm của phương trình truyền nhiệt giải thích được *tại sao* việc chuyển trạng thái lại rất nhanh chóng trở nên trơn và rất dốc, khi nhiệt khuếch tán sang hai bên. Như vậy, vấn đề mà Euler không nhất thiết phải bận tâm đã trở thành không thể lờ đi được, và Fourier phải hứng chịu hệ quả tồi tệ đó.

Các nhà toán học bắt đầu nhận ra rằng các chuỗi vô hạn là những con quái vật nguy hiểm. Chúng không hành xử như các tổng hữu hạn ngoan ngoãn. Cuối cùng thì các mớ rối rắm lộn xộn này cũng được giải quyết, nhưng cần phải có cái nhìn mới về toán học và phải mất một trăm năm vật lộn vất vả để làm điều đó. Ở thời Fourier, mọi người đều nghĩ rằng họ đã biết về tích phân, các hàm số và các chuỗi vô hạn, nhưng trong thực tế thì còn khá mơ hồ: "Tôi biết nó khi tôi thấy nó". Do vậy khi Fourier đệ trình bài báo mở ra kỷ nguyên mới của mình, có nhiều lý do thích đáng để những quan chức của Viện Hàn lâm thấy phải thận trọng. Và họ đã không nhượng bộ, vì thế năm 1822, Fourier lờ đi sự phản đối của họ và đã cho công bố công trình của mình dưới dạng một cuốn sách nhan đề *Lý thuyết giải tích của nhiệt* (*Théorie analytique de la chaleur*). Năm 1824, ông được bổ nhiệm làm thư ký của Viện Hàn lâm, không thèm đếm xỉa đến những chỉ trích, ông đã cho công bố bài báo gốc năm 1811 của mình trên tạp chí đầy uy tín của Viện Hàn lâm mà không hề thay đổi nó.

Bây giờ chúng ta đều biết rằng mặc dù Fourier về mặt tinh thần là đúng, nhưng những người chỉ trích ông có lý do để lo ngại về tính chặt chẽ. Những vấn đề đó rất tinh tế và đáp án của chúng cũng rất xa với trực giác. Giải tích Fourier, như cách gọi của chúng ta bây giờ, vận hành rất trơn tru, nhưng nó có những chiều sâu ẩn giấu mà Fourier đã không ý thức được.

Câu hỏi dường như được đặt ra là: khi nào thì chuỗi Fourier hội tụ về hàm số mà nó biểu diễn? Tức là, nếu bạn thêm vào nhiều số hạng nữa, thì sự xấp xỉ của chuỗi tới hàm có tốt hơn không? Ngay cả Fourier cũng biết rằng câu trả lời không phải là "luôn luôn", mà dường như là "thường như thế, nhưng

có thể có vấn đề ở những điểm gián đoạn". Chẳng hạn, ở điểm giữa của nó, điểm mà nhiệt độ thay đổi đột ngột, chuỗi Fourier của sóng vuông góc hội tụ, nhưng về một con số sai. Tổng của chuỗi là 0, nhưng sóng vuông góc lại nhận giá trị 1.

Đối với hầu hết các mục đích vật lý, việc thay đổi giá trị của một hàm ở một điểm cô lập nào đó không phải là vấn đề lớn. Sóng vuông góc, nếu có thay đổi như vậy, thì *trông* vẫn là vuông góc. Đây thực ra chỉ là một thay đổi nhỏ ở điểm gián đoạn. Với Fourier, đây không phải là vấn đề lớn. Ông đã mô hình hóa sự truyền nhiệt, và ông không quan tâm tới việc mô hình này là nhân tạo hay cần các thay đổi mang tính kỹ thuật, miễn là không có ảnh hưởng lớn tới kết quả cuối cùng. Nhưng không thể dễ dàng bỏ qua vấn đề hội tụ được, bởi vì các hàm số khác có thể có những điểm gián đoạn phức tạp hơn sóng vuông góc rất nhiều.

Tuy nhiên, Fourier đã tuyên bố rằng phương pháp của ông có thể xử lý bất kỳ hàm nào, như vậy nó cũng phải dùng được ngay cả đối với các hàm như $f(x) = 0$ khi x hữu tỉ và bằng 1 khi x vô tỉ. Đây là một hàm gián đoạn ở mọi điểm. Đối với những hàm như thế, vào thời đó, người ta thậm chí còn chưa biết tích phân *là gì*. Và hóa ra đó lại chính là nguyên nhân thực sự gây tranh cãi. Không ai định nghĩa tích phân là gì cả, không chỉ riêng cho những hàm như thế. Tồi tệ hơn nữa, còn chưa từng có ai định nghĩa một *hàm số* là gì. Và thậm chí nếu bạn có thể sửa chữa được hết những thiếu sót này, thì vấn đề ở đây không còn chỉ là chuỗi Fourier có hội tụ hay không. Khó khăn thực sự đó là tìm hiểu xem nó hội tụ *theo nghĩa nào*.

Giải quyết những vấn đề này thực ra rất phức tạp. Nó đòi hỏi phải có một lý thuyết mới về tích phân – đã được Henri

Lebesgue cung cấp – một sự phát biểu lại các cơ sở của toán học theo lý thuyết tập hợp, bắt đầu bởi George Cantor và vô tình lại tạo ra những vấn đề rất khó khăn hoàn toàn mới, những hiểu biết sâu sắc từ những nhà toán học đỉnh cao như Riemann, và một tá những trừu tượng hóa để giải quyết vấn đề hội tụ. Lời phán quyết cuối cùng, với sự giải thích đúng đắn là: những ý tưởng của Fourier có thể được sửa chữa để trở nên chặt chẽ. Nó đã tìm ra một lớp các hàm rất rộng, tuy không phổ quát. Việc chuỗi có hội tụ về hàm $f(x)$ với mọi giá trị của x hay không, không phải là một câu hỏi đúng, mọi thứ sẽ ổn với điều kiện những giá trị ngoại lệ của x mà tại đó chuỗi không hội tụ là đủ hiếm, theo một nghĩa rõ ràng nhưng hơi kỹ thuật một chút. Nếu hàm số là liên tục, chuỗi sẽ hội tụ với mọi x. Ở chỗ có bước nhảy không liên tục, như từ –1 đến 1 ở sóng vuông góc chẳng hạn, chuỗi số hội tụ đều về giá trị trung bình của những giá trị ngay bên cạnh bước nhảy. Nhưng chuỗi số luôn hội tụ về hàm số với giải thích đúng đắn về khái niệm "hội tụ". Nó hội tụ theo nghĩa toàn thể, chứ không phải theo từng điểm một. Phát biểu điều này một cách chặt chẽ phụ thuộc vào việc tìm ra cách đo đúng đắn sự khác nhau giữa hai hàm số. Với tất cả những điều trên được chỉnh sửa đâu vào đó, chuỗi Fourier thực sự sẽ giải được phương trình truyền nhiệt. Nhưng tầm quan trọng thực sự của nó còn rộng lớn hơn rất nhiều, và lợi ích chính nằm ngoài toán học thuần túy không phải là vật lý của sự truyền nhiệt, mà là kỹ thuật. Đặc biệt là kỹ thuật điện tử.

Dưới dạng tổng quát nhất, phương pháp Fourier biểu diễn một tín hiệu, được xác định bởi một hàm f, như là một tổ hợp của các sóng ở mọi tần số khả dĩ. Đó được gọi là ảnh

Fourier của sóng. Nó thay tín hiệu ban đầu bằng phổ của tín hiệu đó: một danh sách các biên độ và tần số cho các thành phần sin và cos, mã hóa cùng một thông tin theo một cách khác – nói theo các kỹ sư thì đây là sự chuyển từ miền thời gian sang miền tần số. Khi dữ liệu được biểu diễn theo các cách khác nhau, thì các thao tác là khó hoặc không thể thực hiện trong một biểu diễn này lại có thể dễ dàng trong biểu diễn khác. Chẳng hạn, bạn có thể bắt đầu với một cuộc nói chuyện điện thoại, lập ảnh Fourier của nó, và loại bỏ đi các phần của tín hiệu mà các thành phần Fourier của nó có tần số quá cao hoặc quá thấp mà tai người không thể nghe được. Điều này giúp chúng ta có thể truyền thêm nhiều cuộc nói chuyện trên cùng các kênh truyền thông, và đó là lý do cước phí điện thoại ngày nay, nói một cách tương đối, là rẻ. Chúng ta không thể làm được như vậy trên tín hiệu gốc chưa được biến đổi, bởi vì nó không có “tần số” như một đặc trưng hiển nhiên. Bạn không biết phải loại bỏ thứ gì.

Một ứng dụng khác của kỹ thuật này đó là thiết kế các cao ốc có khả năng trụ được trước các trận động đất. Ảnh Fourier của dao động do một trận động đất điển hình gây ra đã phát lộ các tần số mà ở đó năng lượng do sự rung lắc của mặt đất truyền cho là lớn nhất. Một tòa nhà cũng có mode dao động tự nhiên riêng của mình, và nó có thể cộng hưởng với động đất, tức là sẽ phản ứng lại mạnh mẽ một cách bất thường. Do vậy bước đi hợp lý đầu tiên trong việc chống động đất cho một tòa nhà là đảm bảo rằng các tần số dao động của tòa nhà khác biệt với tần số của động đất. Mà tần số của động đất thì có thể thu được nhờ quan sát; còn tần số của tòa nhà thì có thể tính toán được từ một mô hình trên máy tính.

Đây chỉ là một trong rất nhiều cách thức ẩn giấu mà phép biến đổi Fourier có ảnh hưởng tới cuộc sống của chúng ta. Những người làm việc ở các tòa nhà cao tầng nằm trong vùng động đất không cần phải biết tính ảnh Fourier như thế nào, nhưng cơ hội sống sót của họ được cải thiện đáng kể nhờ tính toán của những người khác. Phép biến đổi Fourier đã trở thành một công cụ được dùng thường ngày trong khoa học và kỹ thuật, ứng dụng của nó bao gồm việc loại bỏ những ồn nhiễu từ những bản ghi âm cũ kỹ, như tiếng sột soạt gây ra bởi những vết xước trên các đĩa hát, tìm ra cấu trúc của những phân tử hóa sinh lớn, như ADN, nhờ sử dụng phương pháp nhiễu xạ tia X, cải thiện khả năng thu sóng radio, làm rõ các bức ảnh chụp từ trên không, cải thiện hệ thống phát hiện tàu ngầm gắn trong các tàu ngầm, và ngăn chặn các dao động không mong đợi trong ôtô ngay từ khi thiết kế. Ở đây, tôi sẽ chỉ tập trung vào một trong hàng nghìn ứng dụng hằng ngày của phép biến đổi Fourier tuyệt vời, ứng dụng mà hầu hết chúng ta sử dụng nhưng không hay biết trong các kỳ nghỉ: chụp ảnh kỹ thuật số.

Trong một chuyến đi gần đây tới Campuchia, tôi đã dùng máy ảnh kỹ thuật số chụp gần 1400 bức ảnh, tất cả được chứa trong một thẻ nhớ dung lượng 2GB, còn chỗ cho khoảng 400 bức nữa. Tôi không chụp với độ phân giải đặc biệt cao, do vậy mỗi file ảnh có dung lượng khoảng 1,1 MB. Nhưng các bức ảnh vẫn đầy đủ màu sắc, và ảnh không hề bị vỡ trên màn hình máy tính 27 inch, do vậy người ta không hề nhận thấy sự thiếu chất lượng của tấm ảnh. Bằng cách nào đó, máy ảnh của tôi định ghi lên thẻ nhớ 2GB số lượng dữ liệu gấp 10 lần

dung lượng mà nó có thể chứa được, giống như trút một lít sữa vào một cái chén uống trà. Nhưng nó vẫn ghi hết được đấy. Câu hỏi ở đây là: nó đã ghi như thế nào?

Câu trả lời là sự nén dữ liệu. Thông tin xác định bức ảnh được xử lý để giảm thiểu dung lượng của nó. Một số trong quá trình xử lý đó là "không có mất mát", có nghĩa là thông tin thô ban đầu, nếu cần thiết, có thể truy xuất từ phiên bản nén. Việc này hoàn toàn có thể bởi vì hầu hết các bức ảnh thực đều chứa các thông tin dư thừa. Chẳng hạn, các mảng lớn của bầu trời hầu như có cùng mức màu xanh. Thay vì lặp đi lặp lại các thông tin về màu và độ sáng cho một điểm ảnh màu xanh lam, bạn có thể lưu trữ tọa độ hai góc đối nhau của hình chữ nhật và một đoạn mã ngắn với thông tin đi kèm: "màu của cả vùng này là lam". Dĩ nhiên chế độ lưu trữ của máy ảnh không hoàn toàn như vậy, nhưng điều này cho thấy tại sao việc nén dữ liệu "không mất mát" đôi khi vẫn có thể. Khi không làm được như thế, cách nén "có mất mát" cũng thường chấp nhận được. Đôi mắt của chúng ta không quá nhạy đối với một số đặc điểm của ảnh, và những đặc điểm này có thể được ghi lại ở một mức thô hơn mà hầu hết chúng ta không để ý thấy, đặc biệt nếu chúng ta không có bức ảnh nguyên thủy để so sánh. Việc nén thông tin theo cách này cũng như đánh trứng vậy: rất dễ làm theo một chiều, và hoàn thành công việc, nhưng không thể đảo ngược lại quá trình đó. Những thông tin không thiết yếu bị mất, thành ra phải bắt đầu từ những thông tin còn lại, căn cứ vào cách thức hoạt động của mắt người.

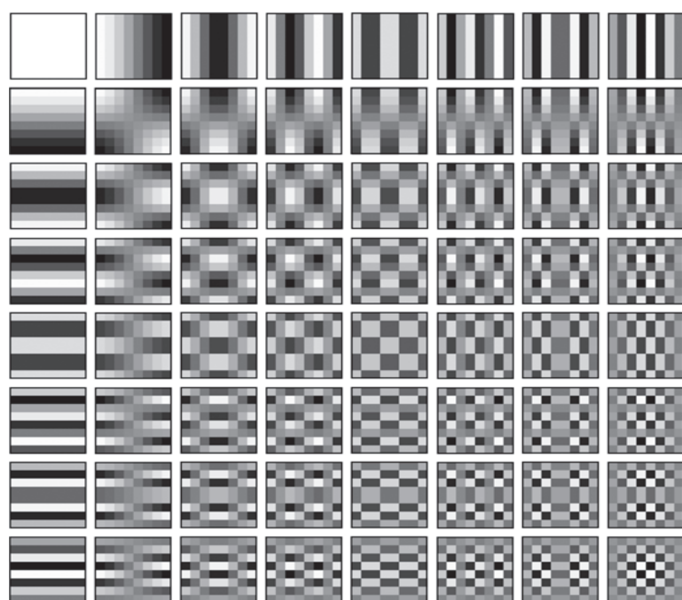
Máy ảnh của tôi, cũng giống như hầu hết các máy ảnh chạm-và-nhấn khác, lưu trữ ảnh thành các file với nhãn có

dạng P1020339.JPG. Đuôi của file có liên quan đến JPEG, viết tắt của *The Joint Photographic Experts Group* (*Cộng đồng các chuyên gia nhiếp ảnh*) và nó chỉ ra một cách nén dữ liệu cụ thể đã được sử dụng. Phần mềm sử dụng cho chỉnh sửa và in ấn ảnh, như là Photoshop hoặc iPhoto, đã được viết sao cho chúng có thể giải mã được định dạng JPEG và chuyển dữ liệu ngược trở lại thành bức ảnh. Hàng triệu người trong số chúng ta thường xuyên sử dụng các file JPEG, nhưng chỉ có ít người biết rằng các file đó đã bị nén, và một ít người hơn nữa vẫn thắc mắc không hiểu chúng bị nén như thế nào. Đây không phải là một lời chỉ trích: bạn có thể sử dụng mà không cần phải biết chúng bị nén như thế nào, mà đấy là vấn đề. Máy ảnh và các phần mềm đã xử lý tất cả thay bạn. Nhưng sẽ có ý nghĩa hơn nếu ta biết sơ qua phần mềm đã làm gì và làm như thế nào, cốt để khám phá xem một số trong đó đã được lập trình khéo léo ra sao. Bạn có thể bỏ qua các chi tiết ở đây nếu bạn muốn: tôi chỉ muốn bạn đánh giá đúng toán học đã để lại dấu ấn *nhiều* như thế nào trong mỗi bức ảnh của bạn trong thẻ nhớ, còn chính xác toán học đã *làm gì* thì không quan trọng bằng.

Định dạng JPEG[2] tổ hợp năm bước nén khác nhau. Bước đầu tiên là biến đổi thông tin về màu sắc và độ sáng, bắt đầu với cường độ của ba màu đỏ, lục và lam, thành ba đại lượng toán học tương đương phù hợp hơn với cách nhận biết ảnh của não người. Một đại lượng (độ chói) biểu thị độ sáng trung bình – cái mà bạn sẽ thấy với phiên bản "đen trắng" của chính bức ảnh đó. Hai đại lượng còn lại (độ màu) là độ sai khác giữa ánh sáng nói trên và các ánh sáng đỏ và lục tương ứng.

Tiếp đó, dữ liệu độ màu được thô hóa: được quy giản về một khoảng giá trị số nhỏ hơn. Chỉ mình bước này thôi đã làm giảm đi một nửa lượng dữ liệu. Nó không gây ra những phương hại có thể cảm nhận được bởi vì hệ thống thị giác của con người kém nhạy hơn rất nhiều đối với những khác biệt về màu sắc so với máy ảnh.

Bước thứ ba sử dụng một biến thể của phép biến đổi Fourier. Nó không làm việc với một tín hiệu thay đổi theo thời gian mà là với một hình mẫu trong không gian hai chiều. Nhưng toán học trong hai trường hợp này thực sự là như nhau. Không gian liên quan là một khối con 8×8 các điểm ảnh (pixel) từ bức ảnh. Để đơn giản, bạn có thể coi nó như thành phần của độ sáng: cùng ý tưởng như thế, bạn cũng có thể áp dụng cho thông tin về màu sắc. Chúng ta bắt đầu với một khối gồm 64 điểm ảnh, và với mỗi một điểm ảnh này, chúng ta cần lưu một con số, đó là độ sáng của điểm ảnh đó. Phép biến đổi cos rời rạc, một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi Fourier, phân tách bức ảnh thành chồng chất của các bức ảnh "kẻ sọc" chuẩn. Một nửa các ảnh đó có các kẻ sọc nằm ngang, và nửa còn lại theo phương thẳng đứng. Chúng được đặt cách nhau với các khoảng khác nhau, giống như các họa ba trong phép biến đổi Fourier thông thường và các giá trị mức đen trắng của chúng là một xấp xỉ tốt của đường cong hình cos. Dưới dạng các tọa độ trên các khối, chúng là một phiên bản rời rạc của $\cos mx \cos ny$ với các số nguyên m, n khác nhau.



Hình 41 64 hình mẫu cơ bản từ đó có thể nhận được một khối 8×8 pixel bất kỳ.

Bước này mở đường cho bước bốn, là một bước khai thác lần thứ hai sự khiếm khuyết của thị giác con người. Chúng ta nhạy với những biến thiên về độ sáng (hoặc màu sắc) trên những vùng lớn hơn là với những biến thiên ở sát nhau. Do vậy các hình mẫu trong bức ảnh có thể được ghi lại thiếu chính xác hơn khi khoảng cách giữa các sọc trở nên gần nhau hơn. Điều này cho phép nén thông tin lại hơn nữa. Bước thứ năm và là bước cuối cùng sử dụng một mã có tên gọi là "mã Huffman" để biểu diễn danh sách các cường độ của 64 hình mẫu cơ bản theo một cách hiệu quả hơn.

Mỗi khi bạn chụp một bức ảnh kỹ thuật số sử dụng JPEG, điện tử học trong máy ảnh của bạn sẽ thực hiện tất cả các bước trên, có lẽ chỉ trừ bước một. (Bây giờ những người chuyên nghiệp chuyển sang các file dạng RAW, định dạng này ghi thông tin thực tế mà không cần nén, cùng với những "metadata" như ngày tháng, thời gian, độ phơi sáng, v.v. Các file ở định dạng này chiếm nhiều dung lượng bộ nhớ hơn,

nhưng các bộ nhớ đang trở nên lớn hơn và rẻ hơn theo từng tháng, và do vậy đó không còn là vấn đề nữa). Một đôi mắt đã được rèn luyện có thể phát hiện ra sự mất mát trong chất lượng ảnh được ghi dưới định dạng JPEG khi lượng thông tin giảm 10% so với bản gốc, và đôi mắt của người bình thường có thể dễ dàng thấy khi kích thước của file giảm xuống còn 2-3%. Do vậy máy ảnh của bạn có thể chứa số lượng ảnh gấp mười lần trên một thẻ nhớ so với số lượng ảnh ghi dưới dạng thô, trước khi ai đó không phải là chuyên gia có thể nhận ra.

Nhờ những ứng dụng như thế mà giải tích Fourier trở thành một "phản xạ" của các kỹ sư và các nhà khoa học, nhưng đối với một số mục đích thì kỹ thuật này lại có một nhược điểm lớn: cứ luẩn quẩn mãi với các hàm sin và cos. Phương pháp của Fourier trở nên có vấn đề khi ta thử dùng nó để biểu diễn một tín hiệu *compact*. Phải cần tới một số lượng khổng lồ các hàm sin và cos mới có thể biểu diễn được một đốm sáng định xứ. Vấn đề không chỉ là biểu diễn cho đúng hình dạng cơ bản của đốm sáng, mà còn phải triệt tiêu tất cả những gì nằm ngoài đốm sáng đó. Bạn phải khử hết cái đuôi ngoằn ngoèo dài vô hạn của tất cả hàm sin và cos đó bằng cách thêm vào các hàm sin và cos có tần số thậm chí còn cao hơn trong một nỗ lực gần như tuyệt vọng nhằm triệt tiêu những thứ thừa thãi không mong muốn. Do đó, phép biến đổi Fourier không áp dụng được cho các tín hiệu dạng đốm sáng: phiên bản được biến đổi tỏ ra còn phức tạp hơn và cần nhiều dữ liệu để mô tả nó hơn cả tín hiệu ban đầu.

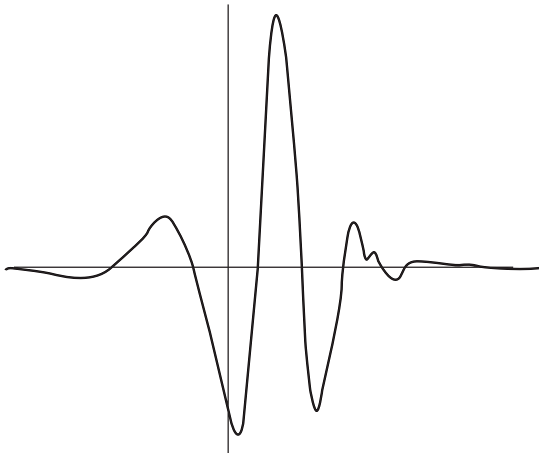
Cái cứu vãn tình hình chính là tính tổng quát của phương pháp Fourier. Các hàm sin và cos đều có thể dùng được, bởi vì chúng thỏa mãn một điều kiện đơn giản: chúng độc lập với

nhau về mặt toán học. Phát biểu một cách hình thức thì điều này có nghĩa là chúng *trực giao* với nhau: theo một nghĩa trừu tượng nhưng có chủ đích thì chúng tạo với nhau một góc vuông. Đây chính là chỗ mà thủ thuật của Euler xuất hiện, và cuối cùng cũng đã được Fourier phát hiện lại. Nhân hai dạng sóng hình sin cơ bản với nhau và lấy tích phân trên một chu kỳ là một cách để đo xem chúng liên quan mật thiết với nhau đến mức nào. Nếu kết quả là một số lớn thì hai sóng này rất giống nhau; còn nếu nó bằng 0 (điều kiện cho tính trực giao), thì hai sóng này là độc lập với nhau. Giải tích Fourier vận hành tốt trong trường hợp này bởi vì các dạng sóng cơ bản của nó trực giao và đầy đủ: chúng là độc lập với nhau và có đủ các dạng sóng như vậy để biểu diễn bất kỳ một tín hiệu nào nếu chúng được chồng chất một cách phù hợp. Thực tế, chúng cung cấp cho ta một hệ tọa độ trong không gian các tín hiệu, giống như ba trục tọa độ của không gian thông thường. Đặc điểm mới chủ yếu ở đây là bây giờ chúng ta có một số *vô hạn* các trục tọa độ: mỗi một dạng sóng cơ bản ứng với một trục. Nhưng điều này không gây nhiều khó khăn về mặt toán học mỗi khi bạn sử dụng nó. Nó chỉ có nghĩa rằng bạn phải làm việc với các chuỗi vô hạn thay vì các tổng hữu hạn, và không phải quá lo lắng khi nào các chuỗi đó hội tụ.

Ngay cả trong không gian hữu hạn chiều, cũng có rất nhiều hệ trục tọa độ khác nhau, chẳng hạn, ta có thể quay các trục đó để chúng chỉ theo các hướng mới. Không có gì phải ngạc nhiên nếu thấy rằng trong một không gian vô hạn chiều của các tín hiệu có nhiều hệ tọa độ thay thế khác một cách ghê gớm với hệ tọa độ Fourier. Một trong những khám phá quan trọng nhất của toàn bộ lĩnh vực này, trong những năm gần đây, là một hệ tọa độ mới, trong đó các dạng sóng cơ bản bị

hạn chế trong một vùng hữu hạn của không gian. Chúng được gọi là các wavelet (sóng nhỏ), và chúng có thể biểu diễn các đốm sáng rất hiệu quả, bởi vì chúng *chính là* các đốm sáng.

Chỉ mới gần đây người ta mới biết rằng giải tích Fourier kiểu cho các đốm sáng là có thể. Ta có thể bắt đầu một cách trực tiếp: chọn một đốm sáng có dạng cụ thể, gọi là wavelet mẹ (hình 42), sau đó tạo ra các wavelet con (rồi wavelet cháu, wavelet chắt...) bằng cách dịch wavelet mẹ sang hai bên vào những vị trí khác nhau, và mở rộng nó hay nén nó lại bằng cách thay đổi kích cỡ. Giống như vậy, các sóng cơ bản dạng sin và cos của Fourier là các *sinelet* mẹ, và các sóng dạng sin và cos với tần số cao hơn là con. Vì chúng tuần hoàn, nên các đường cong này không thể giống với đốm sáng được.



Hình 42 Sóng nhỏ (wavelet) Daubechies.

Các sóng nhỏ được thiết kế để mô tả hiệu quả những dữ liệu tựa đốm sáng. Hơn nữa, bởi vì các wavelet con và cháu chỉ là những phiên bản được định cỡ lại của wavelet mẹ, nên ta có thể tập trung vào các mức cụ thể của chi tiết. Nếu bạn không muốn xem cấu trúc ở thang kích thước nhỏ, bạn có thể lược bỏ tất cả các wavelet chắt khỏi ảnh của wavelet. Để biểu diễn một con báo bằng các wavelet, bạn cần một vài wavelet

lớn để biểu diễn chính xác thân con báo, những wavelet nhỏ hơn cho đôi mắt, mũi, và dĩ nhiên là cả những vết đốm nữa, rồi những wavelet cực nhỏ cho bộ lông của nó. Để nén những thông tin biểu diễn con báo lại, có lẽ bạn sẽ phải quyết định rằng những sợi lông riêng rẽ của con báo là không quan trọng lắm, và bỏ đi các thành phần wavelet cụ thể biểu diễn chúng. Điều đặc biệt là, bức ảnh trông vẫn giống hình một con báo, và nó vẫn có đốm. Nếu bạn thử làm thế với ảnh Fourier của con báo thì danh sách các thành phần sẽ cực lớn, bạn sẽ không biết phải bỏ đi thành phần nào, và kết quả mà bạn thu được có thể sẽ không phải là một con báo nữa.

Nghe ra thì thật tuyệt vời, nhưng wavelet mẹ nên có hình dạng thế nào? Trong một thời gian dài, không ai có thể tìm ra điều đó, thậm chí không thể chỉ ra hình dạng phù hợp có tồn tại hay không. Nhưng vào những năm đầu của thập niên 80, nhà địa vật lý Jean Morlet và nhà vật lý toán Alexander Grossmann tìm ra wavelet mẹ phù hợp đầu tiên. Năm 1985, Yves Meyer tìm thấy một wavelet mẹ tốt hơn, và vào năm 1987, Ingrid Daubechies, một nhà toán học ở phòng thí nghiệm Bell đã làm bùng nổ cả lĩnh vực này. Mặc dù wavelet mẹ trông có vẻ giống với các đốm, chúng vẫn có cái đuôi toán học rất nhỏ lắc lư tới vô hạn. Daubechies đã tìm ra wavelet mẹ không có cái đuôi nào như thế: ở ngoài vài khoảng, wavelet mẹ luôn mang giá trị 0 – tức một đốm đích thực, bị hạn chế hoàn toàn trong một vùng không gian hữu hạn.

Đặc điểm tựa đốm sáng của các wavelet khiến chúng đặc biệt hiệu quả trong nén ảnh. Một trong những ứng dụng thực tiễn đầu tiên ở thang lớn hơn đó là lưu trữ dấu vân tay, và khách

hàng là Cục điều tra liên bang Mỹ, FBI. Cơ sở dữ liệu dấu vân tay của FBI chứa 300 triệu hồ sơ, mỗi hồ sơ bao gồm hai dấu vân tay ngón cái và tám dấu vân tay các ngón còn lại, ban đầu được lưu trữ như dấu lăn trên giấy. Đó không phải cách thức lưu trữ thuận tiện, bởi vậy các hồ sơ đã được hiện đại hóa bằng cách số hóa các bức ảnh và lưu trữ kết quả trên một máy tính. Lợi thế rõ ràng của việc này đó là ta có thể tìm kiếm tự động dấu vân tay phù hợp với những dấu tìm thấy trong một vụ án một cách nhanh chóng.

File trong máy tính tương ứng với mỗi dấu vấn tay dài 10 megabyte: 80 triệu chữ số nhị phân. Do vậy toàn bộ cơ sở lưu trữ chiếm 3000 terabyte bộ nhớ: 24 nghìn triệu triệu chữ số nhị phân. Tình hình còn tồi tệ hơn, số lượng dấu vân tay mới tăng 30.000 mỗi ngày, do vậy đòi hỏi bộ nhớ phải tăng 2,4 nghìn tỉ chữ số nhị phân mỗi ngày. FBI đã có quyết định hợp lý rằng họ cần phải tìm ra một phương pháp nén dữ liệu. JPEG hẳn nhiên không phù hợp vì nhiều lý do, nên vào năm 2002, FBI quyết định phát triển một hệ thống nén mới sử dụng các wavelet, được gọi là phương pháp lượng tử wavelet/scalar (WSQ). WSQ giảm dung lượng dữ liệu xuống còn 5% dung lượng ban đầu, bằng cách lược đi những chi tiết tinh tế trong cả bức ảnh. Đó là những chi tiết không quan yếu đối với cả khả năng của mắt người và máy tính để nhận biết dấu vân tay.

Còn có những ứng dụng khác gần đây của wavelet trong việc tạo hình ảnh trong y tế. Các bệnh viện ngày nay sử dụng một số loại máy scan khác nhau để lắp ghép các tiết diện hai chiều của cơ thể con người, hay các cơ quan quan trọng như não bộ. Các kỹ thuật bao gồm CT (chụp cắt lớp vi tính),

PET (chụp cắt lớp bằng phát xạ positron) và MRI (chụp cộng hưởng từ). Trong kỹ thuật chụp cắt lớp, máy móc sẽ quan sát mật độ mô tổng thể, hay một đại lượng tương tự, theo một hướng xuyên suốt cơ thể con người, giống như những gì bạn nhìn thấy từ một vị trí cố định nếu tất cả các mô trở nên hơi trong suốt. Một bức ảnh hai chiều có thể được dựng lại bằng cách áp dụng toán học một cách thông minh cho toàn bộ chuỗi các "phép chiếu", được thực hiện ở các góc độ khác nhau. Khi chụp CT, mỗi phép chiếu đòi hỏi phơi sáng đối với tia X, do vậy có lý do chính đáng để hạn chế lượng dữ liệu cần thiết. Trong tất cả các phương pháp scan trên, dữ liệu càng nhỏ thì càng tốn ít thời gian thực hiện, do vậy với cùng một số lượng máy móc ta có thể khám cho nhiều bệnh nhân hơn. Nhưng trái lại, những bức ảnh tốt lại cần nhiều dữ liệu sao cho phương pháp phục dựng lại ảnh có hiệu quả hơn. Wavelet cung cấp cho ta một giải pháp thỏa hiệp, trong đó việc giản lược lượng dữ liệu dẫn tới các bức ảnh với chất lượng vẫn chấp nhận được. Bằng cách thực hiện một phép biến đổi wavelet, bỏ đi các thành phần không mong muốn, và "biến đổi ngược" để nhận lại một bức ảnh, ảnh nghèo thông tin này có thể được làm trơn và rõ nét hơn. Wavelet cũng cải thiện các phương pháp mà nhờ nó các máy scan thu được các dữ liệu ngay lần đầu.

Thực tế, các wavelet đã xuất hiện ở hầu khắp các lĩnh vực. Những nhà nghiên cứu trong các lĩnh vực quá xa nhau như địa vật lý và kỹ thuật điện tử đều đã hiểu, nắm bắt, và sử dụng chúng trong lĩnh vực của mình. Ronald Coifman và Victor Wickerhauser đã sử dụng chúng để lược đi các tiếng ồn không mong đợi từ các bản ghi âm: một thắng lợi gần đây

là màn biểu diễn của chính Brahms* khi ông chơi một trong những bản Vũ điệu Hungary của chính mình. Bản gốc được ghi âm trên một khối trụ bằng sáp vào năm 1889, nhưng đã bị chảy và được ghi lại trên một đĩa 78 vòng/phút. Coifman bắt đầu với một bản thu từ đài phát thanh của đĩa đó, nhưng lúc đó thực sự không nghe được âm nhạc giữa những tiếng ồn xung quanh. Sau khi làm sạch bằng wavelet bạn có thể nghe Brahms chơi nhạc – không thật hoàn hảo, nhưng chí ít cũng là nghe được. Đó là bản thu âm rất ấn tượng xuất phát từ một ý tưởng bắt đầu trong vật lý về sự truyền nhiệt 200 năm trước, và đã bị từ chối không cho công bố.

---

* Johannes Brahms (7/5/1833 - 3/4/1897) là nhà soạn nhạc, nghệ sĩ dương cầm và chỉ huy dàn nhạc người Đức - ND.

10 Sự bay lên của nhân loại

Phương trình Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\mathrm{T} + \mathrm{f}$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nó chính là định luật thứ hai về chuyển động của Newton được ngụy trang. Vế trái là gia tốc của một miền nhỏ chất lưu. Vế phải là các lực tác dụng lên miền đó: áp lực, ứng suất, và các nội lực.

Tại sao nó lại quan trọng?

Cung cấp một phương thức thực sự chính xác để tính toán chuyển động của chất lưu. Nó là điểm cốt yếu trong vô vàn các bài toán khoa học và kỹ thuật.

Nó đã dẫn tới những gì?

Máy bay phản lực dân dụng hiện đại, tàu ngầm chuyển động nhanh và êm, xe đua Công thức 1 với khả năng bám đường đua ở vận tốc cao, và các kỹ thuật tiên tiến trong y học về chuyển động của máu trong các ven và động mạch. Các phương pháp dùng máy tính để các giải phương trình, được biết đến dưới cái tên Động lực học chất lưu điện toán (CFD), được các kỹ sư sử dụng rộng rãi để hoàn thiện công nghệ trong nhiều lĩnh vực.

Nhìn từ không gian, Trái Đất là một quả cầu trắng-xanh sặc sỡ với các mảng xanh lục và nâu, hoàn toàn không giống bất cứ hành tinh nào trong Hệ Mặt Trời – hay bất kỳ hành tinh nào khác trong số 500 hành tinh đang quay xung quanh các ngôi sao khác mà hiện nay chúng ta đã biết. Chính từ "Trái Đất" ngay lập tức mang lại hình ảnh như thế trong trí óc chúng ta. Nhưng hơn 50 năm trước, hình ảnh phổ biến cho cùng từ đó có lẽ là một nắm đất, theo nghĩa đất làm vườn. Trước thế kỷ 20, con người đã nhìn lên bầu trời và băn khoăn tự hỏi về những vì sao và các hành tinh, nhưng vị trí quan sát vẫn là từ mặt đất. Sự bay lượn của con người chỉ có trong những giấc mơ, nó là đối tượng của các truyện thần thoại và cổ tích. Hiếm ai nghĩ tới chuyện du hành đến những thế giới khác.

Một vài người tiên phong dũng cảm đã bắt đầu chậm chạp tiến vào bầu trời. Đầu tiên là những người Trung Hoa. Vào khoảng năm 500 TCN, Lỗ Ban (Lu Ban) đã sáng chế ra một con chim bằng gỗ, có thể được xem là chiếc tàu lượn nguyên thủy. Năm 559 SCN, Cao Dương (Gao Yang) mới lên ngôi đã cưỡng ép, buộc Nguyên Hoàng Đầu (Yuan Huangtou), hoàng tử gần cuối triều Bắc Ngụy, vào một cái diều để do thám quân địch từ trên cao. Nguyên đã sống sót sau thử nghiệm đó, nhưng sau đấy vẫn bị hành quyết. Với việc phát hiện ra khí hydro ở thế kỷ 17, mong ước được bay lượn đã lan rộng tới châu Âu, truyền cảm hứng cho một số cá nhân dũng cảm

bay lên những tầng thấp của bầu khí quyển Trái Đất bằng khí cầu. Nhưng khí hydro rất dễ nổ, nên vào năm 1783, hai anh em người Pháp là Joseph-Michel và Jacques-Étienne Montgolfier đã chứng minh ý tưởng mới và an toàn hơn rất nhiều của họ trước công chúng, đó là khí cầu dùng khí nóng – đầu tiên là với một chuyến bay thử nghiệm không người lái, và sau đó chính Étienne làm người lái.

Tốc độ tiến triển và độ cao mà con người có thể đạt tới bắt đầu tăng nhanh chóng. Năm 1903, Orville và Wilbur Wright thực hiện chuyến bay thực sự đầu tiên bằng máy bay. Hãng hàng không đầu tiên, DELAG (*Deutsche Luftschiffahrts-Aktiengesellschaft*) bắt đầu hoạt động vào năm 1910, hành khách bay từ Frankfurt tới Baden-Baden và Düsseldorf bằng khí cầu do tập đoàn Zeppelin chế tạo. Năm 1914, hãng hàng không St Peterburg-Tampa đã có chuyến bay thương mại chở hàng giữa hai thành phố của bang Florida, một hành trình dài 23 phút với chiếc thủy phi cơ của Tony Jannus. Du lịch bằng máy bay thương mại nhanh chóng trở thành chuyện bình thường, và rồi máy bay phản lực xuất hiện: chiếc De Havilland Comet bắt đầu các chuyến bay đều đặn vào năm 1952, nhưng tính kém bền vững của vật liệu kim loại đã gây ra một số vụ tai nạn, và Boeing 707 trở thành kẻ thống trị thị trường kể từ chuyến bay đầu tiên vào năm 1958.

Những máy bay cá nhân thông thường có thể thấy ở độ cao 8km, đó là giới hạn bay vào thời gian đó của chúng, chí ít là cho đến khi Virgin Galactic bắt đầu các chuyến bay trên quỹ đạo thấp. Máy bay quân sự và máy bay thử nghiệm được bay cao hơn. Rồi các chuyến bay vào không gian, cho đến lúc đó vẫn là giấc mơ của một số người mơ mộng, bắt đầu trở thành một đề xuất khả thi. Năm 1961, nhà du hành vũ trụ Xô Viết

Yuri Gagarin đã thực hiện chuyến bay vòng quanh Trái Đất đầu tiên trên con tàu vũ trụ *Vostok 1*. Năm 1969, phi thuyền *Apollo 11* của NASA đã đưa thành công hai nhà du hành Neil Amstrong và Buzz Aldrin lên Mặt Trăng. Các tàu con thoi bắt đầu các chuyến bay từ năm 1982, và trong khi những hạn chế về ngân sách cản trở nó đạt được mục đích ban đầu của mình – một phương tiện có thể tái sử dụng với khả năng quay vòng nhanh – nó đã trở thành một trong những phương tiện để thực hiện các chuyến bay vào không gian theo các quỹ đạo thấp, bên cạnh tàu không gian *Soyuz* của Nga. Mới đây *Atlantis* đã thực hiện chuyến bay cuối cùng của chương trình tàu con thoi không gian, nhưng các phương tiện mới cũng đã được lên kế hoạch, hầu hết là bởi các công ty tư nhân. Châu Âu, Ấn Độ, Trung Quốc, và Nhật Bản cũng đều đã có các chương trình và cơ quan không gian của riêng họ.

Việc nhân loại thực sự bay lên cao đã làm thay đổi quan điểm của chúng ta về vấn đề chúng ta là ai và chúng ta đang sống ở đâu – nguyên nhân chủ yếu trả lời cho câu hỏi tại sao "Trái Đất" lại có nghĩa là một quả địa cầu xanh-trắng. Những màu sắc ấy nắm giữ "manh mối" về khả năng bay mới được tìm thấy của chúng ta. Màu xanh là màu của nước, và màu trắng là hơi nước dưới dạng các đám mây. Trái Đất là thế giới của nước, với các đại dương, biển cả, sông, hồ. Việc tốt nhất mà nước có thể làm đó là *chảy*, thường là rời khỏi những chỗ mà nó không muốn. Dòng chảy có thể là mưa chảy xuống từ mái nhà hay nước đổ xuống từ một ngọn thác. Nó có thể mềm mại và trơn tru, hay dữ dội và cuộn xoáy – như dòng chảy êm đềm của sông Nile vắt qua sa mạc hoặc dòng nước sủi bọt trắng xóa đổ xuống từ sáu thác nước lớn của nó.

Đó là những hình mẫu do nước tạo nên, hay nói một cách tổng quát hơn, là do một chất lưu nào đó chuyển động gây nên. Những mô thức này đã thu hút sự chú ý của các nhà toán học ở thế kỷ 19 khi họ đưa ra phương trình đầu tiên cho chuyển động của chất lưu. Chất lưu quan trọng đối với sự bay lượn và không dễ thấy như nước, nhưng có mặt hầu như ở khắp nơi: đó chính là không khí. Dòng chảy của không khí phức tạp hơn về mặt toán học, bởi vì không khí có thể nén được. Bằng cách sửa đổi các phương trình để có thể áp dụng chúng cho các chất lưu nén được, các nhà toán học đã khởi đầu một ngành khoa học mà cuối cùng đã mở ra Kỷ nguyên của ngành hàng không: khí động lực học. Những người tiên phong trong lĩnh vực này có thể bay lượn được là dựa vào kinh nghiệm, nhưng các hãng hàng không thương mại và các tàu con thoi không gian có thể bay được là nhờ các kỹ sư đã thực hiện những tính toán làm cho các chuyến bay trở nên an toàn và đáng tin cậy hơn (trừ một số ít tai nạn). Thiết kế máy bay đòi hỏi phải có một hiểu biết sâu sắc về toán học của dòng chất lưu. Và người đi tiên phong trong lĩnh vực động lực học chất lưu chính là nhà toán học nổi tiếng Leonhard Euler, người đã mất vào đúng năm mà anh em nhà Montgolfier thực hiện chuyến bay đầu tiên bằng khí cầu của họ.

Ít có lĩnh vực nào của toán học mà nhà toán học đa năng Euler không chú ý đến. Người ta cho rằng một nguyên nhân khiến Euler có một sự nghiệp khoa học đồ sộ và đa diện chính là chính trị, hay chính xác hơn, là do ông không hề quan tâm tới chính trị. Ông làm việc ở Nga nhiều năm, trong triều đình của Nữ hoàng Catherine, và một trong những cách hiệu quả nhất để tránh bị bắt bớ do dính líu đến chính trị

cùng với những hậu quả thảm khốc tiềm tàng của nó là cần mẫn nghiên cứu để không một ai tin rằng ông còn thời gian dành cho chính trị nữa. Nếu đó là nguyên nhân thực sự thì chúng ta cần cảm ơn triều đình ấy vì đã tạo điều kiện để có những khám phá tuyệt diệu của Euler. Nhưng tôi nghiêng về hướng suy nghĩ rằng Euler có nhiều công trình như thế là nhờ vào trí tuệ tuyệt vời của ông. Ông đã công bố một số lượng khổng lồ các kết quả toán học là vì ông không thể làm gì khác hơn ngoài nghiên cứu.

Nhưng Euler không phải người đầu tiên quan tâm đến vấn đề này. Archimedes cũng đã nghiên cứu sự ổn định của các vật thể nổi gần 2200 năm trước. Năm 1738, nhà toán học người Thụy Sỹ, Daniel Bernoulli công bố cuốn *Thủy động lực học* (*Hydrodynamica*) trong đó có phát biểu nguyên lý rằng: chất lưu chuyển động nhanh hơn ở vùng có áp suất thấp hơn. Ngày nay nguyên lý Bernoulli vẫn thường được viện dẫn để giải thích tại sao máy bay lại bay được: cánh máy bay được tạo hình sao cho ở mặt trên của cánh không khí chảy nhanh hơn, giảm áp lực cho cánh và tạo lực nâng, nâng máy bay lên. Giải thích như vậy thì quá đơn giản, vì còn nhiều nhân tố khác có liên quan đến sự bay, nhưng nó đã minh họa được mối liên hệ gần gũi giữa những nguyên lý toán học cơ bản và thiết kế máy bay trong thực tiễn. Bernoulli thể hiện nguyên lý của mình dưới dạng một phương trình đại số liên hệ vận tốc và áp suất trong một chất lưu không nén được.

Năm 1757, Euler đã chuyển hướng trí tuệ đa dạng của mình sang dòng chảy của chất lưu, và ông công bố bài báo *Những nguyên lý tổng quát của chuyển động chất lưu* (*Principes généraux du mouvement des fluids*) trong *Kỷ yếu*

của Viện Hàn lâm Khoa học Berlin. Đó là cố gắng nghiêm túc đầu tiên nhằm mô hình hóa dòng chảy của chất lưu bằng cách sử dụng một phương trình đạo hàm riêng. Để giữ bài toán trong các giới hạn hợp lý, Euler đã đưa ra một số giả thiết đơn giản hóa: đặc biệt, ông đã giả sử rằng chất lưu là không nén được, tức là nó giống với nước hơn là không khí, và có độ nhớt bằng 0 – tức là không dính. Những giả thiết này đã cho phép ông tìm được một số nghiệm, nhưng lại cũng khiến cho phương trình của ông mất đi tính thực tế. Phương trình của Euler ngày nay vẫn còn được sử dụng cho một số loại bài toán, nhưng xét toàn diện thì nó quá đơn giản đối với nhiều mục đích thực tế.

Hai nhà khoa học khác đã đưa ra một phương trình thực tế hơn, đó là Claude-Louis Navier, một kỹ sư và nhà vật lý người Pháp, và Goerge Gabriel Stokes, một nhà vật lý và toán học người Ailen. Navier đã đưa ra một hệ phương trình đạo hàm riêng cho dòng chảy của chất lưu nhớt vào năm 1822; còn Stokes bắt đầu công bố các kết quả về đề tài này 20 năm sau đó. Mô hình dòng chảy của chất lưu nhận được ngày nay được gọi là phương trình Navier-Stokes (thường được dùng ở dạng số nhiều vì phương trình này được phát biểu dưới dạng vectơ, do vậy nó có nhiều thành phần). Phương trình này chính xác đến mức ngày nay các kỹ sư thường sử dụng nghiệm thu được từ máy tính thay vì thực hiện các thử nghiệm vật lý trong các hầm gió. Hiện nay, kỹ thuật này, được biết đến dưới tên gọi động lực học chất lưu điện toán (*computational fluid dynamics* - CFD), đã trở thành chuẩn cho tất cả các bài toán có liên quan đến động lực học chất lưu: khí động lực học của tàu vũ trụ, thiết kế xe đua Công thức

1 và các ôtô thông thường, và chuyển động tuần hoàn của máu trong cơ thể người hay một trái tim nhân tạo.

Có hai cách để nhìn nhận hình học của một chất lưu. Cách thứ nhất, đó là theo dõi chuyển động của các hạt chất lưu nhỏ bé một cách riêng rẽ và xem nó chuyển động thế nào. Cách thứ hai, đó là tập trung vào vận tốc của các hạt đó: nó chuyển động nhanh thế nào và có hướng ra sao ở mọi thời điểm. Hai cách này có liên quan mật thiết với nhau, nhưng mối quan hệ này rất rối rắm và khó tháo gỡ, ngoại trừ khi tính toán gần đúng bằng số. Một trong những việc thể hiện tầm nhìn sâu sắc của Euler, Navier và Stokes đó là nhận thức được rằng mọi thứ sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều dưới ngôn ngữ của vận tốc. Dòng chảy của một chất lưu được hiểu rõ nhất thông qua trường vận tốc: tức là một mô tả toán học cho biết vận tốc thay đổi thế nào từ điểm này sang điểm khác trong không gian và từ thời điểm này sang thời điểm khác trong thời gian. Và Euler, Navier và Stokes đã viết ra các phương trình mô tả trường vận tốc đó. Từ đó có thể tính được mô thức thực sự của dòng chảy chất lưu, hoặc chí ít cũng đạt tới một sự gần đúng tốt.

Phương trình Navier-Stokes có dạng:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla.\mathbf{T} + \mathbf{f}$$

với ρ là mật độ của chất lưu, **v** là trường vận tốc của nó, p là áp suất, **T** xác định các ứng suất, **f** biểu diễn các lực khối, tức các lực tác dụng xuyên qua toàn bộ vật*, chứ không phải chỉ trên bề mặt của nó. Dấu chấm là một phép toán với vectơ, và ∇ là một ký hiệu của phép toán lấy đạo hàm riêng, cụ thể là:

* Như lực hấp dẫn và lực điện từ - ND

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Phương trình này được suy ra từ vật lý cơ bản. Cũng giống như với phương trình sóng, bước quan trọng đầu tiên là áp dụng định luật hai Newton nhằm liên kết chuyển động của một hạt chất lưu với các lực tác dụng lên nó. Lực tác dụng chính ở đây là ứng suất đàn hồi, và nó gồm hai thành phần chính: lực ma sát gây ra bởi độ nhớt của chất lưu và ảnh hưởng của áp suất, hoặc dương (nén) hoặc âm (làm loãng). Cũng có những lực khối phát sinh từ gia tốc của chính hạt chất lưu. Tổng hợp tất cả các thông tin này sẽ dẫn tới phương trình Navier-Stokes, mà trong bối cảnh cụ thể này ta có thể coi nó là một phát biểu của định luật bảo toàn động lượng. Cơ sở vật lý ở đây đủ chắc chắn và mô hình đủ thực tế để bao hàm hầu hết các nhân tố quan trọng; đó là lý do tại sao phương trình này lại phù hợp với thực tiễn đến thế. Giống như hầu hết các phương trình truyền thống của vật lý toán cổ điển, đây là một mô hình *continuum*: nó giả thiết rằng chất lưu có thể chia nhỏ vô hạn định.

Đây có lẽ là điểm mấu chốt khiến phương trình Navier-Stokes tiềm tàng mất đi sự gắn kết với thực tế, nhưng sự khác biệt chỉ xuất hiện khi chuyển động của chất lưu có liên quan với những thay đổi nhanh ở thang từng phân tử riêng rẽ. Những chuyển động ở thang nhỏ ấy là thiết yếu trong một bối cảnh quan trọng: dòng chảy rối. Nếu bạn bật một vòi nước và để nước chảy chậm xuống, nó sẽ rơi xuống theo một dòng trơn nhỏ. Tuy nhiên, nếu bạn vặn vòi hết cỡ thì bạn sẽ nhận được một dòng nước vọt ra, sủi bọt. Tương tự như vậy, dòng chảy nhanh sủi bọt cũng xuất hiện trên sông, suối. Hiệu ứng này được gọi là chảy rối, và trong số chúng ta, những ai được bay

thường xuyên sẽ ý thức rõ ràng ảnh hưởng của hiệu ứng này khi nó xuất hiện trong không khí. Nó mang lại cảm giác giống như máy bay đang đi dọc theo một con đường rất xóc vậy.

Phương trình Navier-Stokes rất khó giải. Thực tế cho đến trước khi các máy vi tính mạnh được phát minh, nó quá khó đến nỗi các nhà toán học đã phải quy giản nó về những đoạn nhỏ và thực hiện các phép tính gần đúng. Nhưng khi bạn nghĩ về chất lưu thật, thì nó *thực sự* rất khó để giải. Bạn chỉ cần nhìn nước chảy thành dòng, hay sóng vỗ vào bãi biển, là đủ thấy rằng chất lưu có thể chảy theo những cách cực kỳ phức tạp. Có những gợn sóng và các xoáy, hay các cấu trúc quyến rũ như dòng triều mạnh Severn, một bức tường nước ập tới cửa sông Severn ở vùng tây nam nước Anh khi thủy triều lên. Các hình mẫu về dòng chảy của chất lưu là nguồn gốc của vô số các nghiên cứu toán học, nhưng một trong những câu hỏi khó nhất đồng thời cũng là cơ bản nhất trong toán học thì vẫn chưa có lời giải đáp: liệu có một sự đảm bảo nào về mặt toán học rằng các nghiệm của phương trình Navier-Stokes thực sự *tồn tại* và luôn đúng tại mọi thời điểm trong tương lai? Giải thưởng một triệu đôla sẽ được trao cho bất kỳ ai giải được bài toán này, đây là một trong bảy bài toán thiên niên kỷ của Viện Clay, được chọn để đại diện cho các bài toán quan trọng nhất chưa giải quyết được trong thời đại của chúng ta. Câu trả lời là "có" đối với trường hợp hai chiều, nhưng không ai biết chuyện gì sẽ xảy ra cho dòng chảy trong không gian ba chiều.

Mặc dù vậy, phương trình Navier-Stokes vẫn cung cấp một mô hình hữu ích cho dòng chảy rối bởi vì các phân tử vô cùng nhỏ bé. Do các xoáy nước rối với đường kính vài milimet đã

thâu tóm được nhiều đặc điểm chính của dòng chảy rối, trong khi một phân tử thì nhỏ hơn rất nhiều, nên mô hình *continumm* vẫn còn phù hợp. Vấn đề chính mà dòng chảy rối gây ra là một vấn đề mang tính thực hành: nó khiến ta thực sự không thể giải được bằng số phương trình Navier-Stokes, vì các máy tính không thể xử lý được các tính toán quá ư phức tạp. Các phương pháp giải bằng số các phương trình đạo hàm riêng sử dụng một lưới tính toán bằng cách chia không gian thành các vùng riêng biệt và thời gian thành các khoảng nhỏ rời rạc. Để bao quát một phạm vi rộng lớn của các thang mà các dòng chảy rối hoạt động – từ các vòng xoáy lớn hay trung bình, giảm thẳng xuống đến thang cỡ milimet – bạn cần xây dựng một lưới tính toán tinh vi đến mức không thể tồn tại. Vì lý do đó, các kỹ sư thường sử dụng các mô hình thống kê cho các dòng chảy rối.

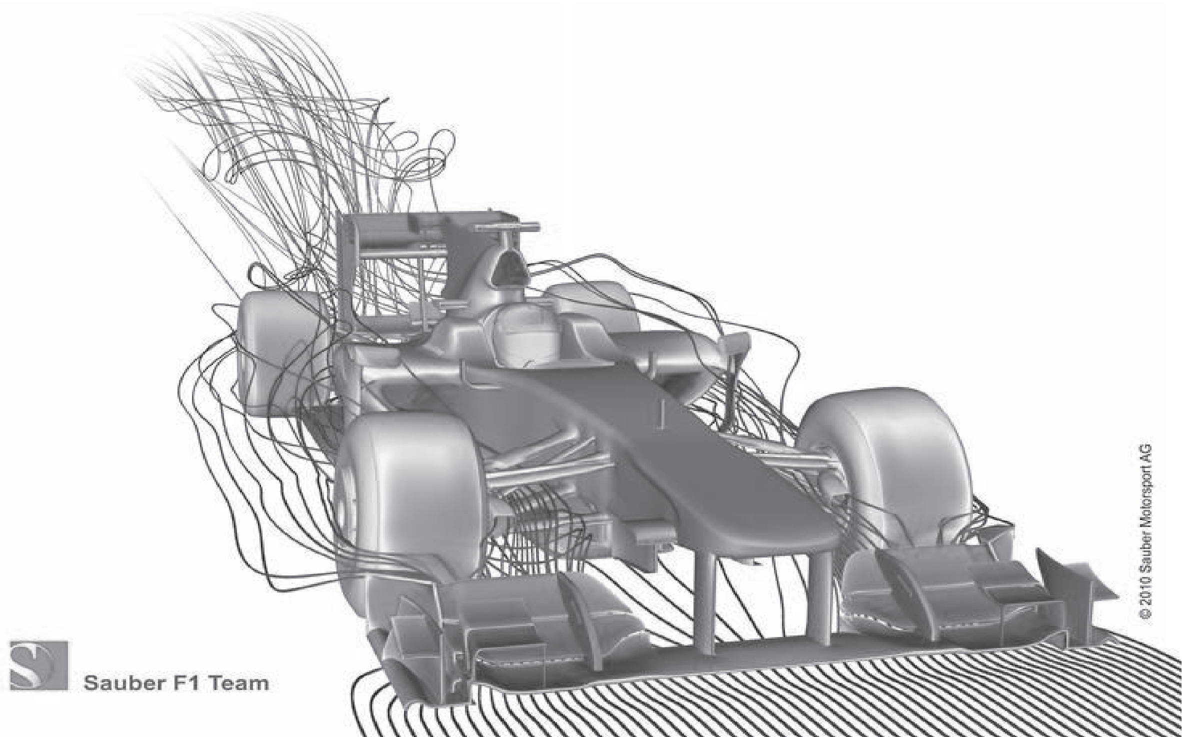
Phương trình Navier-Stokes đã tạo nên một cuộc cách mạng đối với giao thông hiện đại. Có lẽ ảnh hưởng lớn nhất của nó là trong thiết kế máy bay chở khách, không chỉ bởi vì nó phải bay một cách hiệu quả, mà còn là vì nó *phải bay*, một cách ổn định và tin cậy. Ngành thiết kế tàu biển cũng được hưởng lợi từ phương trình này, bởi vì nước cũng là một chất lưu. Nhưng ngay cả những chiếc ôtô của những người nội trợ bình thường cũng được thiết kế dựa trên các nguyên lý của khí động lực học, không chỉ bởi vì như thế trông chúng sẽ thon đẹp và phong cách hơn, mà còn bởi vì việc tiêu thụ nhiên liệu một cách hiệu quả lại dựa trên sự tối thiểu hóa lực cản do dòng không khí chảy qua chiếc xe gây ra. Một cách để làm giảm thiểu lượng carbon thải ra là lái những chiếc xe hiệu quả về mặt khí động lực học. Dĩ nhiên, còn có nhiều

cách khác nữa, bắt đầu từ những chiếc xe hơi nhỏ hơn, chậm hơn rồi tới các xe điện, hay đơn giản là ít lái xe đi. Một số cải tiến lớn để tiết kiệm nhiên liệu, một mặt tới từ những cải tiến về công nghệ chế tạo động cơ, mặt khác tới từ việc áp dụng khí động lực học hiệu quả hơn.

Trong những ngày đầu tiên của ngành thiết kế máy bay, những người tiên phong đã lắp ráp máy bay của họ theo những tính toán thiếu chặt chẽ, dựa nhiều vào trực giác vật lý kết hợp với các phép thử-sai. Khi mà mục tiêu của bạn chỉ là bay xa hơn 100m và cao không quá 3m, thì như thế cũng đủ lắm rồi. Lần đầu tiên khi chiếc *Wright Flyer* I cất cánh, thay vì tròng trành và đâm xuống đất sau vài ba giây, nó đã đi được cỡ 37m với vận tốc dưới 11km/h. Orville, người phi công trong chuyến bay ấy, đã điều khiển để giữ máy bay ở trên không trong khoảng thời gian đáng kinh ngạc là 12s (vào thời gian đó). Nhưng kích thước của máy bay chở khách đã tăng nhanh chóng vì các lý do kinh tế: bạn càng chở được nhiều khách trong một chuyến bay, thì lợi nhuận mà bạn thu được càng cao. Không lâu sau, việc thiết kế máy bay đã phải dựa trên một phương pháp hợp lý và đáng tin cậy hơn. Ngành khí động lực học đã ra đời và công cụ toán học làm nền tảng cho nó chính là các phương trình chuyển động của chất lưu. Vì không khí vừa nhớt vừa nén được, nên phương trình Navier-Stokes, hay một vài dạng đơn giản hóa của nó mà vẫn còn làm cho bài toán đã cho có ý nghĩa, đóng vai trò trung tâm khi lý thuyết còn vận hành được.

Tuy nhiên, giải các phương trình này mà không có sự trợ giúp của các máy tính hiện đại là điều thực sự không thể. Do vậy, các kỹ sư đã nhờ đến một máy tính tương tự: đó là đặt các

mô hình máy bay vào một hầm gió. Sử dụng một vài tính chất chung của các phương trình để tìm ra các biến sẽ thay đổi như thế nào khi thang của mô hình thay đổi. Phương pháp này cung cấp cho ta các thông tin cơ bản một cách nhanh chóng và có thể tin cậy được. Hầu hết các đội xe đua Công thức 1 ngày nay đều sử dụng các hầm gió để thử nghiệm thiết kế của họ và đánh giá các cải tiến tiềm năng, nhưng các máy tính ngày nay quá mạnh nên hầu như họ đã chuyển sang dùng CFD. Chẳng hạn, hình 43 cho thấy một tính toán CFD của các dòng không khí chảy qua một chiếc BMW Sauber.



Hình 43 Dòng không khí chảy qua một chiếc xe đua Công thức 1 được tính bằng CFD.

Các hầm gió không hề tiện lợi một chút nào: rất tốn kém để xây dựng và vận hành, đã thế lại còn cần nhiều mô hình ở các thang khác nhau để thử nghiệm. Có lẽ khó khăn lớn nhất là thực hiện các phép đo đạc chính xác dòng không khí mà không làm ảnh hưởng đến nó. Chẳng hạn nếu bạn đặt một

dụng cụ đo trong hầm gió để đo áp suất không khí, thì chính bản thân dụng cụ ấy cũng làm nhiễu động dòng không khí. Vì vậy, có lẽ ưu thế lớn nhất về mặt thực hành của CFD là bạn có thể tính toán các thông tin của dòng không khí mà không làm ảnh hưởng đến nó. Tất cả những gì bạn muốn đo đều luôn sẵn sàng. Hơn nữa, bạn có thể thay đổi thiết kế của xe hay một bộ phận, ngay trong phần mềm, mà điều này thì nhanh hơn và rẻ hơn nhiều so với việc chế tạo nhiều mẫu xe khác nhau. Dẫu thế nào thì các quá trình sản xuất hiện đại, ở giai đoạn thiết kế, đều thường xuyên sử dụng các mô hình máy tính.

Máy bay siêu thanh, tức là máy bay bay nhanh hơn âm thanh, đặc biệt khó nghiên cứu khi sử dụng các mô hình trong hầm gió bởi vì tốc độ gió quá lớn. Ở tốc độ như thế, không khí không thể chảy qua máy bay nhanh như máy bay tự vượt lên trong không khí, và điều này gây ra các sóng xung kích – những gián đoạn đột ngột của áp suất không khí, khiến dưới mặt đất nghe như có tiếng nổ vậy. Vấn đề này là một trong những lý do tại sao chiếc máy bay Concorde do Pháp và Anh hợp tác sản xuất (máy bay siêu thanh thương mại duy nhất được sử dụng) đã có những thành công rất hạn chế: nó không được bay với tốc độ siêu thanh ngoại trừ khi vượt đại dương. CFD được sử dụng rộng rãi để dự đoán dòng không khí chảy qua một máy bay siêu thanh.

Trên hành tinh của chúng ta có khoảng 600 triệu chiếc xe ôtô và hàng chục ngàn chiếc máy bay dân sự, do vậy mặc dù những ứng dụng của CFD nghe có vẻ như thuộc về công nghệ cao, chúng lại rất quan trọng trong đời sống hằng ngày của chúng ta. Những ứng dụng khác của CFD có chiều kích nhân văn hơn. Chẳng hạn, nó được sử dụng rộng rãi trong

các nghiên cứu y học để tìm hiểu sự lưu thông của máu trong cơ thể người. Những trục trặc trong hoạt động của tim là nguyên nhân hàng đầu gây tử vong tại các nước phát triển, và nguyên nhân có thể là do vấn đề của chính quả tim hoặc do tắc nghẽn động mạch, làm máu ngừng lưu thông và đóng cục lại. Toán học mô tả sự lưu thông máu trong cơ thể người đặc biệt khó giải quyết bằng giải tích, bởi vì các thành động mạch thì đàn hồi và có thể co dãn. Tính toán chuyển động của một chất lưu trong ống có thành cứng đã đủ khó rồi, nhưng nếu ống lại có thể thay đổi hình dạng tùy theo áp lực nữa thì lại càng khó hơn, vì bây giờ miền tính toán không còn bất biến theo thời gian nữa. Mặt khác, hình dạng của miền tính toán có ảnh hưởng đến hình mẫu dòng chảy của chất lưu, đồng thời hình mẫu của chất lưu cũng ảnh hưởng trở lại lên miền ấy. Toán học chỉ với bút và giấy thật sự không đủ để xử lý loại vòng hồi tiếp này.

CFD là công cụ lý tưởng cho vấn đề như vậy, vì các máy tính có thể thực hiện hàng tỉ phép tính mỗi giây. Các phương trình cần phải được sửa đổi để bao hàm cả những hiệu ứng của thành mạch đàn hồi, nhưng đây hầu như chỉ là vấn đề áp dụng các nguyên lý lấy từ lý thuyết đàn hồi, một phân ngành đã được phát triển khá hoàn chỉnh của cơ học cổ điển *continuum*. Chẳng hạn, một tính toán CFD của sự lưu thông máu qua động mạch chủ, động mạch chính đi vào tim, đã được thực hiện ở Trường Đại học Bách khoa Liên bang ở Lausanne, Thụy Sĩ. Kết quả thu được đã cung cấp những thông tin giúp các bác sĩ hiểu rõ hơn các vấn đề về tim mạch.

Chúng cũng giúp các kỹ sư phát triển các dụng cụ y tế tiên tiến, như ống *stent* – ống nhỏ làm bằng lưới kim loại giúp

giữ cho động mạch chủ mở. Suncica Canic đã sử dụng CFD và các mô hình có tính đàn hồi để thiết kế các *stent* tốt hơn, ông đã rút ra một định lý toán học khuyến cáo nên loại bỏ thiết kế cũ và gợi ý những thiết kế khác tốt hơn. Các mô hình loại này đã trở nên chính xác tới mức các Cơ quan quản lý thuốc và thực phẩm của Mỹ đang xem xét việc yêu cầu các nhóm thiết kế *stent* phải lập các mô hình toán học trước khi thực hiện những thử nghiệm lâm sàng. Các nhà toán học và các bác sĩ đang kết hợp cùng nhau để sử dụng phương trình Navier-Stokes nhằm có được những dự đoán tốt hơn, những phương pháp điều trị tốt hơn cho nguyên nhân chính của vấn đề tim mạch.

Một ứng dụng khác có liên quan là phẫu thuật tim tạo nhánh rẽ, trong đó một tĩnh mạch được lấy ra từ đâu đó trong cơ thể và cấy vào động mạch vành. Dạng hình học của phép cấy này có ảnh hưởng lớn đến sự lưu thông máu. Điều này, đến lượt mình, lại ảnh hưởng đến sự vón cục của máu, sự vón cục sẽ dễ có khả năng xảy ra hơn nếu như dòng chảy của máu có các xoáy, bởi khi đó máu có thể bị bẫy vào một xoáy và không còn lưu thông một cách bình thường nữa. Do vậy, ở đây chúng ta thấy một mối liên kết trực tiếp giữa dạng hình học của dòng chảy và những vấn đề tiềm tàng trong y tế.

Phương trình Navier-Stokes còn có một ứng dụng khác nữa, đó là ứng dụng trong lĩnh vực biến đổi khí hậu, hay còn được biết đến như là sự nóng lên toàn cầu. Khí hậu và thời tiết có liên quan với nhau, nhưng không phải là một. Thời tiết là cái xảy ra ở một nơi nhất định, tại một thời điểm nhất định. Trời có thể mưa ở London, có tuyết ở New York, hay nắng như đổ lửa ở Sahara. Thời tiết không thể dự báo được, và có những

nguyên nhân toán học xác đáng cho chuyện đó: xem Chương 16 về hỗn độn. Tuy nhiên, hầu như những thứ không dự đoán được đều liên quan tới những thay đổi ở thang nhỏ, cả về không gian lẫn thời gian: những chi tiết chính xác. Nếu phóng viên thời tiết trên TV dự báo rằng chiều mai thị trấn của bạn sẽ có mưa và điều đó xảy ra sáu tiếng đồng hồ sau thời điểm dự báo và ở cách xa thị trấn của bạn 20km, thì anh ta sẽ nghĩ rằng anh ta đã làm tốt công việc của mình, còn bạn thì rõ ràng chẳng mảy may có ấn tượng gì. Trong khi đó, khí hậu lại là các mảnh thời tiết trong thời gian dài "dệt" lại với nhau – lượng mưa và nhiệt độ sẽ như thế nào khi lấy trung bình trong một thời gian dài, có lẽ là vài thập kỷ. Bởi vì khí hậu đã trung bình hóa những sai khác đó nên một điều nghịch lý là nó lại dễ dự báo hơn. Các khó khăn vẫn đang trong quá trình xem xét, và rất nhiều tài liệu khoa học nghiên cứu về những nguồn gốc khả dĩ của sai số và cố gắng cải thiện các mô hình.

Sự biến đổi khí hậu là một vấn đề rất rắc rối về mặt chính trị, mặc dù đã có sự đồng thuận mạnh mẽ về mặt khoa học rằng chính những hoạt động của con người trong thế kỷ trước đã làm tăng nhiệt độ trung bình của Trái Đất. Mức tăng hằng ngày rất nhỏ, khoảng 0,75^{o}C trong suốt thế kỷ 20, nhưng khí hậu rất nhạy với sự tăng nhiệt độ ở quy mô toàn cầu. Những thay đổi này có xu hướng làm cho thời tiết trở nên khắc nghiệt hơn, với nạn hạn hán và lụt lội thường xảy ra hơn.

"Sự nóng lên toàn cầu" không ngụ ý rằng nhiệt độ đều tăng một lượng nhỏ như nhau ở khắp mọi nơi, trái lại có sự thăng giáng lớn từ nơi này sang nơi khác, từ thời điểm này sang thời điểm khác. Năm 2010, Anh quốc đã trải nghiệm mùa đông lạnh nhất trong suốt 31 năm, khiến cho tờ *Daily Express* chạy

dòng tít: “Thế mà họ *vẫn* khẳng định đó là sự nóng lên toàn cầu”. Điều thực sự đã xảy ra là, năm 2010 gắn với năm 2005 là năm nóng nhất trong lịch sử, trên khắp thế giới[1]. Và như vậy, “họ” đã đúng. Thực tế, đợt rét đột ngột đó là do gió xoáy đã đẩy không khí lạnh từ Bắc Cực xuống phía nam, và chuyện đó xảy ra bởi vì Bắc Cực đã *nóng* lên một cách không bình thường. Hai tuần băng giá ở trung tâm London không thể bác bỏ được sự nóng lên toàn cầu. Còn kỳ quặc hơn nữa, cũng chính tờ báo này đã tường thuật lại rằng ngày chủ nhật Phục sinh năm 2011 là ngày nóng nhất trong lịch sử, nhưng không liên quan gì tới sự nóng lên toàn cầu cả. Trong trường hợp này thì họ đã phân biệt chính xác hai từ thời tiết và khí hậu. Tôi cảm thấy thật thú vị với cách tiếp cận mang tính chọn lọc ấy.

Tương tự, “sự biến đổi khí hậu” không có nghĩa giản đơn là khí hậu đang thay đổi. Nó đã từng xảy ra mà không có sự tác động lặp đi lặp lại từ phía con người, chủ yếu là ở các thang thời gian dài, nhờ tro bụi và khí ga từ núi lửa, sự biến đổi trong thời gian dài của quỹ đạo Trái Đất quanh Mặt Trời, và cả sự va chạm của mảng lục địa Ấn Độ với mảng châu Á tạo thành dãy Himalaya nữa. Trong bối cảnh của những bàn cãi hiện nay, thực ra “sự biến đổi khí hậu” là dạng ngắn gọn của “sự biến đổi khí hậu có nguồn gốc từ con người” – tức là sự thay đổi khí hậu toàn cầu do hoạt động của con người gây ra. Nguyên nhân chính là do sự xuất hiện ngày càng nhiều hai khí dioxide carbon và metan. Có những khí gây hiệu ứng nhà kính: chúng bẫy (giữ) bức xạ (nhiệt) tới từ Mặt Trời. Vật lý cơ bản cho thấy rằng khí quyển càng có nhiều loại khí như thế thì nó càng giữ nhiệt lại nhiều hơn, khí hậu sẽ ngày càng ấm lên mặc dù hành tinh chúng ta vẫn bức xạ nhiệt ra không

gian. "Sự nóng lên toàn cầu" đã được dự đoán trên cơ sở này ngay từ những năm 1950 và sự tăng nhiệt độ được dự đoán trùng khớp với nhiệt độ quan sát thấy hiện nay.

Bằng chứng cho thấy mức dioxide carbon đã tăng lên một cách ghê gớm tới từ nhiều nguồn, mà trực tiếp nhất chính là các lõi băng. Khi tuyết rơi ở các vùng cực, nó xếp chặt lại với nhau tạo thành băng, với lớp trên là tuyết mới rơi và lớp dưới cùng là tuyết "già nhất". Không khí bị bẫy nhốt trong băng, và những điều kiện phổ biến ở đó giữ cho khối không khí này thực sự không thay đổi trong một khoảng thời gian dài, và bằng cách đó giữ được không khí gốc ở trong và không khí mới hơn ở ngoài. Nếu thực hiện cẩn thận, ta có thể đo được thành phần của không khí bị giữ trong khối băng, và xác định được một cách chính xác ngày tháng mà nó bị nhốt. Những phép đo ở Nam Cực cho thấy nồng độ dioxide carbon trong khí quyển gần như không đổi trong suốt 100.000 năm qua, ngoại trừ 200 năm gần đây, nó đã tăng vọt tới 30%. Nguồn gốc của sự tăng quá mức đó có thể suy ra từ tỉ lệ carbon-13, một trong các đồng vị của carbon. Các hoạt động của loài người là lời giải thích xác đáng nhất.

Nguyên nhân chính của việc tại sao những người hoài nghi vẫn có những ý niệm rất mơ hồ về trường hợp này là do sự phức tạp của việc dự báo khí hậu. Điều đó phải được làm bằng cách sử dụng các mô hình toán học, bởi vì nó nói về các sự kiện ở tương lai. Không một mô hình nào có thể bao hàm được tất cả các đặc điểm riêng lẻ của thế giới thực, và, nếu nó có thực sự làm được đi nữa, thì bạn cũng không bao giờ có được cái mà nó tiên đoán, bởi vì không máy tính nào có thể mô phỏng nó được. Tuy nhiên, mỗi một sai khác giữa mô

hình và thực tế, kể cả không quan trọng đi nữa, cũng là tin vui với những người hoài nghi. Chắc chắn là có những khác biệt giữa các quan điểm về những ảnh hưởng có thể có của biến đổi khí hậu, hay về những điều chúng ta cần phải làm để giảm thiểu chúng. Nhưng việc lờ chúng đi không phải là lựa chọn hợp lý.

Hai khía cạnh quan trọng của khí hậu là khí quyển và các đại dương. Cả hai đều chứa các chất lưu, và cả hai đều có thể được nghiên cứu nhờ phương trình Navier-Stokes. Năm 2010, cơ quan tài trợ chính cho khoa học của Anh quốc – Hội đồng Nghiên cứu Khoa học Vật lý và Kỹ thuật – công bố một tài liệu về biến đổi khí hậu, trong đó chọn toán học như một lực lượng có tác dụng thống nhất các lĩnh vực khác: "Các nhà nghiên cứu khí tượng, vật lý, địa lý, và một loạt các ngành khác đều đóng góp tài năng chuyên môn của mình, nhưng toán học mới là ngôn ngữ thống nhất, nó cho phép nhóm người khác nhau này thực hiện những ý tưởng của mình trong các mô hình khí hậu." Tài liệu ấy cũng diễn giải rằng "Những bí ẩn của hệ thống khí hậu đã bị nhốt chặt trong phương trình Navier-Stokes, nhưng ta không thể giải một cách trực tiếp vì nó quá phức tạp." Thay vào đó, những người lập mô hình khí hậu đã sử dụng các phương pháp số để tính toán dòng chảy của chất lưu tại các điểm của một lưới ba chiều, phủ kín địa cầu từ đáy sâu nhất của đại dương tới tận tầng cao nhất của khí quyển. Khoảng cách ngang của mắt lưới dài 100km – tất cả những gì có kích thước nhỏ hơn chỉ làm việc tính toán trở nên phi thực tiễn, nói cách khác là không thể thực hiện được. Các máy tính mạnh hơn cũng không giúp được gì nhiều, do đó cách tốt nhất vẫn là phải tiếp tục tư duy sâu sắc hơn nữa.

Hiện các nhà toán học đang nghiên cứu nhằm tìm ra các phương pháp có hiệu quả để giải phương trình Navier-Stokes theo phương pháp số.

Phương trình Navier-Stokes chỉ là một phần của câu đố về khí hậu. Những nhân tố khác bao gồm các dòng nhiệt giữa các đại dương và bầu khí quyển, các ảnh hưởng của mây, sự góp phần của những yếu tố tự nhiên như núi lửa, thậm chí cả khí thải của máy bay ở tầng bình lưu. Những người hoài nghi hay nhấn mạnh những nhân tố như vậy nhằm gợi ý rằng những mô hình khí hậu kia là sai, nhưng thực ra chúng ta đều biết rằng hầu hết những tác động của riêng từng nhân tố ấy đều không liên quan đến biến đổi khí hậu. Chẳng hạn, mỗi năm núi lửa chỉ đóng góp khoảng 0,6% lượng dioxide carbon mà con người thải ra từ những hoạt động của mình. Tất cả những mô hình chính đều cho thấy rằng có một vấn đề nghiêm trọng và con người chính là thủ phạm gây ra nó. Vấn đề chính bây giờ là hành tinh này sẽ nóng lên bao nhiêu, và thảm họa xảy ra sẽ nghiêm trọng đến mức nào. Việc dự báo chính xác tuyệt đối là chuyện bất khả, nên vì lợi ích của mọi người, phải đảm bảo rằng những mô hình khí hậu của chúng ta là những mô hình tốt nhất, để chúng ta có thể có những hành động thích hợp. Khi băng tan, Hành lang Tây Bắc sẽ mở rộng do các vùng đóng băng ở Bắc Cực co lại, các núi băng của Nam Cực vỡ ra rơi xuống biển, chúng ta sẽ không còn có thể mạo hiểm mà tin rằng chúng ta không cần làm gì cả, và mọi chuyện rồi cũng sẽ ổn thôi.

11 Sóng trong ether

Các phương trình Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Điện và từ không thể bị rò rỉ. Một điện trường xoáy sẽ tạo ra một từ trường nằm vuông góc với chiều xoáy. Một từ trường xoáy cũng tạo ra một điện trường nằm trong mặt phẳng vuông góc với chiều xoáy, nhưng theo hướng ngược lại.

Tại sao nó lại quan trọng?

Đây là sự thống nhất quan trọng đầu tiên của các lực trong vật lý, cho biết điện và từ có mối liên hệ mật thiết với nhau.

Nó đã dẫn tới những gì?

Nó đưa ra tiên đoán về sự tồn tại của sóng điện từ, lan truyền với tốc độ của ánh sáng, và như vậy bản thân ánh sáng cũng là một sóng. Điều này đã thúc đẩy việc phát minh ra radio, radar, tivi, kết nối không dây cho các thiết bị máy tính, và gần như toàn bộ lĩnh vực truyền thông hiện đại.

Vào đầu thế kỷ 19, hầu hết mọi người thắp sáng ngôi nhà của mình bằng nến và đèn lồng. Bắt đầu từ năm 1790, việc thắp sáng bằng gas thi thoảng đã được các nhà phát minh hay chủ doanh nghiệp sử dụng ở gia đình và các cơ sở kinh doanh. Đèn đường đốt bằng gas bắt đầu được sử dụng ở Paris từ năm 1820. Vào thời đó, cách thức thông thường để gửi tin tức là viết thư và gửi đi nhờ các cỗ xe do ngựa kéo; đối với các tin khẩn cấp, người ta chỉ dùng ngựa và bỏ các thùng xe lại. Một phương thức chủ yếu khác là hệ thống truyền tin thị giác, phần lớn dùng cho quân đội và các liên lạc chính thức của nhà nước. Hệ thống sử dụng semaphore, cụ thể là đặt các dụng cụ cơ học trên các đỉnh tháp, các dụng cụ này có thể biểu diễn các chữ cái hoặc các từ được mã hóa bằng cách sắp xếp các cánh tay đòn theo các góc khác nhau. Những hình dạng này có thể nhìn thấy từ xa qua kính viễn vọng, và được chuyển tiếp tới những tháp tiếp theo trên đường truyền tin. Hệ thống loại này được sử dụng rộng rãi từ năm 1792, khi một kỹ sư người Pháp tên là Claude Chappe xây dựng 556 tháp để tạo ra một mạng lưới truyền tin dài 4800km trên phần lớn lãnh thổ nước Pháp. Hệ thống này vẫn được sử dụng trong suốt 60 năm sau đó.

Trong vòng 100 năm, các ngôi nhà và đường phố đều được thắp sáng bằng điện, điện báo xuất hiện rồi lại biến mất, thay vào đó người ta sử dụng điện thoại để liên lạc với nhau. Các nhà vật lý đã thử nghiệm liên lạc vô tuyến trong phòng thí nghiệm, và thậm chí một doanh nhân đã thành lập một xí

nghiệp bán máy thu thanh "không dây" (vô tuyến) cho công chúng. Hai nhà khoa học đã có những khám phá quan trọng làm nên cuộc cách mạng xã hội và công nghệ này, một là Micheal Faraday, nhà vật lý người Anh, người đã tìm ra cơ sở vật lý của điện từ học – một sự kết hợp chặt chẽ của điện và từ, vốn là các hiện tượng mà trước kia được coi là tách rời và không có quan hệ gì với nhau. Nhà khoa học thứ hai là một người Scotland, James Clerk Maxwell, người đã biến những lý thuyết cơ học của Faraday thành các phương trình toán học, và sử dụng chúng để tiên đoán sự tồn tại của sóng điện từ lan truyền với tốc độ ánh sáng.

Viện Hoàng gia ở London là một tòa nhà đồ sộ, với các hàng cột cổ điển ở mặt tiền, nằm khuất trên một đường phố phụ gần rạp xiếc Piccardily. Ngày nay, hoạt động chính của nó là tổ chức những sự kiện khoa học đại chúng, nhưng khi được thành lập vào năm 1799 thì nó còn có nhiệm vụ "truyền bá tri thức và giới thiệu các kiến thức đại cương về những phát minh cơ học hữu ích". Khi John "Jack điên" Fuller lập ra ghế giáo sư Hóa học ở Viện Hoàng gia thì người đầu tiên nhận cương vị đó lại không phải là một học giả. Anh là con trai của một người thợ rèn, và là thợ học việc của một người bán sách. Vị trí ấy cho phép anh thả sức đọc sách dù gia đình túng thiếu, và những cuốn sách quý như *Đối thoại về Hóa học* (*Conversations on Chemistry*) của Jane Marcet và *Hoàn thiện trí tuệ* (*The Improvement of the Mind*) của Isaac Watts đã truyền cho anh niềm đam mê đối với khoa học nói chung và điện học nói riêng.

Chàng trai trẻ đó là Micheal Faraday. Anh đã tới Viện Hoàng gia nghe các bài giảng của nhà hóa học xuất sắc Humphry

Davy, và đã gửi cho ông tới 300 trang ghi chép. Không lâu sau đó, Davy gặp một tai nạn khiến ông trở nên mù lòa, và ông đã đề nghị Faraday làm thư ký cho mình. Sau đó một phụ tá ở Viện Hoàng gia bị sa thải, Davy đã đề nghị cho Faraday thay vào vị trí ấy và bố trí anh nghiên cứu về clo.

Viện Hoàng gia cũng cho phép Faraday được theo đuổi các mối quan tâm khoa học riêng của mình, và anh đã thực hiện vô số các thí nghiệm về điện học, một chủ đề mới được phát hiện. Năm 1821, Faraday đọc được công trình của nhà khoa học Đan Mạch Hans Christian Ørsted liên kết điện với các hiện tượng từ tính xa xưa hơn rất nhiều. Faraday đã khai thác mối liên hệ này và phát minh ra động cơ điện, nhưng Davy cảm thấy khó chịu vì ông ta không nhận được chút danh tiếng gì ở đây cả, và ông đã yêu cầu Faraday chuyển sang làm công việc khác. Davy mất năm 1831, và hai năm sau, Faraday đã bắt đầu tiến hành một loạt những thí nghiệm về điện và từ, làm nên tên tuổi của ông như là một trong số những nhà khoa học vĩ đại nhất còn sống. Những nghiên cứu sâu rộng của ông phần nào được thôi thúc bởi việc đáp ứng một số lượng lớn những thí nghiệm mới nhằm khai trí cho tầng lớp bình dân, hay phục vụ nhu cầu giải trí cho tầng lớp cao cấp, như một phần trong nhiệm vụ của Viện Hoàng gia nhằm khuyến khích công chúng tìm hiểu khoa học.

Trong số những phát minh của Faraday có các phương pháp biến điện thành từ, biến điện và từ thành chuyển động (động cơ điện) và biến chuyển động thành điện (máy phát điện). Những phương pháp này đều khai thác khám phá vĩ đại nhất của ông, đó là hiện tượng cảm ứng điện từ. Nếu một vật liệu dẫn điện chuyển động trong một từ trường thì sẽ xuất hiện

một dòng điện đi qua nó. Faraday khám phá ra điều này vào năm 1831. Thực ra, Francesco Zantedeschi đã biết đến hiện tượng này vào năm 1829, và Joseph Henry cũng đã phát hiện ra điều này ít lâu sau đó. Nhưng Henry đã không công bố ngay khám phá của mình, còn Faraday thì đã đưa ý tưởng này tiến xa hơn Zantedeschi rất nhiều. Công trình của Faraday đã vượt xa nhiệm vụ của Viện Hoàng gia là tạo điều kiện cho các phát minh cơ học hữu ích, ông đã sáng chế ra các máy hoàn toàn mới, khai thác các thành tựu mới nhất của vật lý. Một cách gần như trực tiếp, nó đã dẫn tới điện năng, thắp sáng bằng điện, và hàng ngàn tiện ích khác. Khi nhiều thế hệ tiếp bước nhau trên con đường này thì cả một tập hợp các thiết bị điện và điện tử hiện đại xuất hiện, bắt đầu là các máy thu thanh (radio), tới tivi, radar, và viễn thông. Chính Faraday, chứ không phải cá nhân nào khác, với sự giúp đỡ của những ý tưởng mới quan trọng từ hàng trăm kỹ sư, nhà khoa học và doanh nhân xuất chúng, đã tạo ra toàn bộ thế giới công nghệ hiện đại.

Thuộc giai cấp lao động và thiếu sự giáo dục bài bản của một quý ông, Faraday đã tự học về khoa học, nhưng không bao gồm toán học. Ông phát triển những lý thuyết riêng của mình để giải thích và dẫn dắt các thí nghiệm, nhưng chúng dựa trên những tương tự cơ học và những máy móc trong ý niệm, chứ không dựa trên các công thức và phương trình. Các công trình của ông có được vị trí xứng đáng trong vật lý cơ bản là nhờ sự can thiệp của trí tuệ khoa học vĩ đại nhất người Scotland, James Clerk Maxwell.

Maxwell sinh ra đúng vào năm mà Faraday công bố khám phá của ông về cảm ứng điện từ. Một ứng dụng của nó là điện báo điện từ đã nhanh chóng được triển khai sau đó nhờ Gauss và

trợ lý của ông là Wilhelm Weber. Gauss muốn sử dụng dây dẫn để truyền tín hiệu điện giữa đài thiên văn Göttingen, nơi ông thường lui tới, và Viện Vật lý cách đó 1km, nơi Weber làm việc. Bằng trực giác tài tình, Gauss đã đơn giản hóa kỹ thuật trước đó để phân biệt các chữ cái – một dây dẫn cho một chữ cái – bằng cách đưa vào một mã nhị phân sử dụng dòng âm và dòng dương (xem Chương 15). Tới năm 1839, hãng Great Western Railway đã gửi các tin tức bằng điện báo từ Paddington tới West Drayton, cách nhau 21km. Cùng năm đó, Samuel Morse đã phát minh ra hệ thống điện báo riêng ở Mỹ một cách độc lập, sử dụng mã Morse (được trợ lý của ông là Alfred Vail phát minh ra) và gửi đi bản tin đầu tiên vào năm 1838.

Năm 1876, ba năm trước khi Maxwell mất, Alexander Graham Bell được cấp bằng phát minh đầu tiên cho một tiện ích mới: điện báo âm thanh. Đó là một chiếc máy biến âm thanh, đặc biệt là giọng nói, thành các xung điện, và truyền đi theo một dây dẫn tới máy nhận, máy này sau đó lại biến chúng thành âm thanh. Bây giờ chúng ta biết đó là chiếc điện thoại. Bell không phải là người đầu tiên hình dung ra một chiếc máy như vậy, thậm chí cũng chẳng phải là người đã chế tạo ra nó, nhưng ông là chủ của bằng sáng chế đó. Thomas Edison đã cải tiến mẫu thiết kế trên bằng cách sử dụng micro carbon vào năm 1878. Một năm sau, Edison phát minh ra bóng đèn điện dùng dây tóc carbon và điều này đã gắn chặt tên tuổi ông vào tâm thức công chúng như người phát minh ra đèn điện. Sự thật là đã có tới 23 nhà phát minh trước ông, người nổi tiếng nhất trong số đó là Joseph Swan, người đã được cấp bằng phát minh cho phiên bản của mình vào năm 1878. Năm 1880, một năm sau khi Maxwell qua đời, thành

phố Wabash, bang Illinois đã trở thành thành phố đầu tiên sử dụng điện để thắp sáng các đường phố.

Thực ra, những cuộc cách mạng trong truyền thông và thắp sáng này đã chịu ơn Faraday rất nhiều; điện năng cũng chịu ơn Maxwell như thế. Nhưng đối với di sản có ảnh hưởng sâu rộng nhất của Maxwell thì chiếc điện thoại cũng chỉ như một thứ đồ chơi trẻ con mà thôi. Và nó khởi sinh, một cách trực tiếp và chắc chắn, từ các phương trình của ông đối với điện từ trường.

Maxwell sinh ra tại Edinburgh trong một dòng họ tài năng nhưng lập dị, với các thành viên là luật sư, thẩm phán, nhạc sĩ, chính trị gia, nhà thơ, nhà đầu cơ khai mỏ và doanh nhân. Ở tuổi vị thành niên, ông đã bắt đầu bị toán học quyến rũ khi giành được giải thưởng trong một cuộc thi ở trường với một bài tiểu luận về cách dựng đường oval sử dụng đinh ghim và sợi chỉ. Năm 16 tuổi ông tới Đại học Edinburgh, học toán, thực nghiệm về hóa học, từ học và quang học. Ông công bố các bài báo về toán học cả thuần túy và ứng dụng trong tạp chí của Hội Hoàng gia Edinburgh. Năm 1850, sự nghiệp toán học của ông có một bước ngoặt quan trọng và ông chuyển đến Đại học Cambridge, nơi ông được William Hopkins kèm cặp riêng để chuẩn bị cho cuộc thi toán *tripos*. Cuộc thi *tripos* những ngày đó yêu cầu giải các bài toán phức tạp, thường phải dùng các mẹo thông minh hay các tính toán dài dòng, với thời gian hạn chế. Sau này Godfrey Harold Hardy, một trong những nhà toán học tài năng nhất nước Anh, đồng thời là giáo sư tại Cambridge, đã có quan điểm rất mạnh mẽ về việc làm thế nào để làm toán một cách sáng tạo, và việc luyện thi nhồi nhét cho một cuộc thi đầy mẹo mực như thế thì

không đúng theo tinh thần đó. Năm 1926, ông đã tuyên bố rằng mục đích của ông không phải là "cải tổ lại kỳ thi *tripos* mà là tiêu diệt nó". Maxwell được nhồi nhét, nhưng đã thành công trong không khí cạnh tranh đó của cuộc thi, có lẽ bởi vì ông thuộc kiểu đầu óc như thế.

Ông vẫn tiếp tục làm các thí nghiệm kỳ lạ của mình, ngoài ra, ông còn tìm hiểu xem tại sao mèo lại luôn tiếp đất trên chân của nó, ngay cả khi nó được giữ ngửa lên trời cách mặt đất khoảng vài chục centimet. Điều khó hiểu ở đây là dường như việc này vi phạm cơ học Newton; con mèo sẽ phải quay 180 độ, nhưng nó không có điểm nào để đặt lực đẩy cả. Ông không sao nắm bắt được cơ chế chính xác của sự rơi này cho tới khi bác sĩ người Pháp Jules Marey chụp được một chuỗi các bức ảnh một con mèo đang rơi vào năm 1894. Hóa ra bí mật là ở chỗ con mèo không phải là một khối rắn, nó xoắn nửa thân trước và nửa thân sau theo chiều ngược nhau, rồi lại làm ngược lại, trong khi đó hai chân trước và hai chân sau của nó thay nhau giang ra và co lại để ngăn không cho các chuyển động đó cân bằng nhau[1].

Maxwell tốt nghiệp ngành toán và tiếp tục học sau đại học ở trường Trinity College. Ở đó ông đã đọc cuốn *Những nghiên cứu thực nghiệm* (*Experimental Researches*) của Faraday và tiếp tục nghiên cứu về điện và từ. Ông nhận giảng dạy về Triết học tự nhiên ở Aberdeen, nghiên cứu các vành của Thổ tinh và động lực học phân tử của chất khí. Năm 1860 ông chuyển tới trường King's College London và ở đây đôi khi ông đã gặp Faraday. Từ đó, Maxwell bắt đầu cuộc tìm kiếm có ảnh hưởng sâu rộng nhất của ông: thiết lập cơ sở toán học cho các lý thuyết và thực nghiệm của Faraday.

Vào thời điểm đó, hầu hết các nhà vật lý nghiên cứu điện và từ đều tìm kiếm những sự tương tự giữa chúng với lực hấp dẫn. Nghe ra có vẻ rất hợp lý: các điện tích trái dấu hút nhau với một lực giống như lực hấp dẫn, tức là tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Những điện tích cùng dấu thì đẩy nhau cũng với một lực có kiểu biến thiên như vậy, và điều tương tự cũng xảy ra trong từ học, với các điện tích được thay bằng các cực từ. Cách tư duy thông thường là lực hấp dẫn là lực do một vật tác dụng một cách đầy bí ẩn lên một vật khác ở cách xa nó, mà không có gì xảy ra giữa hai vật cả; lực điện và lực từ được coi là cũng tác dụng đúng theo cách như vậy. Nhưng Faraday thì lại có ý tưởng khác: chúng đều là các "trường", các hiện tượng tràn ngập khắp không gian và có thể phát hiện được nhờ các lực mà chúng tạo ra.

Vậy trường là gì? Maxwell chỉ có thể tiến xa hơn chút ít cho tới khi ông có thể mô tả khái niệm này dưới dạng toán học. Nhưng Faraday, do thiếu căn bản toán học, đã xây dựng các lý thuyết của ông qua các cấu trúc hình học, chẳng hạn như, các đường sức mà dọc theo đó các trường đẩy hay hút. Đột phá vĩ đại đầu tiên của Maxwell là phát biểu lại những ý tưởng này bằng cách sử dụng sự tương tự với toán học của dòng chảy chất lưu, mà ở đó trường thực tế *chính là* chất lưu. Khi đó các đường sức sẽ tương tự với các đường dòng, tức đường chuyển động của các phân tử chất lưu; còn cường độ điện trường hay từ trường thì tương tự với vận tốc của chất lưu. Về mặt hình thức, một trường chính là một chất lưu không nhìn thấy được; về mặt toán học, nó cũng hành xử chính xác như vậy, bất kể thực tế nó là gì đi chăng nữa. Maxwell đã vay mượn các ý tưởng từ toán học chất lưu và sửa đổi để mô tả từ

trường. Mô hình của ông cũng đã giải thích được những tính chất chính được phát hiện trong điện học.

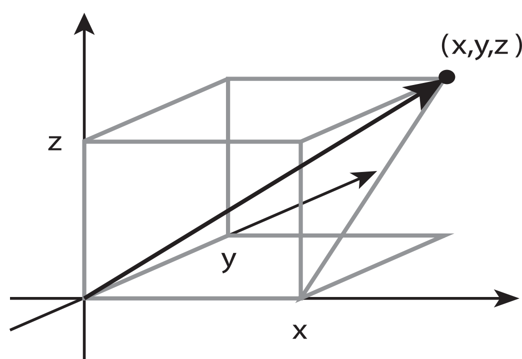
Không hài lòng với những nỗ lực bước đầu ấy, ngoài việc tiếp tục tìm hiểu từ trường, ông còn xem xét mối liên hệ của nó với điện trường nữa. Khi điện trường biến thiên, nó ảnh hưởng tới từ trường và ngược lại. Đối với từ trường, Maxwell sử dụng hình ảnh tưởng tượng của các vòng xoáy nhỏ trong không gian. Tương tự như vậy, điện trường được cấu thành bởi các hình cầu nhỏ mang điện. Theo sự tương tự này và các hệ quả toán học, Maxwell đã bắt đầu hiểu được tại sao một sự thay đổi của điện trường lại có thể sinh ra từ trường. Khi những điện tích hình cầu di chuyển, nó khiến các xoáy từ quay, giống như một người hâm mộ bóng đá đi qua một cửa quay để vào sân xem bóng đá vậy, người đó chuyển động mà không quay; còn cánh cửa thì quay mà không chuyển động.

Maxwell vẫn cảm thấy chưa thật hài lòng với sự tương tự này, ông nói rằng "tôi vẫn chưa làm sáng tỏ được điều đó... như một kiểu liên kết tồn tại trong tự nhiên... Tuy nhiên, chúng ta đã có thể hình dung được về mặt cơ học và dễ dàng nghiên cứu, đồng thời nó cũng giúp làm sáng tỏ những mối liên kết cơ học thực sự giữa các hiện tượng điện từ". Để làm rõ ý tứ của mình, Maxwell đã sử dụng mô hình này để giải thích tại sao hai dây dẫn song song mang dòng điện ngược chiều nhau lại đẩy nhau, và ông cũng giải thích được khám phá quan trọng nhất của Faraday: hiện tượng cảm ứng điện từ.

Bước tiếp theo là giữ lại cấu trúc toán học nhưng vứt bỏ đi những thứ phụ trợ cơ học đã dẫn tới sự tương tự đó. Điều này có nghĩa là phải viết ra các phương trình cho những tương tác cơ bản giữa điện trường và từ trường, được rút ra từ mô

hình cơ học, nhưng phải vĩnh viễn ly khai khỏi nguồn gốc này. Maxwell đạt được mục tiêu này vào năm 1864, trong bài báo nổi tiếng của ông: *Lý thuyết động lực học của trường điện từ* (*A dynamical theory of the electromagnetic field*).

Bây giờ chúng ta sẽ diễn giải các phương trình của ông bằng cách sử dụng các vectơ. Đó là những đại lượng không chỉ mang thông tin về độ lớn, mà còn cả về hướng nữa. Đại lượng quen thuộc nhất là vận tốc: độ lớn của nó chính là tốc độ, tức là độ nhanh chậm trong chuyển động của vật; còn hướng chính là chiều của chuyển động. Hướng thực sự rất quan trọng, một vật di chuyển đi lên theo phương thẳng đứng với tốc độ 10km/s sẽ hành xử rất khác với vật di chuyển xuống dưới cũng theo phương thẳng đứng với cùng tốc độ đó. Về mặt toán học, một vectơ được biểu diễn bởi ba thành phần: đó là hình chiếu của nó xuống ba trục tọa độ vuông góc, chẳng hạn như bắc/nam, đông/tây, trên/dưới. Như vậy, thực ra bản chất của một vectơ chỉ là một bộ ba số (x,y,z), xem hình 44. Ví dụ vận tốc của một chất lưu ở một điểm là một vectơ. Ngược lại, áp suất ở một điểm cho trước là một con số: đại lượng này được gọi là "vô hướng" để phân biệt với một vectơ.



Hình 44 Một vectơ trong không gian ba chiều.

Với những thuật ngữ này thì điện trường là gì? Theo quan điểm của Faraday thì nó được xác định bởi các đường sức

điện. Còn trong sự tương tự của Maxwell, đó là các đường dòng của chất lỏng điện. Một đường dòng cho chúng ta biết chất lỏng chuyển động theo hướng nào, và vì một phân tử chuyển động dọc theo đường dòng, nên chúng ta có thể quan sát được tốc độ của nó. Bởi vậy đối với mỗi điểm trong không gian, đường dòng đi qua điểm đó xác định một vectơ mô tả tốc độ và hướng của chất lỏng điện, hay cũng chính là cường độ và hướng của điện trường *tại điểm đó*. Đảo lại, nếu chúng ta biết tốc độ và hướng tại mọi điểm trong không gian, chúng ta có thể suy ra được dáng điệu của các đường dòng, như vậy về nguyên tắc ta biết được điện trường.

Tóm lại: điện trường là một hệ các vectơ, mỗi vectơ ứng với một điểm trong không gian. Mỗi vectơ biểu thị cường độ và hướng của lực điện trường (tác dụng lên một điện tích thử nhỏ) ở điểm đó. Các nhà toán học gọi một đại lượng như thế là một trường vectơ: nó là một hàm gán cho mỗi điểm trong không gian một vectơ tương ứng. Tương tự như vậy, từ trường cũng được xác định bởi các đường sức từ; nó là trường vectơ tương ứng với các lực mà có thể tác dụng lên một hạt từ thử nhỏ.

Khi đã định rõ từ trường và điện trường là gì, Maxwell có thể viết ra các phương trình mô tả hành trạng của các trường này. Bây giờ chúng ta sẽ biểu diễn các phương trình ấy bằng cách sử dụng hai toán tử vectơ, được gọi là các toán tử *div* và *rot*. Maxwell đã sử dụng các công thức cụ thể bao gồm ba thành phần của điện trường và từ trường. Trong trường hợp đặc biệt, không có dây dẫn hay các tấm kim loại, không có nam châm và mọi thứ đều diễn ra trong chân không, các phương trình có dạng đơn giản hơn, và tôi sẽ chỉ thảo luận giới hạn trong trường hợp này.

Hai trong số các phương trình này cho ta biết rằng các chất lỏng điện và từ là không nén được – tức là điện và từ không thể rò rỉ mất, chúng chỉ *đi* đâu đó mà thôi. Dịch ra ngôn ngữ toán học, điều này có nghĩa là "*div* của nó bằng 0", dẫn tới các phương trình:

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla.\mathbf{H} = 0$$

trong đó hình tam giác ngược và dấu chấm là các ký hiệu cho *div*[*]. Có thêm hai phương trình nữa cho ta biết nếu một vùng điện trường quay theo một vòng tròn nhỏ, thì nó tạo ra một từ trường nằm vuông góc với mặt phẳng của vòng tròn đó, và tương tự một vùng từ trường quay sẽ tạo ra một điện trường vuông góc với mặt phẳng của vòng tròn đó. Có một đặc tính khá lạ lùng: với một chiều quay cho trước thì từ trường và điện trường có hướng ngược nhau. Các phương trình đó là:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

ở đây hình tam giác ngược và dấu nhân là ký hiệu cho toán tử *rot*. Ký hiệu t chỉ thời gian và $\partial/\partial t$ chỉ tốc độ biến thiên theo thời gian. Chú ý rằng vế phải của phương trình thứ nhất có xuất hiện dấu âm, nhưng phương trình thứ hai thì không: điều này biểu thị sự định hướng ngược nhau của điện trường và từ trường mà tôi vừa đề cập ở trên.

Thế còn *c* là gì? Nó là một hằng số và thực nghiệm cho thấy nó không vượt quá 300.000 theo đơn vị kilomet trên giây. Maxwell ngay lập tức nhận ra con số này, đó chính là tốc độ của ánh sáng trong chân không. Nhưng tại sao đại lượng này lại xuất hiện ở đây? Ông quyết định phải tìm cho ra nguyên

---

[*] Chú ý: từ đây trở xuống những chữ in đậm là chỉ vectơ - ND.

nhân. Một manh mối có từ thời Newton, được phát triển bởi các nhà khoa học khác, là việc phát hiện ra rằng ánh sáng là một loại sóng nào đó. Nhưng không ai biết sóng đó bao gồm những gì.

Một tính toán đơn giản sẽ cho ta câu trả lời. Một khi bạn đã nắm được các phương trình của trường điện từ, bạn có thể giải chúng để đưa ra những tiên đoán về dáng điệu của từ trường và điện trường trong những hoàn cảnh khác nhau. Bạn cũng có thể rút ra những hệ quả toán học. Chẳng hạn, cặp phương trình thứ hai liên hệ **E** và **H**; bất kỳ một nhà toán học nào cũng sẽ ngay lập tức đi tìm các phương trình chỉ chứa **E** và chỉ chứa **H**, bởi vì điều đó sẽ giúp ta chỉ tập trung vào từng trường riêng rẽ. Xét những hệ quả thần kỳ của nó, hóa ra nhiệm vụ này lại đơn giản đến vô lý nếu bạn biết chút ít giải tích vectơ. Tôi đã đưa các chi tiết chứng minh trong phần Chú thích[2], nhưng dưới đây sẽ là một tóm tắt ngắn gọn. Chúng ta hãy bắt đầu với phương trình thứ ba, phương trình liên hệ *rot* của **E** với đạo hàm theo thời gian của **H**. Chúng ta không có phương trình nào có chứa đạo hàm của **H** theo thời gian cả, nhưng chúng ta lại có một phương trình chứa *rot* **H**, đó là phương trình thứ tư. Nhận xét này gợi ý rằng chúng ta nên lấy *rot* hai vế của phương trình thứ ba. Sau đó áp dụng phương trình thứ tư, đơn giản hóa nó, ta sẽ nhận được:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E}$$

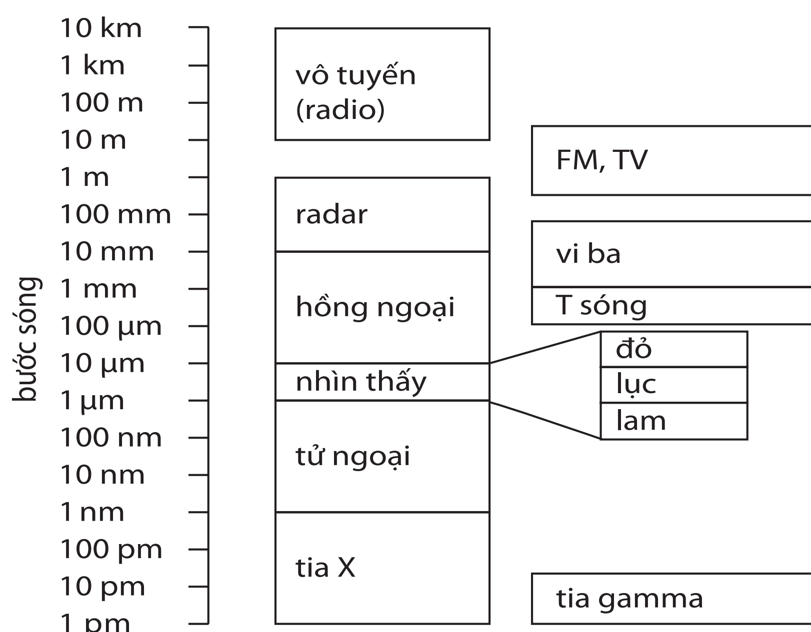
Đây lại chính là phương trình sóng!

Áp dụng thủ thuật này cho *rot* của **H** ta sẽ được một phương trình như trên, nhưng với **E** thay bởi **H** (dấu âm được áp dụng hai lần, do vậy nó biến mất). Như vậy, cả điện trường

và từ trường trong chân không đều tuân theo phương trình sóng. Bởi vì cùng một hằng số *c* xuất hiện trong mỗi phương trình sóng, nên chúng phải có cùng tốc độ, mà cụ thể là *c*. Vì thế tính toán nho nhỏ này tiên đoán rằng cả điện trường và từ trường đồng thời kết hợp như một sóng – khiến nó trở thành sóng điện từ, trong đó cả hai trường đều biến thiên hòa hợp với nhau. Và tốc độ của sóng đó chính là... tốc độ ánh sáng.

Một câu hỏi khác trong số những câu hỏi mẹo, cái gì chuyển động với tốc độ ánh sáng? Lần này thì câu trả lời là cái bạn mong đợi: đó là ánh sáng, nhưng có một hàm ý quan trọng: *ánh sáng là sóng điện từ*.

Đây quả là một thông tin phi thường. Trước khi Maxwell đưa ra các phương trình của mình thì không có lý do gì để hình dung ra một mối liên kết cơ bản đến thế giữa ánh sáng, điện và từ. Nhưng còn hơn thế nữa. Ánh sáng xuất hiện dưới nhiều màu sắc khác nhau, và một khi bạn đã biết rằng ánh sáng là một sóng thì bạn có thể tìm ra rằng những ánh sáng đó tương ứng với các bước sóng khác nhau – tức khoảng cách giữa hai đỉnh sóng liên tiếp. Phương trình sóng không đặt điều kiện gì cho các bước sóng cả, do đó chúng có thể là bất kỳ con số nào. Bước sóng của ánh sáng nhìn thấy giới hạn trong một khoảng nhỏ do thành phần hóa học của các sắc tố nhận biết ánh sáng của mắt quy định. Các nhà vật lý cũng đã biết về ánh sáng "không nhìn thấy", như ánh sáng tử ngoại và hồng ngoại. Dĩ nhiên, những sóng đó có bước sóng nằm ngoài vùng nhìn thấy được. Bây giờ các phương trình của Maxwell dẫn tới một tiên đoán đầy kịch tính: các sóng điện từ với bước sóng khác cũng tồn tại. Có thể tưởng tượng được rằng mọi bước sóng – bất kể dài hay ngắn – đều có thể tồn tại.



Hình 45 Phổ sóng điện từ.

Không ai trông đợi điều này cả, nhưng ngay khi lý thuyết khẳng định điều đó sẽ phải xảy ra, các nhà thực nghiệm đã bắt tay tìm kiếm nó. Một trong số đó là nhà khoa học người Đức Heinrich Hertz. Năm 1886, ông đã xây dựng một dụng cụ có thể phát sóng vô tuyến và một dụng cụ khác thu được chúng. Máy này thực ra chưa phải là một máy phát thực thụ vì nó chỉ có thể phát ra tia điện cao áp, nhưng lý thuyết chỉ ra rằng một tia điện như vậy sẽ phát xạ sóng vô tuyến. Máy thu sóng chỉ đơn giản là một vòng dây hình tròn bằng đồng, có kích thước được chọn để cộng hưởng với sóng tới. Một khe hẹp trong vòng dây dẫn, có kích thước chỉ khoảng vài phần trăm milimet, sẽ phát lộ những sóng tới đó bằng cách tạo ra những tia điện nhỏ. Năm 1887, Hertz tiến hành thí nghiệm và ông đã thành công. Ông tiếp tục nghiên cứu những đặc điểm khác của sóng vô tuyến. Ông cũng đo tốc độ của chúng, và nhận được kết quả gần với tốc độ ánh sáng, điều này xác nhận tiên đoán của Maxwell và xác nhận rằng các dụng cụ của ông đã thực sự phát hiện ra sóng điện từ.

Hertz biết rằng công trình của ông rất quan trọng với vật lý, và ông đã công bố nó trong tác phẩm *Sóng điện: Nghiên cứu về sự lan truyền tác dụng điện với vận tốc hữu hạn trong không gian* (*Electric waves: being researches on the propagation of electric action with finite velocity through space*). Nhưng ông chưa bao giờ nghĩ rằng ý tưởng đó lại có những ứng dụng thực tiễn. Khi được hỏi, ông đã trả lời rằng "Dù sao thì nó cũng chẳng có ứng dụng gì đâu... nó chỉ là một thí nghiệm chứng tỏ rằng Maxwell đã đúng mà thôi – có những sóng điện từ kỳ bí mà chúng ta không thể nhìn thấy bằng mắt thường. Nhưng chúng vẫn tồn tại đấy". Bị thúc ép phải nói rõ quan điểm của mình về những hệ quả, ông đã nói "Tôi cho là không có gì đâu".

Đó là sự thất bại của trí tưởng tượng hay chỉ đơn giản là không có hứng thú? Thật khó có thể trả lời được. Nhưng thí nghiệm "vô dụng" của Hertz, thí nghiệm đã xác nhận tiên đoán của Maxwell về bức xạ điện từ, đã nhanh chóng dẫn tới một phát minh làm nên chiếc điện thoại nhìn chẳng khác gì một thứ đồ chơi của trẻ con.

Vô tuyến.

Vô tuyến sử dụng khoảng tần số đầy hấp dẫn trong phổ điện từ: các sóng với bước sóng dài hơn rất nhiều so với bước sóng của ánh sáng. Những sóng này có khả năng giữ được cấu trúc của chúng trên những khoảng cách xa. Ý tưởng then chốt, ý tưởng mà Hertz đã không nhận thấy, thật đơn giản: nếu bằng cách nào đó bạn có thể ghi một tín hiệu lên một sóng loại này, bạn có thể trò chuyện được với cả thế giới.

Những nhà vật lý, kỹ sư và các nhà doanh nghiệp lại giàu

trí tưởng tượng hơn, và họ đã nhanh chóng nhận ra tiềm năng của sóng vô tuyến. Tuy nhiên, để khai thác được tiềm năng đó, họ phải giải quyết rất nhiều vấn đề kỹ thuật. Họ cần một máy phát có thể sinh ra tín hiệu đủ mạnh, và một máy khác để thu tín hiệu ấy. Dụng cụ của Hertz chỉ giới hạn trong khoảng cách vài mét; giờ thì bạn đã hiểu tại sao ông lại không đề xuất truyền thông như một ứng dụng khả dĩ của sóng vô tuyến. Một vấn đề khác là làm thế nào để ghi một tín hiệu lên đó. Vấn đề thứ ba, đó là tín hiệu có thể truyền đi bao xa, dễ thấy rằng việc này sẽ bị giới hạn bởi độ cong của Trái Đất. Nếu như đường thẳng nối máy phát và máy thu chạm đất thì tín hiệu chắc chắn sẽ bị chặn lại. Hóa ra sau này chúng ta mới biết rằng thiên nhiên rất ưu ái chúng ta, tầng điện ly của Trái Đất phản xạ sóng vô tuyến ở một khoảng bước sóng rất rộng, nhưng trước khi tìm ra điều này, người ta đã có những cách rất hiển nhiên để vượt qua những trở ngại tiềm tàng đó. Bạn có thể xây những tòa tháp cao, đặt máy phát và máy thu trên đó. Bằng cách tiếp sóng tín hiệu từ tháp này tới tháp khác, bạn có thể gửi rất nhanh các tin tức tới toàn cầu.

Có hai cách tương đối hiển nhiên để ghi tín hiệu lên một sóng vô tuyến. Bạn có thể làm cho biên độ sóng biến thiên hoặc làm cho tần số sóng biến thiên. Các phương pháp này được gọi là điều biến biên độ (AM) và điều biến tần số (FM). Cả hai đều đã và đang được sử dụng. Như vậy một vấn đề đã được giải quyết. Năm 1893, một kỹ sư người Serbia tên là Nikola Tesla đã phát minh và chế tạo thành công các thiết bị cần thiết để truyền sóng vô tuyến và ông đã trình diễn các phương pháp của mình trước công chúng. Năm 1894, Oliver Lodge và Alexander Muirhead đã gửi một tín hiệu vô tuyến từ phòng thí nghiệm Clarendon ở Oxford tới một giảng đường

gần đó. Một năm sau, nhà phát minh người Ý Guglielmo Marconi đã truyền các tín hiệu đi được 1,5km, nhờ sử dụng một thiết bị mới mà ông vừa phát minh ra. Chính phủ Ý đã từ chối tài trợ cho việc phát triển tiếp công việc này, do vậy Marconi chuyển đến Anh. Với sự trợ giúp của Bưu điện Anh quốc, chẳng bao lâu ông cải tiến và tăng được khoảng cách truyền lên 16km. Những thí nghiệm được tiến hành sau đó đã dẫn tới định luật Marconi: khoảng cách mà tín hiệu có thể truyền đi được gần như tỉ lệ với bình phương chiều cao của anten phát. Dựng một tháp cao gấp hai lần thì tín hiệu sóng sẽ truyền xa gấp bốn lần. Đây cũng là một tin tốt lành, nó gợi ý rằng việc truyền thông tin đi xa là khả thi. Năm 1897, Marconi đã xây dựng một đài phát tại đảo Wight, Anh quốc, và mở một nhà máy một năm sau đó, sản xuất cái mà ông gọi là "không dây" (*wireless*). Chúng ta vẫn gọi chúng như vậy cho tới tận năm 1952, khi tôi lắng nghe chương trình Goon Show and Dan Dare trên "không dây" ở phòng ngủ của mình, nhưng từ đó chúng ta cũng gọi dụng cụ này là "máy thu thanh" hay "radio." Từ wireless (không dây) dĩ nhiên đã quay trở lại thành mốt, nhưng bây giờ nó chỉ những mối liên kết giữa máy tính và bàn phím, chuột, modem và Internet router, những liên kết không dây, chứ không phải là liên kết giữa máy thu tới một máy phát ở xa. Điều này vẫn được thực hiện bởi radio.

Ban đầu Marconi là chủ các bằng sáng chế chính đối với radio, nhưng ông đã để mất chúng vào tay Tesla sau một cuộc kiện cáo. Tuy nhiên, những phát triển về mặt công nghệ đã nhanh chóng biến những bằng sáng chế này thành cũ rích. Từ năm 1906 tới những năm 1950, linh kiện điện tử quan trọng của một chiếc radio là đèn chân không, nó giống như

một bóng đèn nho nhỏ, do vậy những chiếc radio thường khá lớn và kềnh càng. Transistor, một dụng cụ nhỏ và mạnh hơn rất nhiều được phát minh vào năm 1947 ở Phòng thí nghiệm Bell nhờ một nhóm kỹ sư gồm có William Shockley, Walter Brattain và John Bardeen (xem Chương 14). Tới năm 1954, các radio sử dụng transistor đã được bán trên thị trường, nhưng radio đã không còn giữ được vai trò chính yếu như một phương tiện giải trí nữa.

Vào năm 1953, tôi đã nhìn thấy tương lai. Năm ấy Nữ hoàng Elizabeth II đăng quang và bà dì tôi ở Tonbridge đã có... *một chiếc tivi!* Chúng tôi đã phải chen chúc nhau trong chiếc ôtô ọp ẹp của bố tôi và lặn lội cả 40 dặm để đến xem tường thuật sự kiện ấy. Thật tình là tôi bị ấn tượng bởi chương trình *Bill and Ben the Flowerpot Men* hơn là lễ đăng quang, và từ thời điểm đó, radio không còn là dụng cụ hoàn hảo cho giải trí gia đình nữa. Không lâu sau, rồi chúng ta ai cũng có một chiếc tivi. Bất cứ ai lớn lên với một chiếc tivi màu màn hình phẳng 48 inch, độ phân giải cao (HD) với hàng ngàn kênh có lẽ sẽ ngạc nhiên lắm khi nghe thấy rằng vào những ngày đó hình ảnh chỉ là đen trắng, với màn hình 12 inch, và (trong nước Anh) chỉ có độc mỗi kênh BBC. Khi chúng ta xem TV (*television*), thì đúng nghĩa là nhìn-từ-xa*.

Giải trí chỉ là một trong số những ứng dụng của các sóng vô tuyến. Chúng cũng đóng vai trò quan trọng sống còn đối với quân sự, thông tin liên lạc và một số mục đích khác. Việc phát minh ra radar có lẽ đã giúp quân Đồng minh giành

---

* Ở đây tác giả chơi chữ: television = tele + vision, có nghĩa là xa + nhìn – ND.

thắng lợi trong Thế chiến thứ II. Dụng cụ tuyệt mật này giúp ta phát hiện máy bay, đặc biệt là máy bay của kẻ thù, bằng cách phát ra các tín hiệu vô tuyến để chúng đập vào máy bay đối phương, và phân tích các sóng phản xạ lại. Câu chuyện đồn rằng ăn cà rốt tốt cho thị giác của bạn thực ra có xuất xứ từ việc tung tin trong thời chiến với dụng ý để cho quân Đức không còn thắc mắc tại sao quân Anh lại quá giỏi phát hiện các máy bay ném bom. Radar cũng được sử dụng cả trong thời bình. Nó được những người điều khiển không lưu sử dụng để theo dõi vị trí hiện thời của tất cả các máy bay nhằm ngăn chặn các cuộc va chạm; nó giúp chỉ đường cho máy bay phản lực chở khách đi trong sương mù; nó cảnh báo các phi công về những nhiễu động sắp xảy ra. Các nhà khảo cổ cũng sử dụng radar xuyên đất để xác định những nơi có thể tồn tại các lăng mộ hay các kiến trúc cổ.

Tia X, được Wilhelm Röntgen nghiên cứu một cách có hệ thống lần đầu tiên vào năm 1875, có bước sóng nhỏ hơn nhiều so với ánh sáng. Điều này làm cho chúng mang năng lượng lớn hơn, do vậy chúng có thể đi xuyên qua các vật chắn sáng, đặc biệt là cơ thể con người. Các bác sĩ có thể sử dụng tia X để phát hiện các xương bị gãy và các vấn đề sinh lý học khác, và nó vẫn còn được sử dụng cho tới ngày nay với các phương pháp ngày càng hiện đại tinh xảo hơn, giảm thiểu những ảnh hưởng của các bức xạ có hại đối với bệnh nhân. Các máy chụp X-quang ngày nay có thể tạo ra một bức ảnh ba chiều của cơ thể người, hay một phần của nó, trên máy tính. Các loại máy chụp khác cũng có thể thực hiện công việc như thế, nhưng sử dụng các nguyên lý vật lý khác.

Các sóng viba cũng là những phương tiện hiệu quả để

truyền các tín hiệu điện thoại, và chúng cũng xuất hiện trong các lò vi sóng ở bếp nhà bạn, đó là một phương tiện làm nóng thức ăn một cách nhanh chóng. Một trong những ứng dụng mới nhất của sóng viba là kiểm tra an ninh ở sân bay. Bức xạ terahertz, còn được biết đến dưới cái tên T-sóng, có thể xuyên qua quần áo và thậm chí cả các hốc của cơ thể người. Nhân viên hải quan có thể sử dụng chúng để phát hiện những kẻ buôn lậu thuốc phiện hay những tên khủng bố. Tuy nhiên, việc sử dụng T-sóng cũng ít nhiều gây tranh cãi, bởi vì việc này chẳng khác gì lột trần ra khám, chỉ có điều lột trần bằng điện tử thôi, nhưng có lẽ hầu hết chúng ta đều nghĩ rằng cái giá phải trả ở đây là tương đối nhỏ nếu như điều đó ngăn được một máy bay không bị nổ tung hay cocain không tràn ngập đường phố. T-sóng cũng rất hữu ích đối với các sử gia nghệ thuật, bởi chúng có thể phát lộ các bức bích họa đã bị các lớp vữa che phủ. Những nhà sản xuất và cung cấp dịch vụ thương mại cũng có thể sử dụng T-sóng để kiểm tra các sản phẩm mà không phải lấy chúng ra khỏi vỏ.

Phổ sóng điện từ rất đa năng và hiệu quả đến mức giờ đây có thể nhận thấy ảnh hưởng của nó trong mọi lĩnh vực của hoạt động con người. Nó tạo ra những thứ mà đối với bất kỳ thế hệ nào trước đó dường như là chuyện thần kỳ. Phải có sự đóng góp của rất nhiều người, ở mọi ngành nghề, để biến những khả năng vốn có trong các phương trình toán học thành những tiện ích trong thực tế và các hệ thống thương mại. Nhưng tất cả những thứ đó đều không thể có chừng nào còn chưa có một người nhận ra rằng điện và từ có thể kết hợp để tạo thành một sóng. Toàn bộ cái kho tàng các phương tiện truyền thông hiện đại, từ radio, tivi tới radar và sóng viba liên

kết các điện thoại di động với nhau, khi đó sẽ xuất hiện như một sự tất yếu. Và tất cả đều bắt nguồn từ bốn phương trình và vài dòng cơ bản của giải tích vectơ.

Các phương trình Maxwell không chỉ làm thay đổi thế giới, chúng mở ra cả một thế giới mới.

12 Quy luật và hỗn loạn

Nguyên lý hai của nhiệt động lực học

độ biến thiên — entropy — lớn hơn hoặc bằng — zero

$$dS \geq 0$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?
Mức hỗn loạn trong một hệ nhiệt động luôn tăng.

Tại sao nó lại quan trọng?
Nó đặt ra các giới hạn mà công hữu ích có thể thu được từ nhiệt.

Nó đã dẫn tới những gì?
Nó giúp chế tạo các máy hơi nước có hiệu suất tốt hơn, đánh giá sự hiệu quả của nguồn năng lượng tái tạo, kịch bản về "sự chết nhiệt của vũ trụ", chứng minh rằng vật chất được tạo thành từ các nguyên tử, và các mối liên kết đầy nghịch lý với mũi tên thời gian.

Tháng 5 năm 1959, nhà vật lý đồng thời là tiểu thuyết gia C.P. Snow đã có một bài giảng với nhan đề *Hai nền văn hóa (The Two Cultures)* gây ra tranh cãi dữ dội. Lời đáp lại của nhà phê bình văn học nổi tiếng F.R. Leavis là tiêu biểu cho phe còn lại của cuộc tranh luận; ông đã nói thẳng ra rằng chỉ có *một* nền văn hóa: nền văn hóa của ông. Snow cho rằng khoa học tự nhiên và khoa học nhân văn đã đánh mất mối liên hệ giữa chúng, và lập luận rằng điều này đã làm cho việc giải quyết các vấn đề của nhân loại trở nên rất khó khăn. Ngày nay, chúng ta đang thấy chính vấn đề đó với việc phủ nhận sự thay đổi khí hậu và những cuộc tấn công vào sự tiến hóa. Động lực thì có thể khác nhau, nhưng những rào cản văn hóa đã giúp những điều vô nghĩa như thế phát triển mạnh – mặc dù thực ra chính trị đã điều khiển chúng.

Snow đặc biệt phiền lòng về sự suy thoái của các tiêu chuẩn của giáo dục mà ông đã nhận thấy, Snow viết:

> Đã nhiều lần tôi hiện diện trong đám đông những người mà theo chuẩn mực của văn hóa truyền thống được coi là có học vấn cao, và họ khá thích thú khi tỏ vẻ hoài nghi về sự thiếu hiểu biết của các nhà khoa học. Một hoặc hai lần gì đó, tôi đã bị khiêu khích và đã hỏi họ rằng bao nhiêu người trong số họ có thể mô tả lại Nguyên lý thứ hai của Nhiệt động lực học, một định luật về entropy. Nhưng những gì tôi nhận được là thái độ lạnh lùng, thậm chí là

> tiêu cực. Phải, tôi đã hỏi một câu hỏi tương đương về mặt khoa học của câu hỏi này: bạn đã đọc một tác phẩm nào của Shakespeare chưa?

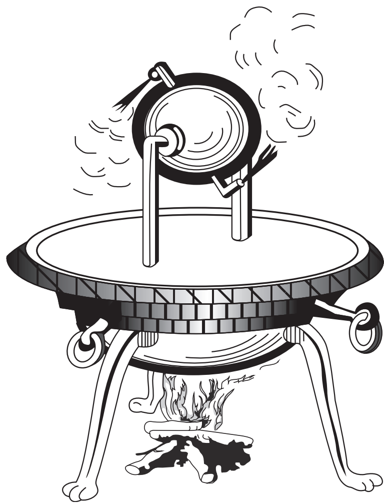
Có lẽ ông cảm thấy rằng mình đã đòi hỏi nhiều – có nhiều nhà khoa học tài năng cũng không thể phát biểu được nguyên lý hai của nhiệt động lực học. Vì vậy, sau đó ông đã nói thêm:

> Bây giờ thì tôi tin rằng thậm chí nếu tôi hỏi một câu đơn giản hơn, chẳng hạn như “Theo ông khối lượng hay gia tốc là gì?”, câu hỏi tương đương với câu “Ông có biết đọc không?” – thì trong số mười người có học vấn cao có không quá một người cảm thấy tôi nói cùng một thứ ngôn ngữ với họ. Tòa lâu đài vĩ đại của vật lý hiện đại đã mọc lên như thế, và phần lớn những người thông minh nhất ở thế giới phương Tây có được hiểu biết sâu sắc về nó cũng chỉ ở mức như những tổ tiên của họ ở thời kỳ đồ đá mới mà thôi.

Theo đúng nghĩa đen của Snow, mục đích của tôi trong chương này là đưa chúng ta ra khỏi thời đại đồ đá mới. Cụm từ “nhiệt động lực học” đã chứa đựng một manh mối: nó dường như có nghĩa là động lực học của nhiệt. Nhiệt mà có thể là động lực sao? Có đấy, nhiệt có thể *chảy*. Nó có thể truyền từ vị trí này tới vị trí khác, từ vật này sang vật khác. Bước ra ngoài trời một ngày đông, bạn sẽ nhanh chóng cảm thấy lạnh. Fourier là người đầu tiên đưa ra một mô hình nghiêm túc về dòng nhiệt và ông cũng đã thiết lập được những phương trình toán học đẹp đẽ về hiện tượng đó (xem Chương 9). Nhưng lý do chính để các nhà toán học quan tâm tới dòng nhiệt là một vật phẩm mới lạ và cực kỳ có ích của công nghệ, đó là máy hơi nước.

Có một câu chuyện thường được kể đi kể lại về James Watt thời còn là một cậu bé, ngồi trong gian bếp của mẹ ông và nhìn thấy nước sôi làm nâng nắp ấm lên, chớp sáng cảm hứng chợt lóe lên trong đầu ông: *hơi nước có thể thực hiện công*. Nhờ đó khi trưởng thành, ông đã phát minh ra máy hơi nước. Đó là sự khơi nguồn cảm hứng, nhưng cũng giống như nhiều câu chuyện huyền thoại khác, câu chuyện này cũng chỉ là phóng đại lên mà thôi. Watt đã không phát minh ra máy hơi nước, và ông cũng chẳng biết đến sức mạnh của hơi nước cho đến khi ông trưởng thành. Kết luận của câu chuyện về sức mạnh của hơi nước là sự thật, nhưng thậm chí ở thời của Watt thì nó cũng là một câu chuyện lỗi thời mất rồi.

Khoảng năm 50 TCN, kiến trúc sư và kỹ sư người La Mã Vitruvius đã mô tả một cỗ máy có tên gọi *aeolipile* trong cuốn *Về kiến trúc* (*De Architectura*) của ông, và một thế kỷ sau đó, nhà toán học, kỹ sư người Hy Lạp, Hero xứ Alexandria đã chế tạo thành công chiếc máy này. Nó bao gồm một quả cầu rỗng có chứa nước bên trong và hai ống ngạnh ra, bẻ cong một góc như trong hình 46. Đốt nóng quả cầu, nước trong đó chuyển hóa thành hơi thoát ra theo hai ống, và phản lực làm cho quả cầu quay. Đây là máy hơi nước đầu tiên, nó chứng tỏ rằng hơi nước có thể thực hiện công, nhưng Hero đã không làm gì với nó ngoài chuyện giúp mọi người giải trí. Thực ra, ông đã chế tạo một cỗ máy tương tự sử dụng không khí nóng trong phòng đóng kín để kéo dây thừng giúp mở cửa các phòng của một ngôi đền. Cỗ máy này có một ứng dụng thực tiễn, nó tạo ra một phép màu tôn giáo, nhưng không phải là một máy hơi nước.



Hình 46 Máy aeolipile của Hero.

Như vậy vào năm 1762, ở tuổi 26, Watt đã biết rằng hơi nước có thể là một nguồn năng lượng. Không phải ông đã khám phá ra điều này khi quan sát ấm nước đang sôi mà do bạn của ông là John Robinson, một giáo sư triết học tự nhiên ở đại học Edinburgh, đã nói với ông về điều đó. Nhưng việc ứng dụng năng lượng của hơi nước đã có từ lâu hơn rất nhiều. Việc khám phá ra nó thường được gán cho kỹ sư, kiến trúc sư người Ý Giovanni Branca, tác giả cuốn *Máy móc* (*Le Machine*) xuất bản năm 1629 chứa 63 bản khắc gỗ các bộ phận của máy. Một trong số đó có khắc một guồng quay sẽ quay quanh trục khi hơi nước phụt ra từ một ống đập vào các khoang của nó. Branca cho rằng chiếc máy này có thể dùng để xay bột mì, đưa nước lên cao, chẻ củi, nhưng có lẽ chưa bao giờ được chế tạo. Nó có vẻ giống với một thí nghiệm tưởng tượng, một mơ ước viển vông giống như chiếc máy bay của Leonard da Vinci.

Cho dù thế nào thì Branca cũng là người đã đi sau Taqi al-Din Muhammad ibn Ma'ruf al-Shami al-Asadi, sống vào khoảng năm 1550 trong đế chế Ottoman, người được biết đến như nhà khoa học vĩ đại nhất trong thời đại của ông.

Những thành tựu của ông rất ấn tượng. Ông nghiên cứu mọi chủ đề, từ chiêm tinh học cho tới động vật học, bao gồm cả việc chế tạo đồng hồ, nghiên cứu dược học, triết học và thần học, và ông đã viết tới hơn 90 cuốn sách. Trong cuốn sách in năm 1551 *Những phương pháp tuyệt vời của những cỗ máy thần thánh (Al-turuq al-samiyya fi al-alat al-ruhaniyya)*, al-Din đã mô tả một turbin hơi nước nguyên thủy, và cho rằng nó có thể được sử dụng để quay một miếng thịt nướng trên một cái xiên.

Động cơ hơi nước đầu tiên mang tính thực tiễn thực sự là một máy bơm nước, được Thomas Savery phát minh vào năm 1698. Chiếc máy đầu tiên thực sự mang lại lợi nhuận thương mại, do Thomas Newcomen chế tạo năm 1712, đã khởi phát Cuộc cách mạng công nghiệp. Nhưng động cơ của Newcomen rất không hiệu quả. Đóng góp của Watt là đưa vào một bình ngưng tụ tách riêng cho hơi nước để giảm thiểu mất mát nhiệt. Được phát triển nhờ sự tài trợ của thương gia Matthew Bolton, kiểu máy mới này chỉ sử dụng một phần tư lượng than đá so với máy cũ, do đó tiết kiệm được những khoản khổng lồ. Chiếc máy của Bolton và Watt được đưa vào sản xuất năm 1775, hơn 220 năm sau khi cuốn sách của al-Din ra đời. Tới năm 1776, ba cỗ máy đã được lắp đặt và sử dụng: một ở mỏ than đá Tipton, một ở xưởng thép Shropshire và một ở London.

Máy hơi nước thực hiện được rất nhiều công việc trong công nghiệp, nhưng lúc đó phổ biến hơn cả là bơm nước từ các hầm mỏ. Phải tốn rất nhiều tiền để xây dựng một khu mỏ, nhưng khi các lớp bên trên được khai thác hết, những người khai thác buộc phải đào sâu hơn xuống lòng đất, và dễ chạm

vào các mạch nước ngầm. Bỏ tiền để bơm nước ra cũng là việc đáng làm, vì một cách lựa chọn khác là đóng cửa hầm mỏ và bắt đầu lại từ đầu ở đâu đó khác – mà việc đó cũng chưa chắc đã khả thi. Nhưng không ai muốn trả tiền nhiều hơn số mà họ cần phải trả, do vậy một nhà sản xuất có thể thiết kế và chế tạo một máy hơi nước hiệu quả hơn thì sẽ làm lũng đoạn thị trường. Câu hỏi cơ bản đặt ra là một động cơ hơi nước hiệu quả đến mức nào thì có thể gây được sự chú ý. Câu trả lời cho câu hỏi này đã làm được nhiều hơn là chỉ mô tả những giới hạn của các động cơ hơi nước: nó tạo ra hẳn một ngành mới của vật lý, với những ứng dụng hầu như vô hạn. Ngành vật lý mới này đã soi sáng mọi thứ từ các chất khí cho tới cấu trúc của toàn thể vũ trụ; nó áp dụng được không chỉ cho vật chất vô sinh của vật lý và hóa học, mà có lẽ còn cho cả các quá trình phức tạp của chính sự sống nữa. Nó được gọi là nhiệt động lực học: tức là sự vận động của nhiệt. Và cũng giống như định luật bảo toàn năng lượng trong cơ học đã loại bỏ các động cơ vĩnh cửu cơ học, các nguyên lý của nhiệt động lực học loại bỏ những động cơ tương tự sử dụng nhiệt.

Một trong những định luật đó, cụ thể là nguyên lý một của nhiệt động lực học, đã phát lộ một dạng năng lượng mới gắn với nhiệt, và mở rộng định luật bảo toàn năng lượng (Chương 3) vào địa hạt mới của động cơ nhiệt. Một định luật khác, chưa từng có tiền lệ, chỉ ra một số khả năng trao đổi nhiệt, tuy không vi phạm định luật bảo toàn năng lượng, nhưng vẫn không thể thực hiện được bởi vì chúng phải tạo ra trật tự từ hỗn loạn. Đó chính là nguyên lý hai của nhiệt động lực học.

Nhiệt động lực học là vật lý toán của các chất khí. Nó giải thích những đặc điểm ở thang lớn như nhiệt độ và áp suất nảy sinh từ cách thức tương tác của các phân tử chất khí. Môn học này bắt đầu với một loạt các định luật của tự nhiên, liên hệ nhiệt độ, áp suất và thể tích. Phiên bản này được gọi là nhiệt động lực học cổ điển, nó không liên quan gì đến các phân tử – vì vào thời điểm đó, rất ít các nhà vật lý tin vào sự tồn tại của chúng. Sau này các định luật về chất khí đã được củng cố bởi một tầng giải thích sâu hơn, dựa trên một mô hình toán học đơn giản, liên quan một cách tường minh với các phân tử. Trong mô hình đó, các phân tử khí được xem như những quả cầu rất nhỏ, va chạm đàn hồi với nhau như những viên bi-a, mà khi va chạm không xảy ra sự mất mát năng lượng. Mặc dù các phân tử không phải là hình cầu nhưng mô hình này đã tỏ ra khá hiệu quả. Nó được gọi là thuyết động học của chất khí, và nó đã dẫn tới việc chứng minh bằng thực nghiệm sự tồn tại của các phân tử.

Những định luật đầu tiên về chất khí xuất hiện cách quãng nhau trong suốt khoảng thời gian gần 50 năm, chủ yếu nhờ công lao của nhà vật lý và hóa học người Ailen Robert Boyle, và hai người Pháp là nhà toán học đồng thời là người tiên phong về khí cầu Jacques Alexandre César Charles và nhà vật lý và hóa học Joseph Louis Gay-Lussac. Tuy nhiên, cũng có nhiều khám phá được tìm ra bởi các nhà khoa học khác. Năm 1834, một kỹ sư và đồng thời là nhà vật lý người Pháp, Émile Clapeyron đã tổng hợp tất cả các định luật nói trên thành một định luật, gọi là định luật khí lý tưởng, có dạng:

$$pV = RT$$

với p là áp suất, V là thể tích, T là nhiệt độ và R là một hằng số. Phương trình này phát biểu rằng áp suất nhân với thể tích

thì tỉ lệ thuận với nhiệt độ. Phải mất rất nhiều công sức với nhiều loại khí khác nhau để xác nhận bằng thực nghiệm từng định luật riêng rẽ, và cả định luật tổng hợp của Clapeyron. Cụm từ "lý tưởng" xuất hiện ở đây vì các chất khí thực không tuân theo định luật này trong mọi tình huống, đặc biệt ở áp lực cao khi các lực nội nguyên tử bắt đầu thể hiện vai trò của chúng. Nhưng phiên bản lý tưởng này đã là đủ tốt đối với việc thiết kế máy hơi nước.

Nhiệt động lực học được cô đúc lại trong một số định luật tổng quát hơn, không liên quan đến dạng chính xác của định luật chất khí. Tuy nhiên, vẫn đòi hỏi phải có một định luật như thế, bởi vì nhiệt độ, áp suất và thể tích không độc lập với nhau. Vẫn cần phải có một mối liên hệ nhất định giữa chúng, nhưng mối liên hệ ấy là gì thì không quá quan trọng.

Nguyên lý một của nhiệt động lực học có nguồn gốc từ định luật bảo toàn năng lượng trong cơ học. Ở chương 3, chúng ta thấy rằng trong cơ học cổ điển có hai dạng năng lượng: động năng xác định bởi khối lượng và tốc độ, và thế năng xác định bởi tác dụng của các lực, như lực hấp dẫn chẳng hạn. Xét riêng rẽ hai dạng năng lượng này thì không có dạng nào bảo toàn cả. Nếu bạn thả một quả bóng, nó sẽ tăng tốc, do vậy động năng của nó tăng. Nhưng quả bóng rơi, nên thế năng của nó giảm. Định luật chuyển động thứ hai của Newton ngụ ý rằng hai sự thay đổi này chính xác triệt tiêu nhau, do vậy tổng năng lượng là không thay đổi trong chuyển động.

Tuy nhiên, câu chuyện không chỉ có thế. Nếu bạn đặt một quyển sách lên bàn và đẩy nó, thế năng của nó không đổi nếu như bàn nằm ngang. Nhưng tốc độ của nó thì thay đổi: sau khi tăng do lực đẩy của bạn tác dụng, quyển sách

sẽ nhanh chóng chuyển động chậm lại và sau cùng là dừng hẳn. Như vậy, động năng của quyển sách ban đầu có một giá trị khác 0 ngay sau khi bị đẩy, và sau đó giảm dần về 0. Nghĩa là tổng năng lượng cũng bị giảm, và vì thế năng lượng không được bảo toàn. Vậy năng lượng đã biến đi đâu? Tại sao quyển sách lại dừng lại? Theo định luật thứ nhất của Newton, quyển sách phải tiếp tục chuyển động, trừ khi có lực cản trở nó. Lực đó là lực ma sát giữa quyển sách với mặt bàn. Nhưng lực ma sát là gì?

Ma sát xuất hiện khi những bề mặt gồ ghề cọ xát với nhau. Bề mặt thô ráp của quyển sách có một số chỗ hơi nhô ra. Chúng cọ xát với những chỗ cũng hơi nhô ra ở bề mặt bàn. Quyển sách chuyển động trên mặt bàn, và mặt bàn chống lại theo định luật thứ ba của Newton. Điều đó tạo ra một lực chống lại chuyển động của quyển sách, do vậy quyển sách chuyển động chậm lại và mất năng lượng. Vậy phần năng lượng ấy mất đi đâu? Cũng có lẽ đơn giản chỉ là định luật bảo toàn năng lượng không áp dụng được. Nhưng, mặt khác, có thể phần năng lượng ấy vẫn còn lẩn khuất đâu đó mà ta không nhận thấy được. Và đây chính là điều mà nguyên lý một của nhiệt động lực học cho ta biết: Phần năng lượng bị mất xuất hiện dưới dạng nhiệt. Cả quyển sách và cái bàn đều nóng lên một chút. Loài người đã biết rằng ma sát sinh ra nhiệt ngay từ khi một người cổ đại thông minh nào đó khám phá ra cách cọ xát hai thanh gỗ với nhau để tạo ra lửa. Nếu bạn bám vào một sợi dây thừng và trượt xuống quá nhanh, tay bạn sẽ bị bỏng do ma sát. Có hằng hà sa số các bằng chứng. Nguyên lý một của nhiệt động lực học khẳng định rằng, nhiệt là một dạng năng lượng, và khái niệm năng lượng được mở rộng ra như thế sẽ được bảo toàn trong các quá trình nhiệt động.

Nguyên lý một của nhiệt động lực học đặt các giới hạn cho những cái bạn có thể làm với một động cơ nhiệt. Lượng động năng mà bạn có thể nhận được, dưới dạng chuyển động, không thể vượt quá lượng năng lượng mà bạn cung cấp cho động cơ dưới dạng nhiệt. Nhưng hóa ra còn có một hạn chế đối với hiệu suất của sự chuyển hóa nhiệt năng thành động năng của một động cơ nhiệt; việc luôn luôn có sự mất mát năng lượng không chỉ là vấn đề thực tiễn, mà còn có cả một giới hạn lý thuyết ngăn cản, không cho phép toàn bộ nhiệt năng chuyển hóa thành chuyển động. Chỉ có một phần trong số đó, cái gọi là năng lượng "tự do", là có thể được chuyển hóa thành động năng. Nguyên lý hai của nhiệt động lực học đã chuyển ý tưởng này thành một định luật tổng quát, nhưng phải đợi thêm một chút thời gian nữa chúng ta mới tiếp cận được điều đó. Giới hạn này được Léonard Sadi Carnot phát hiện ra năm 1824, trong một mô hình đơn giản về sự vận hành của một động cơ nhiệt: chu trình Carnot.

Để hiểu được chu trình Carnot, điều rất quan trọng là phân biệt được nhiệt và nhiệt độ. Trong đời sống thường nhật, chúng ta nói rằng vật nào đó nóng nếu nhiệt độ của nó cao, và do vậy hai khái niệm này dễ bị lẫn lộn. Trong nhiệt động lực học cổ điển, cả hai khái niệm này đều không dễ hiểu. Nhiệt độ là một tính chất của chất lưu, nhưng nhiệt chỉ có ý nghĩa như một thước đo mức trao đổi năng lượng giữa hai chất lưu, và không phải là một tính chất nội tại của trạng thái (như nhiệt độ, áp suất và thể tích) của chất lưu. Trong thuyết động học, nhiệt độ của một chất lưu là động năng trung bình các phân tử của nó, và lượng nhiệt trao đổi giữa các chất lưu là độ biến thiên trong tổng động năng của các phân tử của nó. Theo một nghĩa nào đó thì nhiệt cũng hơi giống với thế năng,

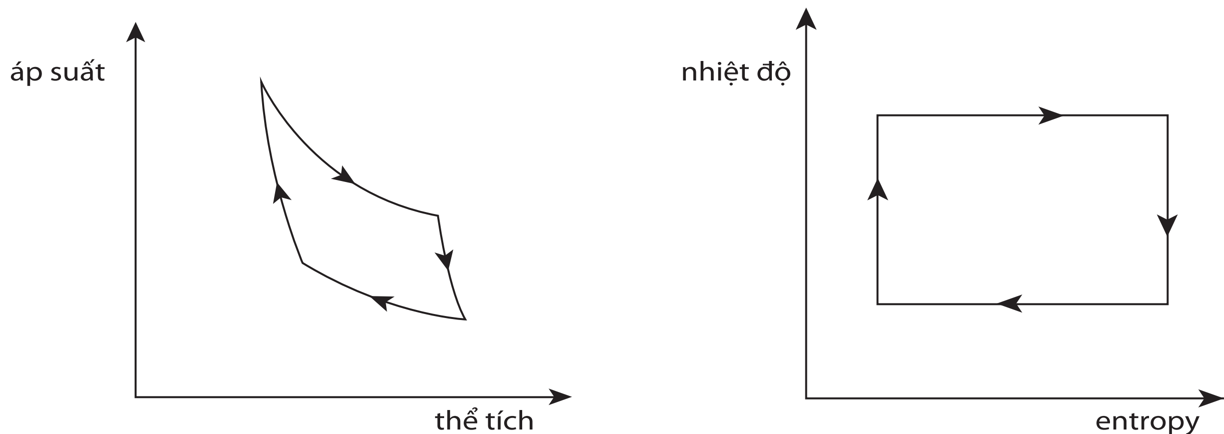
đại lượng được định nghĩa đối với một độ cao quy chiếu bất kỳ, và điều đó dẫn đến việc phải đưa vào một hằng số tùy ý, do vậy thế năng của một vật không được xác định một cách duy nhất. Nhưng khi vật thay đổi độ cao thì hiệu thế năng tương ứng luôn không đổi, bất kể bạn chọn độ cao quy chiếu là thế nào, bởi vì hằng số sẽ bị triệt tiêu. Nói ngắn gọn, nhiệt đo độ thay đổi, nhưng nhiệt độ thì lại đo trạng thái. Hai khái niệm này liên kết với nhau: sự truyền nhiệt là khả dĩ nếu các chất lưu tham gia có nhiệt độ khác nhau, và nếu như thế thì nó sẽ truyền từ vật nóng hơn sang vật lạnh hơn. Kết luận này thường được gọi là nguyên lý không của nhiệt động lực học, bởi vì theo logic, nó xuất hiện trước nguyên lý một, nhưng về mặt lịch sử thì nó lại được nhận biết sau.

Nhiệt độ có thể đo bằng nhiệt kế, dụng cụ khai thác sự giãn nở của chất lưu, như thủy ngân chẳng hạn, do sự tăng nhiệt độ gây ra. Còn nhiệt có thể đo bằng cách sử dụng mối liên hệ giữa nó với nhiệt độ. Trong một chất lưu thử chuẩn, như nước chẳng hạn, để làm tăng nhiệt độ của 1 gam nước lên 1 độ cần phải cung cấp cho nó nhiệt lượng cố định. Lượng nhiệt lượng đó được gọi là nhiệt dung riêng của chất lưu, đối với nước nó bằng 1 calo trên một gam trên một độ. Chú ý rằng sự *tăng* nhiệt là một sự thay đổi, chứ không phải một trạng thái, đúng như đòi hỏi trong định nghĩa của nhiệt.

Chúng ta có thể hình dung chu trình Carnot bằng cách tưởng tượng một bình kín chứa chất khí, với một pittong có thể chuyển động. Chu trình này có bốn bước:

1. Đốt nóng khí rất nhanh nhưng giữ cho nhiệt độ của nó không đổi. Khí sẽ giãn nở, và sinh công đẩy pittong.
2. Cho chất khí giãn nở thêm, giảm áp suất. Khí trở nên lạnh đi.

3. Nén thật nhanh khí trong bình sao cho nhiệt độ của nó không đổi. Pittong sẽ sinh công trên chất khí.
4. Cho chất khí giãn nở thêm, tăng áp suất, chất khí trở về nhiệt độ ban đầu.



Hình 47 Chu trình Carnot. *Trái*: Giản đồ áp suất-thể tích. *Phải*: Giản đồ nhiệt độ-entropy.

Trong một chu trình Carnot, nhiệt năng được cung cấp ở bước thứ nhất truyền động năng cho pittong, cho phép pittong sinh công. Lượng năng lượng chuyển hóa có thể được tính theo lượng nhiệt cung cấp và hiệu nhiệt độ giữa chất khí và môi trường xung quanh. Định lý Carnot chứng tỏ rằng, về nguyên tắc, chu trình Carnot là cách hiệu quả nhất để chuyển hóa nhiệt năng thành công. Điều này đặt một giới hạn nghiêm ngặt cho hiệu suất của bất kỳ động cơ nhiệt nào, đặc biệt là máy hơi nước.

Trong giản đồ biểu diễn áp suất và thể tích của chất khí, một chu trình Carnot trông giống như trong hình 47 (*trái*). Nhà vật lý và toán học người Đức Rudolf Clausius đã khám phá ra một cách đơn giản hơn để hình dung chu trình này, như hình 47 (*phải*). Bây giờ hai trục tọa độ biểu diễn nhiệt độ cùng một đại lượng mới và cơ bản có tên là *entropy*. Trong hệ

trục tọa độ này, chu trình Carnot có dạng một hình chữ nhật, và lượng công thực hiện được chính là diện tích của hình chữ nhật đó.

Entropy cũng giống như nhiệt: nó được định nghĩa theo độ thay đổi của trạng thái, chứ không phải như một trạng thái. Giả sử một chất lưu đang ở trạng thái ban đầu nào đó thì chuyển sang một trạng thái mới. Khi đó hiệu entropy giữa hai trạng thái bằng tổng độ biến thiên của đại lượng "nhiệt chia cho nhiệt độ". Dưới dạng ký hiệu, đối với một bước nhỏ dọc theo một quá trình nối hai trạng thái, entropy S liên hệ với nhiệt q và nhiệt độ T bởi phương trình vi phân $\mathrm{d}S = \mathrm{d}q/T$. Như vậy, độ biến thiên của entropy chính là độ biến thiên của nhiệt trên một đơn vị nhiệt độ. Một sự thay đổi lớn của trạng thái có thể được biểu diễn bằng một chuỗi các bước nhỏ, do đó chúng ta có thể cộng những độ biến thiên nhỏ ấy lại để nhận được độ biến thiên toàn phần của entropy. Giải tích toán cho ta biết cách làm điều đó bằng cách sử dụng tích phân[1].

Một khi đã định nghĩa được entropy, nguyên lý hai của nhiệt động lực học trở nên rất đơn giản. Nó phát biểu rằng trong bất kỳ quá trình nhiệt động khả thi nào, entropy của một hệ cô lập phải luôn tăng[2], hay dưới dạng ký hiệu: $\mathrm{d}S \geq 0$. Ví dụ, giả sử chúng ta chia một căn phòng nhờ một vách ngăn có thể di chuyển được, rồi dẫn khí oxy vào một ngăn và nitơ vào ngăn kia. Mỗi chất khí có một entropy cụ thể đối với một trạng thái quy chiếu ban đầu nào đó. Bây giờ bỏ vách ngăn ấy đi để các chất khí trộn lẫn với nhau. Hệ tổng hợp mới cũng có một entropy cụ thể đối với chính trạng thái quy chiếu ban đầu. Và entropy của hệ tổng hợp luôn luôn lớn hơn tổng entropy của hai khí riêng rẽ lúc đầu.

Nhiệt động lực học cổ điển là hiện tượng luận: nó mô tả những gì bạn có thể đo, nhưng nó không dựa trên một lý thuyết nhất quán nào về các quá trình tham gia trong đó. Bước này xuất hiện kế tiếp thuyết động học của chất khí, mà Daniel Bernoulli là người đi tiên phong vào năm 1738. Thuyết này cung cấp một giải thích vật lý cho các đại lượng áp suất, nhiệt độ, các định luật của chất khí, và đại lượng entropy đầy bí ẩn. Ý tưởng cơ bản – gây rất nhiều tranh cãi ở thời đó – là: một chất khí bao gồm một số lượng lớn các phân tử giống nhau, chuyển động trong không gian và thi thoảng va chạm với nhau. Là một chất khí có nghĩa là các phân tử không bị nén quá chặt với nhau, do vậy phần lớn thời gian, các phân tử chuyển động thẳng qua chân không của không gian với vận tốc không đổi. (Tôi nói "chân không" mặc dù chúng ta đang thảo luận về một chất khí, bởi vì không gian giữa các phân tử là chân không). Vì các phân tử, mặc dù rất nhỏ, vẫn có kích thước khác 0, nhưng chỉ thỉnh thoảng hai trong số chúng mới va chạm với nhau. Thuyết động học đã đưa ra một giả thiết đơn giản hóa rằng chúng va chạm với nhau như hai viên bi-a đàn hồi tuyệt đối, do vậy không xảy ra mất mát năng lượng khi va chạm. Ngoài những điều khác ra thì điều này ngụ ý rằng các phân tử sẽ va chạm mãi mãi.

Khi Bernoulli đưa ra mô hình này lần đầu tiên, định luật bảo toàn năng lượng vẫn chưa được xác lập, và tính đàn hồi tuyệt đối dường như là điều không thể có. Nhưng thuyết này cũng dần nhận được sự ủng hộ của một số ít các nhà khoa học, họ đã phát triển các phiên bản của riêng họ và thêm vào nhiều ý tưởng mới, nhưng những công trình của họ hầu như chẳng mấy ai để mắt tới. Nhà hóa học và vật lý học người Đức August Krönig đã viết một cuốn sách về chủ đề này vào năm

1856, ông đã đơn giản hóa vật lý sử dụng trong đó bằng cách hạn chế không cho các phân tử quay. Một năm sau, Clausius bỏ đi sự đơn giản hóa này. Ông tuyên bố ông đã tìm ra kết quả của mình một cách độc lập, và giờ đây ông được xếp hạng như một trong những người sáng lập quan trọng đầu tiên của thuyết động học. Ông đã đề xuất một trong những khái niệm cốt yếu của lý thuyết này, đó là khái niệm quãng đường tự do trung bình của một phân tử: về trung bình, nó di chuyển được bao xa sau những va chạm liên tiếp.

Cả Krönig và Clausius đều đã rút ra định luật khí lý tưởng từ thuyết động học. Ba biến số then chốt là thể tích, áp suất và nhiệt độ. Thể tích được xác định bởi bình chứa chất khí, nó thiết lập "các điều kiện biên" có ảnh hưởng tới cách hành xử của chất khí, nhưng nó không phải một đặc điểm của chất khí. Áp suất là lực tác dụng trung bình (trên một đơn vị diện tích) gây ra bởi các phân tử của chất khí khi chúng va chạm với thành bình. Nó phụ thuộc vào việc có bao nhiêu phân tử trong bình, và các phân tử ấy chuyển động nhanh chậm thế nào (chúng không chuyển động với cùng một tốc độ). Biến số thú vị nhất là nhiệt độ. Nó cũng phụ thuộc vào việc các phân tử chất khí chuyển động nhanh chậm thế nào, và nó tỉ lệ với động năng trung bình của các phân tử. Việc rút ra định luật Boyle, trường hợp đặc biệt của định luật khí lý tưởng cho quá trình đẳng nhiệt, là đặc biệt dễ dàng. Ở một nhiệt độ cố định, phân bố vận tốc không thay đổi, do vậy áp suất được xác định bởi số lượng các phân tử va chạm với thành bình. Nếu bạn giảm thể tích, số lượng các phân tử trên một đơn vị thể tích tăng lên, do vậy cơ may để một phân tử va chạm với thành bình cũng tăng lên. Thể tích nhỏ đi có nghĩa là mật độ chất khí tăng lên, tức là có nhiều phân tử va chạm với thành bình

hơn, và lập luận này có thể chuyển thành dạng định lượng được. Lập luận tương tự nhưng phức tạp hơn cho phép ta rút ra định luật khí lý tưởng với toàn bộ sự đẹp đẽ của nó, chừng nào các phân tử còn không bị ép vào nhau quá chặt. Như vậy, bây giờ chúng ta đã có một cơ sở lý thuyết sâu sắc hơn cho định luật Boyle, dựa trên lý thuyết các phân tử.

Được các công trình của Clausius truyền cảm hứng, năm 1859, Maxwell đã đặt ra cơ sở toán học cho thuyết động học chất khí, bằng cách viết ra công thức tính xác suất để một phân tử chuyển động với một tốc độ cho trước dựa trên phân bố chuẩn hay đường cong hình chuông (xem Chương 7). Công thức của Maxwell có vẻ là ví dụ đầu tiên về một định luật vật lý dựa trên xác suất. Tiếp bước Maxwell là nhà vật lý người Áo Ludwig Boltzmann, người cũng đã rút ra chính công thức đó, ngày nay nó được gọi là phân bố Maxwell-Boltzmann. Boltzmann đã giải thích lại nhiệt động lực học theo thuyết động học chất khí, từ đó đặt nền tảng cho một ngành mà ngày nay được gọi là cơ học thống kê. Đặc biệt, ông đã đưa ra một giải thích mới cho entropy, bằng cách liên hệ khái niệm nhiệt động này với đặc điểm thống kê của các phân tử trong chất khí.

Những đại lượng truyền thống của nhiệt động lực học như nhiệt độ, áp suất, nhiệt và entropy, tất cả đều có liên quan tới những tính chất trung bình ở thang lớn của chất khí. Tuy nhiên, cấu trúc tinh tế bao gồm rất nhiều các phân tử chuyển động hỗn loạn và va chạm vào nhau. Một trạng thái ở thang lớn có thể phát sinh từ vô số những trạng thái khác nhau ở thang nhỏ, bởi vì những khác biệt nhỏ ở những thang nhỏ khi lấy trung bình sẽ triệt tiêu nhau. Bởi vậy Boltzmann đã phân biệt các trạng thái vĩ mô (vĩ thái) và các trạng thái vi mô

(vi thái) của hệ: tức những trung bình ở thang lớn và những trạng thái thực của các phân tử. Sử dụng điều này, ông đã chứng tỏ được rằng entropy, một vĩ thái, có thể được giải thích như một đặc điểm thống kê của các vi thái. Ông biểu diễn điều này dưới dạng phương trình

$$S = k \log W$$

với S là entropy của hệ, W là số các vi thái phân biệt tạo nên vĩ thái và k là một hằng số. Ngày nay nó được gọi là hằng số Boltzmann, và có giá trị là $1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K.

Đây là công thức tạo động lực cho việc giải thích entropy như một thước đo sự hỗn loạn. Ý tưởng ở đây là: số các vi thái ứng với một vĩ thái có trật tự ít hơn số vi thái ứng với vĩ thái hỗn loạn, và chúng ta có thể hiểu tại sao lại như thế bằng cách suy luận từ một bộ bài. Để đơn giản, giả sử rằng chúng ta chỉ có sáu lá bài, đánh số 2, 3, 4, J, Q, K. Xếp chúng thành hai chồng khác nhau, với những lá có giá trị nhỏ (2, 3, 4) vào một chồng và các quân bài tiên (J, Q, K) vào một chồng. Đây là một sắp đặt có trật tự. Thực tế, nó vẫn giữ lại các dấu vết của trật tự nếu bạn tráo các lá bài nhưng vẫn giữ cho hai chồng tách biệt, bởi vì cho dù bạn làm gì đi nữa, những lá bài có giá trị nhỏ vẫn sẽ ở một chồng và những lá bài tiên vẫn ở chồng còn lại. Nhưng nếu bạn tráo cả hai chồng với nhau, hai loại lá bài sẽ được trộn lẫn, với cách sắp xếp như 4QK2J3, chẳng hạn. Trực quan mà nói, cách sắp xếp trộn lẫn như thế này sẽ hỗn loạn hơn.

Chúng ta hãy cùng xem điều đó liên quan đến công thức Boltzmann như thế nào. Có 36 cách sắp các lá bài thành hai chồng: mỗi chồng ba lá. Nhưng có tới 720 cách ($6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$) để sắp tất cả sáu lá bài đó theo thứ

tự. Kiểu sắp xếp các lá bài mà chúng ta cho phép – hai chồng hay một chồng – tương tự với vĩ thái của một hệ nhiệt động. Trật tự chính xác là vi thái. Vĩ thái trật tự hơn có 36 vi thái, còn vĩ thái ít trật tự hơn thì có tới 720 vi thái. Do vậy càng có nhiều vi thái thì vĩ thái tương ứng càng trở lên kém trật tự hơn. Bởi vì logarit sẽ lớn khi số lấy logarit lớn, do đó logarit của số các vi thái càng lớn thì vĩ thái tương ứng càng hỗn loạn. Trong trường hợp đang xét:

$$\log 36 = 3,58 \qquad \log 720 = 6,58$$

Đó chính là entropy của hai vĩ thái. Hằng số Boltzmann chỉ làm co dãn các giá trị cho phù hợp với hình thức luận của nhiệt động lực học khi chúng ta làm việc với các chất khí.

Hai chồng lá bài cũng giống với hai trạng thái nhiệt động không tương tác, ví như một hộp với vách ngăn phân cách hai chất khí. Entropy của từng chồng đều là log 6, do vậy tổng entropy của cả hệ là 2log 6, bằng log 36. Do đó logarit làm cho entropy có tính chất *cộng được* đối với những hệ không có tương tác với nhau: để tính entropy của cả hệ tổng hợp (nhưng vẫn không có tương tác), ta cộng các entropy của từng phần riêng biệt. Nếu bây giờ chúng ta để cho hệ tương tác (bỏ đi vách ngăn), entropy sẽ tăng thành log 720.

Càng có nhiều lá bài tham gia, hiệu ứng này càng trở nên rõ rệt hơn. Chia một bộ bài chuẩn 52 lá thành hai chồng, với tất cả lá bài có màu đỏ vào một chồng và các lá có màu đen vào chồng còn lại. Cách sắp đặt này có thể được thực hiện bằng $(26!)^2$ cách, tức là khoảng $1,62 \times 10^{53}$ cách. Tráo hai chồng bài này với nhau, ta có 52! vi thái xấp xỉ $8,07 \times 10^{67}$. Giá trị logarit của chúng lần lượt là 122,52 và 156,36, và một lần nữa, giá trị đứng sau lại lớn hơn.

Những ý tưởng của Boltzmann không được đón nhận một cách nồng nhiệt. Ở cấp độ kỹ thuật, nhiệt động lực học vấp phải những vấn đề khó khăn về mặt khái niệm. Một trong số đó là ý nghĩa chính xác của thuật ngữ "trạng thái vi mô" hay "vi thái". Vị trí và vận tốc của một phân tử là các biến liên tục, có thể nhận vô số các giá trị, nhưng Boltzmann cần một số hữu hạn các vi thái để có thể đếm được chúng có bao nhiêu và lấy logarit. Do đó cần rời rạc hóa thô các biến này bằng cách tách *continuum* của các giá trị khả dĩ thành một số hữu hạn các khoảng rất nhỏ. Một vấn đề khác, về bản chất có tính triết học hơn, đó là mũi tên thời gian – một sự xung đột biểu kiến giữa động lực học thuận nghịch theo thời gian của các vi thái và thời gian chỉ trôi theo một chiều của các vĩ thái, xác định bởi sự tăng entropy. Hai vấn đề này có liên quan tới nhau, như chúng ta sẽ thấy ngay dưới đây.

Tuy nhiên, cản trở lớn nhất để chấp nhận lý thuyết này là ý tưởng cho rằng vật chất được tạo thành từ các hạt cực kỳ nhỏ bé, các nguyên tử. Khái niệm này, và thuật ngữ nguyên tử, có nghĩa là "không phân chia được nữa", khởi nguồn từ Hy Lạp cổ đại, nhưng thậm chí cho tới những năm 1900, hầu hết các nhà vật lý đều không tin rằng vật chất được cấu thành từ các nguyên tử. Do vậy, họ cũng không tin vào các phân tử, và đối với họ, một lý thuyết của các chất khí dựa trên phân tử rõ ràng là vô nghĩa. Maxwell, Boltzmann và những nhà tiên phong của thuyết động học chất khí đã nhận thức được rằng các nguyên tử và phân tử là có thật, nhưng với những người hoài nghi, thuyết nguyên tử chỉ là một cách thuận tiện để hình dung vật chất mà thôi. Chưa có nguyên tử nào được quan sát thấy, do vậy không có bằng chứng khoa học nào cho sự tồn tại của chúng. Tương tự như vậy, các phân tử, những

tổ hợp cụ thể của các nguyên tử, cũng gây tranh cãi. Đúng là thuyết nguyên tử phù hợp với tất cả các dữ liệu thực nghiệm trong hóa học, nhưng đó không phải là bằng chứng xác nhận các nguyên tử tồn tại.

Một trong những điều cuối cùng đã thuyết phục hầu hết những người phản đối chính là việc sử dụng thuyết động học để đưa ra các tiên đoán về chuyển động Brown. Hiệu ứng này được tìm ra bởi nhà thực vật học người Scotland, Robert Brown[3]. Ông là người đi tiên phong trong việc sử dụng kính hiển vi, và bên cạnh những công trình khác, ông đã khám phá ra sự tồn tại của nhân tế bào, ngày nay nó được biết đến là nơi chứa các thông tin di truyền. Năm 1827, Brown đã dùng kính hiển vi quan sát các hạt phấn hoa lơ lửng trong chất lỏng, và ông phát hiện ra những hạt thậm chí còn nhỏ hơn nữa bị bật ra từ các hạt phấn hoa. Những hạt nhỏ bé này chuyển động lắc lư nhẹ một cách ngẫu nhiên. Thoạt đầu, Brown băn khoăn tự hỏi không biết đó có phải là một dạng nhỏ bé của sự sống hay không. Tuy nhiên, những thí nghiệm tiếp theo cho thấy đối với các hạt được lấy ra từ một vật chất vô sinh, ông cũng nhận được cùng một hiệu ứng như vậy, do đó bất kể là nguyên nhân gì đã gây ra chuyển động đưa đẩy ấy, thì những hạt đó cũng không phải là sự sống. Ở thời điểm đó, không ai biết điều gì đã gây ra hiệu ứng này. Bây giờ thì chúng ta biết rằng những hạt nhỏ bị đẩy ra từ những hạt phấn hoa đó là các bào quan, các hệ con rất nhỏ của tế bào với những chức năng cụ thể khác nhau; trong trường hợp này là sản xuất tinh bột và chất béo. Và chúng ta giải thích những đưa đẩy ngẫu nhiên của chúng như là bằng chứng cho thuyết vật chất cấu thành từ các nguyên tử.

Mối liên kết với các nguyên tử đến từ những mô hình toán học của chuyển động Brown xuất hiện lần đầu trong công trình về thống kê của nhà thiên văn học và thống kê người Đan Mạch, Thorvald Thiele năm 1880. Bước tiến lớn được thực hiện bởi Einstein vào năm 1905, và nhà khoa học người Ba Lan Marian Smoluchowski năm 1906. Một cách độc lập, họ đề xuất một giải thích vật lý cho chuyển động Brown: các nguyên tử của chất lỏng mà các hạt phấn hoa lơ lửng trong đó, ngẫu nhiên đập vào các hạt này và đẩy nhẹ nó. Dựa trên cơ sở này, Einstein sử dụng một mô hình toán học để đưa ra các tiên đoán định lượng về thống kê của chuyển động, đã được Jean Baptiste Perrin xác nhận vào các năm 1908-1909.

Boltzmann đã tự vẫn vào năm 1906 – ngay khi cộng đồng khoa học bắt đầu đánh giá cơ sở lý thuyết của ông là thực tế.

Trong phát biểu nhiệt động lực học của Boltzmann, các phân tử của một chất khí cũng giống như các lá bài trong một bộ bài, và động lực học tự nhiên của các phân tử thì tương tự như sự xáo bài. Giả sử rằng ở một thời điểm nào đó tất cả các phân tử oxy trong phòng tập trung lại một đầu và tất cả các phân tử nitơ tập trung vào đầu kia. Đây là một trạng thái nhiệt động có tính trật tự, giống như hai chồng các lá bài. Tuy nhiên, sau một khoảng thời gian rất ngắn, những va chạm ngẫu nhiên sẽ trộn lẫn các phân tử với nhau, khá đồng đều xuyên suốt căn phòng, giống như xáo bài vậy. Chúng ta vừa mới thấy rằng quá trình này sẽ làm tăng entropy. Đây là bức tranh chính thống về sự tăng không ngừng nghỉ của entropy, và đó cũng là sự giải thích chuẩn mực của nguyên lý hai: "Mức độ hỗn loạn trong vũ trụ của chúng ta luôn luôn tăng". Tôi khá chắc chắn rằng sự đặc trưng hóa này của nguyên lý

hai sẽ làm hài lòng Snow nếu ai đó cho ông ta biết. Dưới dạng này, một hệ quả bi kịch của nguyên lý hai chính là kịch bản về "sự chết nhiệt của vũ trụ", trong đó toàn thể vũ trụ cuối cùng sẽ trở thành một thứ khí âm ấm mà không có một cấu trúc thú vị nào cả.

Entropy, và hình thức luận toán học đi cùng với nó đã cung cấp một mô hình tuyệt vời cho rất nhiều thứ. Nó giải thích tại sao các động cơ nhiệt chỉ có thể đạt mức hiệu suất nhất định, ngăn ngừa việc lãng phí thời gian và tiền bạc quý giá của các kỹ sư trong việc đi tìm một phát kiến hão huyền. Nó không chỉ đúng với các máy hơi nước thời Victoria, mà còn áp dụng được cho cả các động cơ ôtô hiện đại nữa. Thiết kế động cơ luôn là một trong những lĩnh vực thực tiễn nhận được nhiều lợi ích từ những hiểu biết về các định luật của nhiệt động lực học. Tủ lạnh là một ví dụ khác. Chúng sử dụng các phản ứng hóa học để rút nhiệt ra khỏi đồ ăn trong tủ. Lượng nhiệt đó phải thoát ra đâu đó chứ: bạn có thể cảm thấy nhiệt tỏa ra ở bên ngoài vỏ động cơ của tủ lạnh. Điều tương tự cũng xảy ra với điều hòa nhiệt độ. Máy phát điện là một ứng dụng khác nữa. Trong các nhà máy điện chạy bằng than, khí đốt hay năng lượng hạt nhân, nhiệt chính là thứ được sinh ra đầu tiên. Rồi nhiệt tạo ra hơi nước làm quay turbin. Và dựa trên các nguyên lý có từ thời Faraday, turbin lại biến chuyển động thành điện.

Nguyên lý hai của nhiệt động lực học cũng chi phối lượng năng lượng mà chúng ta hy vọng có thể trích ra từ những nguồn tái tạo được, như là gió hay sóng. Sự biến đổi khí hậu đã làm cho vấn đề này trở nên cấp bách hơn, bởi vì những nguồn năng lượng tái tạo được tạo ra ít dioxide carbon hơn những nguồn năng lượng thông thường. Thậm chí năng

lượng hạt nhân cũng mang những dấu ấn lớn của carbon, bởi vì cần phải tạo ra nhiên liệu, phải vận chuyển, và lưu trữ khi chúng không còn hữu ích nữa nhưng vẫn còn tính phóng xạ. Khi tôi ngồi viết những dòng này thì đang có một cuộc tranh luận sôi nổi về lượng năng lượng lớn nhất chúng ta có thể thu được từ đại dương và bầu khí quyển mà không gây ra những biến đổi mà chúng ta đang cố gắng lảng tránh. Việc này dựa trên những đánh giá nhiệt động lực học của lượng năng lượng tự do trong các hệ thống tự nhiên đó. Đây là một vấn đề quan trọng: nếu những nguồn năng lượng tái tạo *về nguyên tắc* không thể cung cấp đủ năng lượng mà chúng ta cần, thì chúng ta phải đi tìm ở đâu đó khác. Các tấm pin Mặt Trời lấy năng lượng trực tiếp từ ánh sáng Mặt Trời, không bị ảnh hưởng trực tiếp bởi những giới hạn nhiệt động lực học, nhưng dù vậy, chúng vẫn phải liên quan tới các quá trình sản xuất, v.v. Ở thời điểm hiện nay, trường hợp mà những giới hạn ấy là một trở ngại nghiêm trọng đều dựa trên một số đơn giản hóa bao quát, và cho dù nếu chúng là đúng đắn đi nữa, thì những tính toán ấy cũng không loại trừ các nguyên liệu tái tạo như một nguồn có thể cung cấp hầu hết nhu cầu năng lượng trên thế giới. Nhưng cũng cần nhớ rằng, những tính toán tương tự về sự sản sinh ra dioxide carbon, được thực hiện vào thập niên 50 của thế kỷ trước, đã được chứng minh là chính xác một cách đáng ngạc nhiên như một lời tiên tri về sự nóng lên toàn cầu.

Nguyên lý hai đã vận hành xuất sắc trong bối cảnh ban đầu của nó, cụ thể là hành vi của các chất khí, nhưng dường như nó lại mâu thuẫn với những sự phong phú trên hành tinh của chúng ta, đặc biệt là sự sống. Dường như nó đã loại bỏ những phức tạp và tính tổ chức được bộc lộ trong những hệ sinh

vật. Vì vậy đôi khi nguyên lý hai được viện dẫn để tấn công thuyết tiến hóa của Darwin. Tuy nhiên, vật lý của các động cơ hơi nước không đặc biệt thích hợp đối với những nghiên cứu về sự sống. Trong thuyết động học chất khí, các lực tác dụng lên các phân tử có tầm tác dụng ngắn (chỉ tác dụng khi các phân tử va chạm nhau) và là lực đẩy (các phân tử nẩy ra sau va chạm). Nhưng hầu hết các lực của tự nhiên lại không như thế. Chẳng hạn, lực hấp dẫn vẫn tác dụng ở những khoảng cách khổng lồ, và nó là lực hút. Sự giãn nở của vũ trụ kể từ Big Bang đã không làm loãng vật chất ra thành một khí đồng đều. Thay vì thế, vật chất lại tạo thành các khối kết – các hành tinh, sao, thiên hà, các cụm siêu thiên hà... Những lực đã giữ cho các phân tử liên kết với nhau cũng là lực hút – chỉ trừ khi ở những khoảng cách rất nhỏ chúng chuyển thành lực đẩy, giúp ngăn các phân tử không co sập lại – nhưng tầm tác dụng của chúng cũng khá ngắn. Đối với những hệ như vậy, mô hình nhiệt động lực học của những hệ con độc lập, mà trong đó các tương tác chỉ xuất hiện nhưng không mất đi đơn giản là không phù hợp. Những đặc điểm của nhiệt động lực học cũng không áp dụng được, hoặc quá dài khiến chúng không mô hình hóa được thứ gì thú vị cả.

Các định luật của nhiệt động lực học làm cơ sở cho rất nhiều vấn đề mà chúng ta cho là một sự tất nhiên. Sự giải thích entropy như là "mức độ hỗn loạn" giúp chúng ta hiểu những định luật này và có được cảm quan về những cơ sở vật lý của chúng. Tuy nhiên, cũng có những trường hợp, việc giải thích entropy như là mức độ hỗn loạn dường như lại dẫn tới các nghịch lý. Đây là một lĩnh vực mang nhiều tính triết học của diễn ngôn – và nó rất hấp dẫn.

Một trong những bí ẩn sâu kín nhất của vật lý là mũi tên thời gian. Thời gian dường như chỉ trôi theo một chiều nhất định. Tuy nhiên, về mặt toán học và logic thì thời gian có thể trôi ngược lại – một khả năng đã được một số cuốn sách khai thác chẳng hạn như *Mũi tên thời gian* (*Time's Arrow*) của Martin Amis, hay cuốn tiểu thuyết ra đời sớm hơn rất nhiều của Philipp K. Dick *Thế giới ngược chiều đồng hồ* (*Counter Clock World*), và bộ phim truyền hình nhiều tập *Sao lùn đỏ* (*Red Dwarf*) của đài BBC, mà các nhân vật chính trong đó đã có cuộc nhậu nhẹt đáng nhớ rồi cãi lộn lẫn nhau trong quầy bar với thời gian chảy ngược. Vậy tại sao thời gian không thể trôi theo chiều ngược lại? Thoạt nhìn, nhiệt động lực học đã đưa ra một giải thích đơn giản cho mũi tên thời gian: chiều tăng của entropy. Các quá trình của nhiệt động lực học là bất thuận nghịch: oxy và nitơ sẽ tự phát trộn lẫn với nhau, nhưng chúng sẽ không bao giờ tự phát tách ra khỏi nhau.

Tuy nhiên, ở đây có một câu đố, bởi vì bất kỳ một hệ cơ học cổ điển nào, như hệ các phân tử trong một căn phòng, cũng thuận nghịch về thời gian. Nếu bạn tiếp tục xáo bộ bài một cách ngẫu nhiên, cuối cùng nó sẽ được sắp xếp lại theo thứ tự ban đầu của nó. Dưới dạng các phương trình toán học, nếu ở một thời điểm nào đó vận tốc của tất cả các hạt đồng thời đảo chiều, thì hệ đó sẽ lần ngược trở lại các bước chân của nó, tức là từ sau đến trước theo thời gian. Toàn thể vũ trụ cũng có thể nảy ngược trở lại, tức là tuân theo chính những phương trình ấy theo cả hai chiều. Vậy thì vì sao chúng ta chưa từng thấy một quả trứng bị đánh tơi lại tự quay trở lại trạng thái ban đầu lành lặn của nó?

Câu trả lời thường thấy của nhiệt động lực học là: một quả

trứng bị đánh tơi thì mất trật tự hay hỗn loạn hơn quả trứng lành lặn, nên entropy tăng, và đó là chiều trôi của thời gian. Nhưng còn có một nguyên nhân tinh vi hơn giải thích tại sao quả trứng không lành lặn trở lại: vũ trụ thì rất, rất không thể nảy ngược trở lại theo cách được yêu cầu. Xác suất để xảy ra chuyện này nhỏ tới mức nực cười. Do vậy sự không nhất quán giữa sự tăng entropy và tính thuận nghịch của thời gian là do các điều kiện ban đầu chứ không phải do các phương trình. Những phương trình chuyển động của các phân tử là thuận nghịch theo thời gian, nhưng các điều kiện ban đầu thì không. Khi chúng ta đảo ngược thời gian, chúng ta phải sử dụng những điều kiện "ban đầu" được cho bởi trạng thái *cuối cùng* của chuyển động hướng về phía trước theo thời gian.

Ở đây sự khác biệt quan trọng nhất là giữa đối xứng của các phương trình và đối xứng của các nghiệm của chúng. Các phương trình của những phân tử nảy ngược trở lại có đối xứng thuận nghịch theo thời gian, nhưng các nghiệm riêng rẽ thì có thể có một mũi tên thời gian xác định. Từ tính thuận nghịch thời gian của phương trình, nhiều lắm thì bạn cũng chỉ có thể suy ra rằng nếu có một nghiệm thì phải tồn tại một nghiệm *khác* có thời gian đảo ngược so với nghiệm ban đầu. Nếu Alice ném một quả bóng tới Bob, thì nghiệm đảo chiều theo thời gian sẽ là Bob ném quả bóng đó tới Alice. Tương tự như vậy, vì các phương trình của cơ học cho phép một cái bình hoa có thể rơi xuống nền và vỡ tan thành hàng ngàn mảnh, nên chúng cũng phải cho phép một nghiệm, trong đó hàng ngàn mảnh vỡ ấy đồng thời chuyển động tới gần nhau một cách thần bí, rồi tự lắp ghép lại thành cái bình lành lặn, và tự nhảy lên trong không khí.

Rõ ràng là có một điều gì đó khôi hài diễn ra ở đây, và nó đòi hỏi chúng ta phải xem xét lại. Chúng ta không hề vấp phải vấn đề gì trong chuyện tung bóng qua lại giữa Bob và Alice. Những chuyện như thế chúng ta thấy mỗi ngày. Nhưng chúng ta không thấy chiếc bình vỡ thành ngàn mảnh tự ghép lại và nhảy lên bàn. Chúng ta cũng không thấy quả trứng bị đánh tơi lành lặn trở lại.

Giả sử chúng ta làm vỡ chiếc bình và quay phim lại. Chúng ta bắt đầu từ một trạng thái đơn giản, có trật tự – một chiếc bình lành lặn. Rồi nó rơi xuống nền nhà, và hệ quả là nó vỡ thành hàng ngàn mảnh và bắn tung tóe. Chúng chuyển động chậm lại và dừng hẳn. Toàn bộ trông đều rất bình thường. Bây giờ cho quay ngược bộ phim lại. Từng mảnh vỡ bé nhỏ, có hình dạng phù hợp để có thể ghép khít lại với nhau, đều đang nằm trên sàn nhà. Một cách tự phát, chúng bắt đầu chuyển động và chuyển động với tốc độ thích hợp, cũng như có hướng thích hợp, để tới gặp nhau. Rồi chúng ghép lại thành một chiếc bình, sau đó chuyển động hướng lên trên. Điều này xem ra không đúng.

Thực tế, như đã mô tả, điều đó không đúng. Dường như một số định luật cơ học đã bị vi phạm, trong số đó có định luật bảo toàn động lượng và định luật bảo toàn năng lượng. Các vật có khối lượng đang nằm yên thì không thể đột nhiên chuyển động được. Một chiếc bình không thể tự lấy năng lượng từ hư không và nâng mình lên trong không khí.

À, phải,... nhưng đó là do chúng ta đã không xem xét đủ cẩn thận. Chiếc bình đó không tự nâng mình lên không khí được. Chính nền nhà đã bắt đầu dao động, và những dao động đó đã hợp sức tạo ra một cú đẩy mạnh làm cho chiếc bình bay

lên không trung. Tương tự như vậy, các mảnh vỡ nhỏ ấy đã bị sóng tới từ dao động của sàn nhà ép phải chuyển động. Nếu chúng ta lần ngược trở lại theo các sóng này, chúng sẽ lan tỏa ra và dường như tắt hẳn. Sau cùng, ma sát làm tắt hẳn các dao động. Ồ, phải rồi, đó là ma sát. Điều gì xảy đến với động năng nếu ở đó có ma sát? Động năng biến thành nhiệt. Như vậy, chúng ta đã bỏ sót một số chi tiết trong kịch bản thời gian đảo chiều. Động lượng và năng lượng thì cân bằng, nhưng phần bỏ sót chính là lượng nhiệt đã mất đi của sàn nhà.

Về mặt nguyên tắc, chúng ta có thể thiết lập một hệ hướng về phía trước theo thời gian để bắt chước chiếc bình trong thời gian bị đảo ngược. Chúng ta chỉ phải sắp xếp các phân tử dưới sàn nhà sao cho chúng va chạm đúng cách để có thể phát tán một lượng nhiệt như là dao động của sàn nhà, đẩy các mảnh vỡ đúng cách, sau đó ném mạnh chiếc bình vào không khí. Vấn đề không phải ở chỗ, về nguyên tắc, điều này là bất khả: nếu có thể đi nữa, thì tính thuận nghịch của thời gian cũng sẽ không thể xảy ra. Nhưng điều này là bất khả trong thực tiễn, bởi vì không có cách nào để điều khiển một cách chính xác nhiều phân tử như vậy.

Đây cũng là vấn đề về điều kiện biên – trong trường hợp này là những điều kiện ban đầu. Những điều kiện ban đầu đối với thí nghiệm chiếc bình rơi rất dễ thỏa mãn, và những dụng cụ thì cũng dễ kiếm. Tất cả đều rất dễ thực hiện: sử dụng một chiếc bình khác, thả rơi từ một độ cao khác... kết cục cũng vẫn như thế. Ngược lại, thí nghiệm chiếc bình vỡ tự ghép lại thì đòi hỏi những tác vụ chính xác đến phi thường đối với một số lượng vô cùng lớn các phân tử, và phải tạo ra được các mảnh vỡ một cách cẩn thận và hết sức tinh vi. Hơn

nữa, toàn bộ thiết bị điều khiển không được làm nhiễu động một phân tử nào. Điều này diễn giải tại sao chúng ta thực sự không thể thực hiện được thí nghiệm này.

Tuy nhiên, chú ý rằng ở đây chúng ta đang tư duy như thế nào: chúng ta đang tập trung vào các điều kiện *ban đầu*. Bản thân việc này đã thiết lập một mũi tên thời gian: phần còn lại của hành động sẽ đến sau thời điểm khởi đầu. Nếu chúng ta nhìn vào những điều kiện *cuối cùng* của thí nghiệm chiếc bình vỡ, xuống tới mức phân tử, thì tất cả sẽ trở nên phức tạp đến nỗi không một ai có đầu óc lành mạnh lại đi thử tái hiện chúng.

Toán học của entropy tránh những xem xét ở thang vi mô này. Nó cho phép những dao động tắt dần, nhưng không tăng lên. Nó cho phép ma sát chuyển thành nhiệt, nhưng không cho phép nhiệt chuyển thành ma sát. Sự khác biệt giữa nguyên lý hai của nhiệt động lực học và tính thuận nghịch vi mô của thời gian sinh ra từ sự làm thô, những giả thiết mô hình hóa được đưa ra khi chúng ta chuyển từ mô tả phân tử chi tiết sang một mô tả thống kê. Những giả thiết này đã ngầm xác định một mũi tên thời gian: những nhiễu loạn vĩ mô được phép tắt dần bên dưới mức chúng ta có thể cảm nhận được *theo thời gian trôi*, nhưng những nhiễu loạn vi mô không được phép tuân theo kịch bản thời gian đảo ngược. Một khi những quá trình động lực đã đi qua cánh cửa sập thời gian này, nó sẽ không được phép quay ngược trở lại nữa.

Nếu entropy luôn luôn tăng thì con gà làm thế nào đẻ ra quả trứng có trật tự? Một cách giải thích thông thường, được nhà vật lý Erwin Schrödinger đưa ra năm 1944 trong cuốn sách súc tích và quyến rũ *Sự sống là gì? (What's Life?*), đó là những hệ sinh học bằng cách nào đó mượn trật tự từ môi trường và

trả lại nó bằng cách làm môi trường thậm chí trở nên hỗn loạn hơn trước đó. Thứ trật tự dư này tương ứng với "entropy âm" và con gà có thể sử dụng nó để tạo ra quả trứng mà không vi phạm nguyên lý hai. Trong chương 15 chúng ta sẽ thấy rằng entropy âm, trong một số bối cảnh phù hợp, có thể được coi là thông tin, và người ta thường tuyên bố rằng con gà đã tiếp cận thông tin – cung cấp bởi ADN của chúng chẳng hạn – để nhận được lượng entropy âm cần thiết. Tuy nhiên, việc đồng nhất thông tin với entropy âm chỉ có nghĩa trong một số bối cảnh rất cụ thể, và những hoạt động của các sinh vật không phải là một trong số đó. Các cơ thể tạo ra trật tự thông qua các quá trình mà chúng thực hiện, nhưng những quá trình đó không phải là các quá trình nhiệt động. Những con gà không tiếp cận một kho chứa trật tự nào đó để làm cho các cuốn sách nhiệt động lực học cân bằng: chúng sử dụng các quá trình không phù hợp với mô hình nhiệt động lực, và hãy ném những quyển sách ấy đi vì chúng không áp dụng được.

Kịch bản trong đó quả trứng được tạo ra bằng cách mượn entropy sẽ trở nên phù hợp nếu quá trình mà con gà sử dụng là quá trình đảo ngược thời gian của một quả trứng vỡ thành các phân tử thành phần. Nhìn thoáng qua thì điều này có vẻ hợp lý mặc dù hơi mơ hồ, bởi vì những phân tử mà sau này tạo thành quả trứng đã được phát tán khắp môi trường; rồi chúng được tập hợp lại trong con gà, nơi mà những quá trình sinh hóa sẽ sắp đặt chúng với nhau theo một cách có trật tự để tạo thành quả trứng. Tuy nhiên, có một sự khác biệt trong các điều kiện ban đầu. Nếu bạn đi xung quanh để đánh dấu trước các phân tử trong môi trường của con gà, để có thể nói "phân tử này cuối cùng sẽ nằm ở vị trí này hay khác trong quả trứng", thì thực tế bạn sẽ tạo ra những điều kiện biên phức

tạp và không chắc sẽ xảy ra, như trong trường hợp quả trứng bị đánh tơi lấy lại hình dạng như cũ. Nhưng đó không phải là cách con gà thực hiện. Một số phân tử cuối cùng sẽ an bài trong quả trứng và về mặt khái niệm được mô tả như là một bộ phận của nó *sau khi* quá trình này đã hoàn tất. Những phân tử khác cũng có thể đã làm chính công việc ấy – một phân tử canxi carbonat cũng đủ tốt để tạo thành vỏ trứng như bất kỳ phân tử nào khác. Do vậy con gà đã không tạo ra trật tự từ hỗn loạn. Trật tự được gán cho kết quả cuối cùng của quá trình làm ra quả trứng – giống như khi xáo bộ bài thành một trật tự ngẫu nhiên và rồi sau đó đánh số chúng theo kiểu 1, 2, 3,… bằng một chiếc bút đánh dấu. Thật ngạc nhiên – chúng đã được sắp trật tự theo các con số.

Phải công nhận rằng quả trứng nhìn trật tự hơn các thành phần của nó, ngay cả nếu chúng ta tính đến sự khác biệt nói trên trong các điều kiện ban đầu. Nhưng đó là bởi vì quá trình tạo thành quả trứng không phải là một quá trình nhiệt động. Thực tế, có nhiều quá trình vật lý làm được những điều tựa như các quả trứng vỡ lành lặn trở lại. Một ví dụ là cách các chất khoáng hòa tan trong nước có thể tạo thành các nhũ đá và măng đá trong các hang động. Nếu chúng ta chỉ định trước dạng chính xác của nhũ đá mà chúng ta muốn, thì chúng ta sẽ rơi vào tình thế của một người đang cố gắng ghép lại chiếc bình từ các mảnh vỡ. Nhưng nếu chúng ta bằng lòng chấp nhận bất kỳ một cái nhũ đá đã có từ lâu nào, thì chúng ta sẽ nhận được một cái: trật tự tạo thành từ hỗn loạn. Hai thuật ngữ này thường được sử dụng một cách cẩu thả. Vấn đề là ở chỗ loại trật tự nào và loại hỗn loạn nào. Như đã nói, tôi *vẫn* không trông chờ một quả trứng vỡ lành lặn trở lại, vì không có cách khả thi nào để thiết đặt các điều kiện ban đầu cần thiết.

Điều tốt nhất mà chúng ta có thể làm là biến quả trứng vỡ thành thức ăn cho gà, và chờ đợi nó đẻ ra một quả trứng khác.

Thực tế, có một lý do khiến chúng ta không thể thấy quả trứng vỡ tự lành lặn trở lại, thậm chí nếu thế giới có quay ngược trở lại. Bởi vì chúng ta và những ký ức của chúng ta là một phần của một hệ mà nếu bị đảo chiều thời gian, chúng ta sẽ không biết chắc được rằng đâu là chiều mà thời gian "thực sự" trôi. Cảm nhận của chúng ta về sự trôi của thời gian được sinh ra từ những ký ức, những hình mẫu hóa lý trong não bộ. Theo ngôn ngữ thông thường, não lưu trữ những ghi nhận của quá khứ chứ không phải của tương lai. Hãy tưởng tượng bạn thực hiện một chuỗi những bức ảnh chụp nhanh hình ảnh bộ não đang quan sát một quả trứng bị đánh tơi, cùng với những ký ức của nó về quá trình này. Ở một bước nào đó, não bộ nhớ về một quả trứng lạnh, còn lành lặn, và một ít lịch sử của nó khi được lấy ra từ tủ lạnh và đập vào chảo. Ở một bước khác, nó ghi nhớ về quả trứng bị đập ra bằng một cái nĩa, và di chuyển từ tủ lạnh vào chảo.

Nếu bây giờ chúng ta đảo ngược toàn bộ vũ trụ theo thời gian, thì chúng ta sẽ đảo ngược trật tự mà ở đó các ký ức đã diễn ra, trong thời gian "thực". Nhưng chúng ta không thể đảo ngược được trật tự của ký ức đã được ghi trong não bộ. Ở bước đầu (theo chiều thời gian đảo ngược) của quá trình quả trứng ráng tự phục hồi, não sẽ không nhớ gì về "quá khứ" của quả trứng – như nó xuất hiện từ miệng ra chiếc thìa như thế nào, nó bị đập vỡ ra sao, và cuối cùng nó dần dần được dựng lại thành quả trứng lành lặn như thế nào... Thay vì thế, những ghi nhận trong não bộ ở thời điểm ấy là một quả trứng bị đập vỡ, cùng với quá trình lấy ra từ tủ lạnh tới cái chảo và khuấy nó. Nhưng ký ức này chính là ký ức được ghi lại trong kịch

bản theo chiều tiến của thời gian. Chính điều này cũng xảy ra đối với tất cả những bức ảnh chụp nhanh ký ức của chúng ta. Nhận thức của chúng ta về thế giới phụ thuộc vào những gì mà chúng ta *đang* quan sát, và những ký ức mà não chúng ta *đang* lưu trữ. Trong một vũ trụ mà thời gian bị đảo chiều thì thực tế chúng ta nhớ về tương lai chứ không phải về quá khứ.

Nghịch lý về tính thuận nghịch của thời gian và entropy không phải là những vấn đề về thế giới thực. Chúng là các vấn đề của những giả thiết khi chúng ta cố gắng mô hình hóa thế giới đó mà thôi.

13 Chỉ có một thứ là tuyệt đối
Thuyết tương đối

năng lượng nghỉ của vật chất
khối lượng
tốc độ ánh sáng
bình phương

$$E = mc^2$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Vật chất chứa năng lượng bằng khối lượng của nó nhân với bình phương tốc độ ánh sáng.

Tại sao nó lại quan trọng?

Tốc độ của ánh sáng vô cùng lớn và bình phương của nó thì chắc chắn là một con số khổng lồ. Một kilogam vật chất sẽ giải phóng khoảng 40% lượng năng lượng trong vũ khí hạt nhân lớn nhất đã từng phát nổ. Đây là một trong một gói các phương trình đã làm thay đổi cái nhìn của chúng ta về không gian, thời gian, và lực hấp dẫn.

Nó đã dẫn tới những gì?

Một vật lý học hoàn toàn mới mẻ, tất nhiên rồi. Các vũ khí hạt nhân..., phải, có lẽ thế – mặc dù không phải là trực tiếp hay chắc chắn như những lời đồn đại huyễn hoặc khẳng định. Các lỗ đen, Big Bang, GPS và cả hệ thống điều hướng bằng vệ tinh nữa.

Nếu Einstein, với mái tóc rối bù rất ấn tượng, là một nhà khoa học tiêu biểu trong nền văn hóa đại chúng, thì phương trình $E = mc^2$ của ông cũng là một phương trình tiêu biểu. Phần lớn mọi người đều tin rằng phương trình này đã dẫn tới việc phát minh ra vũ khí hạt nhân, rằng chúng bắt nguồn từ thuyết tương đối của Einstein, và (hiển nhiên) rằng lý thuyết này có liên quan tới những gì có tính tương đối. Thực tế, rất nhiều nhà tương đối luận xã hội đã xướng lên một cách hạnh phúc rằng "mọi thứ đều tương đối", và nghĩ rằng điều ấy có liên quan tới Einstein.

Không, nó chẳng liên quan gì cả. Einstein đặt tên cho lý thuyết của mình là "tương đối" bởi vì nó là một sự sửa đổi lại của các quy tắc cho chuyển động tương đối đã được sử dụng một cách truyền thống trong cơ học Newton, mà ở đó chuyển động *là tương đối*, phụ thuộc một cách rất đơn giản và trực quan vào hệ quy chiếu mà nó được quan sát. Einstein đã phải sửa lại lý thuyết tương đối của Newton nhằm tìm ra ý nghĩa cho một khám phá thực nghiệm khó hiểu: một hiện tượng vật lý cụ thể không hề mang tính tương đối, mà lại là tuyệt đối. Từ đó ông rút ra một loại vật lý mới, trong đó các vật thể co lại khi chúng chuyển động rất nhanh, còn thời gian nhích từng bước chậm chạp, và khối lượng thì tăng không giới hạn. Sự mở rộng bao gồm cả hấp dẫn đã mang lại cho chúng ta sự thấu hiểu sâu sắc nhất về nguồn gốc của vũ trụ và cấu trúc của nó. Lý thuyết

này dựa trên ý tưởng cho rằng không gian và thời gian có thể bị uốn cong.

Tính tương đối là có thực. Hệ thống định vị toàn cầu (GPS, ngoài những mục đích khác ra, còn được sử dụng để dẫn đường cho xe hơi) chỉ vận hành được khi có những hiệu chỉnh tính đến các hiệu ứng tương đối tính. Điều tương tự cũng xảy ra với các máy gia tốc hạt như Máy va chạm lớn (LHC), với nhiệm vụ hiện tại là tìm kiếm boson Higgs, hạt được coi là nguồn gốc của khối lượng. Truyền thông hiện đại đã trở nên quá nhanh tới mức các thương gia đã bắt đầu có ý định vươn tới giới hạn tương đối tính: tốc độ của ánh sáng. Đó là tốc độ lớn nhất mà bất kỳ thông điệp nào, chẳng hạn như một hướng dẫn mua bán cổ phiếu trên Internet, có thể được gửi đi. Có người thấy rằng đây có thể là một cơ hội để ký hợp đồng sớm hơn những người cạnh tranh vài nano giây, nhưng cho đến nay, các hiệu ứng tương đối tính không có ảnh hưởng đáng kể nào đến nền tài chính thế giới. Tuy nhiên, người ta cũng đã tìm ra những vị trí tốt nhất cho các thị trường chứng khoán hay các đại lý mới. Đó chỉ là vấn đề thời gian.

Cho dù thế nào đi nữa, không những thuyết tương đối là không tương đối, mà phương trình biểu tượng cho lý thuyết ấy cũng không như chúng ta tưởng. Khi Einstein mới đưa ra ý tưởng vật lý mà phương trình ấy mô tả, ông đã không viết nó dưới dạng quen thuộc hiện nay. Phương trình này không phải là một hệ quả toán học của thuyết tương đối, mặc dù nó sẽ trở nên như vậy nếu một vài giả thiết và định nghĩa vật lý được chấp nhận. Việc phương trình mang tính biểu tượng nhất của chúng ta không phải, và đã không phải là cái mà nó phải là, và các lý thuyết sản sinh ra nó cũng vậy, có lẽ, là điển hình cho nền văn hóa nhân loại. Thậm chí mối liên kết với

các vũ khí hạt nhân cũng không rõ ràng, và ảnh hưởng mang tính lịch sử của nó với quả bom nguyên tử đầu tiên lại rất nhỏ so với ảnh hưởng chính trị của Einstein với tư cách là một nhà khoa học tiêu biểu.

Thuyết tương đối bao gồm hai lý thuyết riêng biệt nhưng có liên quan với nhau, thuyết tương đối hẹp và thuyết tương đối rộng. Tôi sẽ sử dụng phương trình trứ danh của Einstein như một lý do để nói về cả hai. Thuyết tương đối hẹp là lý thuyết về không gian, thời gian và vật chất khi không có hấp dẫn; còn thuyết tương đối rộng thì tính đến cả hấp dẫn nữa. Hai lý thuyết này chỉ là bộ phận của một bức tranh rộng lớn, nhưng đã lấy đi của Einstein 10 năm nghiên cứu miệt mài căng thẳng, để khám phá ra cách sửa đổi thuyết tương đối hẹp sao cho nó bao gồm được cả hấp dẫn. Cả hai lý thuyết này đều được lấy cảm hứng từ những khó khăn trong việc dung hòa vật lý của Newton với các quan sát, nhưng cái công thức có tính biểu tượng kia thì phát sinh từ thuyết tương đối hẹp.

Vật lý dường như đã khá rõ ràng và trực quan vào thời của Newton. Không gian là không gian, thời gian là thời gian và không bao giờ cặp đôi này gặp nhau. Hình học của không gian là hình học Euclid. Thời gian là độc lập với không gian và cũng độc lập đối với tất cả những người quan sát – nếu đồng hồ của họ đã được đồng bộ hóa. Khối lượng và kích thước của một vật không thay đổi khi nó chuyển động, và thời gian trôi đi với tốc độ như nhau ở mọi nơi. Nhưng khi Einstein hoàn thành cuộc cách tân vật lý, tất cả các khẳng định trên hóa ra lại không chính xác, mặc dù dường như chúng là quá trực quan đến mức thật khó để có thể tưởng tượng được tại sao chúng lại không thể mô tả được thực tại.

Dĩ nhiên, chúng không hoàn toàn là sai hẳn. Nếu chúng vô nghĩa thật thì các công trình của Newton đã không thể thành công đến thế. Bức tranh của Newton về vũ trụ vật lý chỉ là gần đúng, chứ không phải một mô tả chính xác. Phép gần đúng này sẽ là cực kỳ chính xác nếu mọi vật tham gia đều chuyển động đủ chậm, như hầu hết những gì xảy ra trong cuộc sống hằng ngày. Ngay cả một máy bay chiến đấu phản lực, bay với vận tốc lớn gấp đôi vận tốc âm thanh, cũng vẫn là đủ chậm theo yêu cầu đó. Nhưng thực ra, có một thứ đóng vai trò quan trọng trong đời sống hằng ngày chuyển động cực nhanh, và đặt ra một thước đo cho tất cả các tốc độ khác: ánh sáng. Newton và các hậu bối của ông đã chứng tỏ ánh sáng là một sóng, và các phương trình của Maxwell đã xác nhận điều này. Nhưng bản chất sóng của ánh sáng đã đặt ra một vấn đề mới. Các sóng ở đại dương là sóng trong nước, sóng âm là sóng trong không khí, còn động đất là sóng trong lòng Trái Đất. Vậy thì sóng ánh sáng là sóng trong... môi trường nào?

Về mặt toán học, chúng là sóng trong trường điện từ, một trường được giả định là tràn ngập khắp không gian. Khi trường điện từ bị kích thích, chúng ta sẽ quan sát được một sóng. Nhưng điều gì sẽ xảy ra nếu nó không bị *kích thích*? Không có sóng, đại dương vẫn sẽ là đại dương, không khí vẫn là không khí, và Trái Đất thì cũng vẫn là Trái Đất. Tương tự như vậy, trường điện từ cũng vẫn có thể là... trường điện từ. Nhưng bạn không thể quan sát thấy trường điện từ nếu không có sự chuyển động của điện và từ. Nếu bạn không thể quan sát thấy nó thì nó là gì? Nó có thực sự tồn tại hay không?

Tất cả các sóng đã được nhận biết bởi vật lý đều là hữu hình, ngoại trừ sóng của trường điện từ. Cả ba dạng sóng:

sóng nước, sóng trong không khí, sóng động đất – đều là các sóng của chuyển động. Môi trường dao động lên xuống hoặc từ bên này sang bên kia, nhưng thông thường thì nó không chuyển động theo sóng. (Buộc một đầu dây thừng dài vào tường và rung đầu còn lại: một sóng sẽ dịch chuyển dọc theo dây thừng. Nhưng *dây thừng* thì không tự di chuyển.) Cũng có những ngoại lệ: khi không khí di chuyển theo sóng ta gọi đó là "gió", và sóng đại dương đẩy nước lên bãi biển. Nhưng ngay cả khi chúng ta mô tả sóng thần như một bức tường nước di động, thì nó cũng không lăn trên bề mặt đại dương giống như quả bóng lăn dọc theo sân. Hầu hết nước ở bất kỳ vị trí nào cũng chuyển động lên và xuống. Cái chuyển động chính là vị trí "lên" ấy. Cho tới khi nước tới gần bờ thì bạn mới thấy cái gì đó rất giống với một bức tường nước di động.

Ánh sáng và sóng điện từ nói chung dường như không phải là các sóng trong một môi trường hữu hình. Ở vào thời của Maxwell, và mãi tới tận hơn 50 năm sau đó, việc này nghe thật phiền toái. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton đã bị chỉ trích trong một thời gian dài vì nó ngụ ý rằng lực hấp dẫn bằng cách nào đó có thể "tác dụng ở một khoảng cách", điều này về mặt nguyên lý triết học cũng thần kỳ giống như bạn sút bóng vào khung thành trong khi vẫn đang ngồi trên khán đài. Nói rằng nó được truyền đi bởi "trường hấp dẫn" không giải thích được những điều đã thực sự xảy ra. Vấn đề cũng tương tự đối với sóng điện từ. Vì thế các nhà vật lý đã quay trở lại ý tưởng cho rằng cần có một môi trường nào đó – không ai biết là cái gì, và họ gọi nó là "chất ether truyền ánh sáng" hay chỉ đơn giản là "ether" – giúp lan truyền sóng điện từ. Chúng ta đã biết rằng các môi trường càng cứng thì dao động sẽ lan truyền càng nhanh, và vì ánh sáng thì cực nhanh, do vậy

ether phải cực kỳ cứng. Thế nhưng các hành tinh lại có thể dễ dàng chuyển động qua nó mà không phải chịu một sức cản nào cả. Vì không phát hiện thấy ether một cách dễ dàng, nên ether phải không có khối lượng, không nhớt, không nén được và hoàn toàn trong suốt đối với tất cả các dạng bức xạ.

Đây là một sự tổ hợp các thuộc tính khiến ta phải ngao ngán, nhưng hầu hết các nhà vật lý đều cho rằng ether tồn tại, bởi vì ánh sáng rõ ràng là đã làm những thứ mà nó đã làm. Phải có *cái gì đó* để sóng chuyển động trong đó chứ. Hơn nữa, về mặt nguyên tắc, sự tồn tại của ether có thể phát hiện được, bởi vì một đặc tính khác của ánh sáng đã gợi ý một cách để quan sát nó. Trong chân không, ánh sáng truyền với tốc độ cố định là *c*. Cơ học Newton đã dạy tất cả các nhà vật lý phải hỏi rằng: tốc độ đối với cái gì? Nếu bạn đo một vận tốc trong hai hệ quy chiếu khác nhau, một hệ chuyển động so với hệ kia, bạn sẽ nhận được các kết quả khác nhau. Tính bất biến của vận tốc ánh sáng gợi ý cho ta một câu trả lời hiển nhiên: *đối với ether*. Nhưng đây chỉ là một câu trả lời hơi có vẻ dễ dãi, bởi vì hai hệ quy chiếu chuyển động đối với nhau không thể đồng thời cùng đứng yên đối với ether.

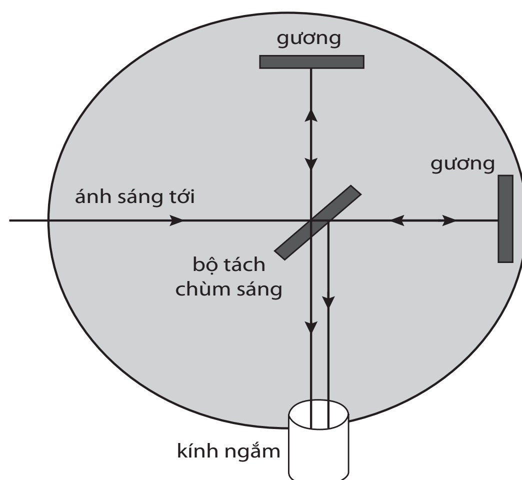
Khi Trái Đất vạch đường xuyên qua ether, thật kỳ diệu là không bị cản trở gì, nó quay vòng liên tục xung quanh Mặt Trời. Ở các điểm đối diện nhau trên quỹ đạo của mình, Trái Đất chuyển động theo chiều ngược nhau. Do đó theo cơ học Newton, vận tốc ánh sáng cũng biến thiên giữa hai thái cực: *c* cộng với phần vận tốc góp vào từ chuyển động của Trái Đất đối với ether, và *c* trừ đi cũng đúng phần đóng góp đó. Đo vận tốc, sau đó đo lại nó một lần nữa vào đúng sáu tháng sau, rồi tìm hiệu: nếu có hiệu số, thì đó chính là bằng chứng cho sự tồn tại của ether. Vào những năm cuối của thế kỷ 19, rất

nhiều thí nghiệm theo hướng này đã được tiến hành, nhưng kết quả của chúng không mấy thuyết phục. Hoặc là hiệu số bằng 0, hoặc là có hiệu số nhưng phương pháp thí nghiệm lại không đủ chính xác. Tồi tệ hơn nữa, Trái Đất có thể kéo ether theo khi nó chuyển động. Điều này ngay lập tức giải thích được tại sao Trái Đất có thể di chuyển qua một môi trường rắn như thế mà không hề bị cản trở, và ngụ ý rằng cho dù thế nào thì bạn cũng sẽ không thấy được sự khác biệt trong vận tốc của ánh sáng. Chuyển động tương đối của Trái Đất đối với ether luôn bằng 0.

Năm 1887, Albert Michelson và Edward Morley đã thực hiện một trong những thí nghiệm vật lý quan trọng nhất mọi thời đại. Những dụng cụ của họ đã được thiết kế để có thể nhận biết những biến thiên cực kỳ nhỏ của tốc độ ánh sáng theo hai hướng vuông góc với nhau. Tuy nhiên, vì Trái Đất chuyển động tương đối với ether nên ánh sáng không thể chuyển động với cùng vận tốc theo hai hướng khác nhau... trừ phi xảy ra sự trùng hợp ngẫu nhiên khi Trái Đất chuyển động dọc theo đường phân giác của hai hướng kia, trong trường hợp này bạn chỉ cần xoay các dụng cụ đi một chút và thử lại.

Bộ dụng cụ thí nghiệm, như trong hình 48, đủ nhỏ để có thể đặt vừa trên một cái bàn thí nghiệm. Nó sử dụng một tấm gương bán mạ để chia một chùm sáng thành hai phần, một phần đi qua gương và phần còn lại phản xạ theo hướng vuông góc. Từng chùm sáng này đều được phản xạ ngược trở lại dọc theo đường đi của chúng, và hai chùm sáng lại được kết hợp lại với nhau và đập vào detector. Bộ dụng cụ được điều chỉnh sao cho quãng đường đi của hai chùm sáng có cùng độ dài. Chùm sáng ban đầu đã được thiết lập là kết hợp, có nghĩa là

các sóng của nó đồng bộ với nhau – tất cả đều có cùng pha, và các đỉnh sóng chồng lên nhau. Bất kỳ sự khác biệt nào giữa tốc độ của hai chùm sáng theo các hướng đi của chúng sẽ làm cho các pha của chúng dịch đi đối với nhau, và do đó các đỉnh sóng cũng xuất hiện ở những vị trí khác nhau. Việc này sẽ gây ra sự giao thoa giữa hai sóng, và hệ quả thu được là một bức tranh "các vân giao thoa". Chuyển động tương đối của Trái Đất so với ether có thể khiến cho các vân di chuyển. Hiệu ứng này rất nhỏ: với những gì đã biết về chuyển động của Trái Đất đối với Mặt Trời, các vân giao thoa sẽ dịch đi một khoảng chỉ bằng 4% bề rộng của một vân. Bằng cách sử dụng phản xạ nhiều lần, độ dịch này có thể tăng tới 40%, đủ lớn để có thể phát hiện được. Để tránh sự trùng hợp có thể xảy ra khi Trái Đất đi dọc theo đường phân giác của hai chùm sáng, Michelson và Morley đã để bộ dụng cụ thí nghiệm nổi trên một bể chứa thủy ngân, nhờ đó nó có thể quay một cách nhanh chóng và dễ dàng. Và khi đó có thể quan sát độ dịch chuyển của các vân sáng với cùng độ nhanh.



Hình 48 Thí nghiệm Michelson-Morley.

Đây là một thí nghiệm cẩn trọng và chính xác. Kết quả của nó hoàn toàn không như người ta chờ đợi. Các vân sáng

không dịch tới 40% bề rộng của chúng. Có thể nói một cách chắc chắn rằng các vân ấy không hề nhúc nhích. Những thí nghiệm sau đó, có thể phát hiện độ dịch chuyển chỉ khoảng 0,07% bề rộng của vân, cũng đưa ra một kết quả không mong đợi như vậy. Nghĩa là ether không tồn tại.

Kết quả này không chỉ quyết định số phận của ether, mà nó còn đe dọa cả lý thuyết điện từ của Maxwell nữa. Nó ngụ ý rằng ánh sáng không hành xử theo kiểu Newton đối với các hệ quy chiếu chuyển động. Vấn đề này có thể truy ngược về các tính chất toán học của các phương trình Maxwell và cách chúng biến đổi đối với một hệ quy chiếu chuyển động. Nhà vật lý, hóa học người Ailen, George FitzGerald, và nhà vật lý người Hà Lan, Hendrik Lorentz đã độc lập với nhau đề xuất một cách táo bạo để có thể khắc phục vấn đề này (tương ứng vào các năm 1892 và 1895). Nếu một vật chuyển động hơi co lại theo hướng chuyển động đó một lượng thích hợp, thì những thay đổi về pha mà thí nghiệm Michelson-Morley hy vọng phát hiện ra sẽ được triệt tiêu một cách chính xác bởi sự thay đổi về chiều dài của đoạn đường mà tia sáng đã đi. Lorentz cũng đã chứng tỏ được rằng "sự co Lorentz-FitzGerald" này cũng đã loại bỏ những khó khăn về mặt toán học ở trường hợp các phương trình của Maxwell. Khám phá chung này cho thấy rằng những kết quả của các thí nghiệm về điện từ, bao gồm cả ánh sáng, không phụ thuộc vào chuyển động tương đối của hệ quy chiếu. Poincaré cũng đã nghiên cứu theo những đường hướng tương tự như thế và góp thành quả trí tuệ đầy sức thuyết phục của mình vào ý tưởng đó.

Sân khấu giờ đây đã chuẩn bị sẵn cho Einstein. Năm 1905, ông đã phát triển và mở rộng những nghiên cứu trước đó

thành một lý thuyết mới về chuyển động tương đối trong một bài báo có nhan đề *Về điện động lực học của các vật chuyển động* (*On the electrodynamics of moving bodies*). Công trình của ông đã đi xa hơn những bậc tiền bối ở hai hướng. Ông đã chỉ ra rằng sự thay đổi cần thiết trong các công thức toán học của chuyển động tương đối không chỉ đơn thuần là mưu mẹo để thoát khỏi những khó khăn của lý thuyết điện từ, mà nó cần phải được áp dụng cho tất cả các định luật vật lý. Từ đây thấy rằng toán học mới này phải là một mô tả chính xác của thực tại, với cùng một địa vị về mặt triết học như đã từng hòa hợp với cách mô tả phổ biến kiểu Newton, nhưng phải mang lại một sự phù hợp tốt hơn với các thí nghiệm. Đó mới là vật lý thực sự.

Quan điểm về chuyển động tương đối được Newton sử dụng bắt nguồn thậm chí còn xa xưa hơn, mà cụ thể là từ Galileo. Trong cuốn sách của ông in năm 1632, *Đối thoại về hai hệ thống chính của thế giới (Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo)*, Galileo đã thảo luận về một con tàu chạy với vận tốc không đổi trên mặt biển tuyệt đối bằng phẳng, ông đã khẳng định rằng không một thí nghiệm cơ học nào thực hiện dưới boong tàu có thể phát lộ rằng con tàu đang chuyển động. Đó chính là nguyên lý tương đối của Galileo: trong cơ học, không có sự khác biệt nào giữa những quan sát được thực hiện trong hai hệ quy chiếu chuyển động đều đối với nhau. Đặc biệt, không có hệ quy chiếu đặc biệt nào là "đứng yên" cả. Xuất phát điểm của Einstein cũng chính là nguyên lý đó, nhưng được mở rộng đến cực hạn: nó không áp dụng chỉ cho cơ học, mà cho tất cả các định luật vật lý. Trong số đó, dĩ nhiên là có cả các phương trình Maxwell và tính bất biến của tốc độ ánh sáng.

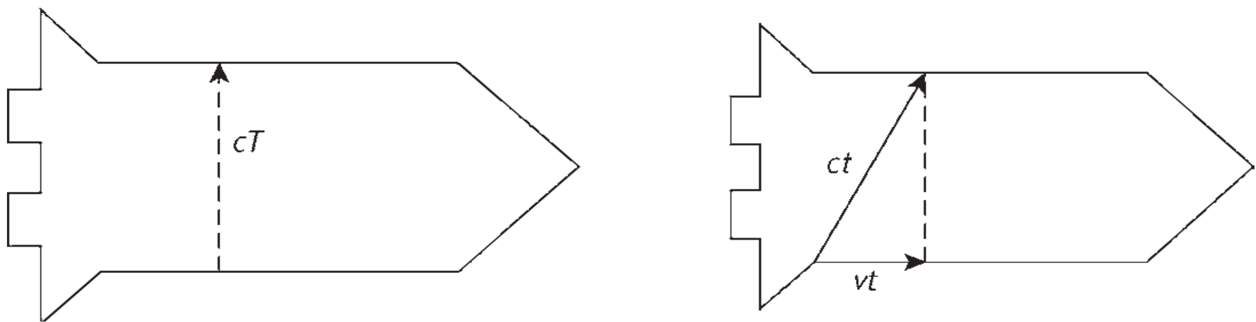
Đối với Einstein, thí nghiệm Michelson-Morley chỉ là một bằng chứng nữa cho lý thuyết của ông, nhưng đó vẫn chưa phải là một thử thách thực sự. Sự thử thách tính đúng đắn của lý thuyết này nằm ở nguyên lý tương đối mở rộng của ông và những gì mà nó ngụ ý cho cấu trúc toán học của các định luật vật lý. Nếu bạn chấp nhận nguyên lý này, thì tất cả những thứ khác cũng sẽ phải theo đó. Điều này giải thích tại sao lý thuyết này lại được biết đến dưới tên gọi "thuyết tương đối". Không phải bởi vì "mọi thứ là tương đối", mà là bởi vì bạn phải tính đến *cái cách thức* mà trong đó mọi thứ là tương đối. Và đó không phải là điều mà bạn trông đợi.

Phiên bản này của lý thuyết Einstein được biết đến dưới tên gọi thuyết tương đối hẹp bởi vì nó chỉ áp dụng cho những hệ quy chiếu chuyển động đều với nhau. Một trong số những hệ quả của nó là sự co Lorentz-FitzGerald, mà ngày nay được mô tả như một đặc điểm tất yếu của không-thời gian. Thực tế, có tới ba hiệu ứng có liên quan. Nếu một hệ quy chiếu chuyển động đều tương đối với một hệ quy chiếu khác, thì khi đó chiều dài đo được trong hệ quy chiếu đó bị co lại dọc theo chiều chuyển động, còn khối lượng tăng lên và thời gian trôi chậm lại. Ba hiệu ứng này liên quan chặt chẽ với nhau bởi các định luật cơ bản về bảo toàn năng lượng và động lượng; một khi bạn chấp nhận một trong số chúng, những hiệu ứng còn lại sẽ chỉ là các hệ quả logic.

Phát biểu mang tính chuyên môn của những hiệu ứng trên là một công thức mô tả các phép đo trong hệ quy chiếu này liên hệ như thế nào với các phép đo trong hệ quy chiếu khác. Kết luận tóm tắt là: nếu một vật chuyển động với tốc độ gần bằng với tốc độ ánh sáng, thì khi đó chiều dài của nó sẽ trở

nên rất nhỏ, thời gian sẽ chậm lại như rùa bò, và khối lượng của nó sẽ trở nên rất lớn. Dưới đây tôi sẽ chỉ đưa vào một chút hương vị của toán học thôi: mô tả vật lý không nên được hiểu theo nghĩa đen, và phải mất nhiều thời gian mới có thể diễn đạt được chúng bằng một ngôn ngữ chính xác. Tất cả đều xuất phát từ... định lý Pythagor. Một trong những phương trình cổ xưa nhất của khoa học lại dẫn tới một trong những phương trình mới mẻ nhất.

Giả sử rằng một con tàu vũ trụ đang tiến về phía trước với vận tốc *v*, và phi hành đoàn thực hiện một thí nghiệm. Họ gửi một xung ánh sáng từ nền cabin tới trần cabin, và đo được thời gian là *T*. Trong khi đó một người quan sát dưới đất quan sát thí nghiệm trên qua một kính thiên văn (giả sử rằng con tàu vũ trụ trong suốt), và đo được thời gian là *t*.



Hình 49 *Trái*: Thí nghiệm trong hệ quy chiếu của phi hành đoàn. *Phải*: Cũng thí nghiệm đó nhưng là trong hệ quy chiếu của người quan sát trên mặt đất.

Hình 49 bên trái cho thấy dạng hình học của thí nghiệm theo quan điểm của phi hành đoàn. Đối với họ, chùm sáng đã đi thẳng từ dưới lên trên. Vì ánh sáng truyền đi với tốc độ là *c*, quãng đường ánh sáng đi được do đó sẽ là *cT*, được minh họa bởi đường nét đứt. Hình 49 bên phải cho thấy dạng hình học của thí nghiệm theo quan điểm của người quan sát trên

mặt đất. Tàu không gian đã bay được một đoạn đường vt, do vậy ánh sáng phải chiếu xiên đi. Bởi vì ánh sáng *cũng* truyền đi với tốc độ c đối với người quan sát trên mặt đất nên đoạn đường xiên mà tia sáng đi được dài ct. Nhưng vì đoạn nét đứt cũng cùng độ dài như mũi tên nét đứt trong hình thứ nhất, nên nó bằng cT. Theo định lý Pythagor,

$$(ct)^2 = (cT)^2 + (vt)^2$$

Giải phương trình theo biến T ta được,

$$T = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

có giá trị nhỏ hơn t.

Để rút ra công thức cho sự co Lorentz-FitzGerald, bây giờ chúng ta tưởng tượng rằng con tàu không gian đi tới một hành tinh cách Trái Đất một khoảng cách x với tốc độ là v. Khi đó thời gian cần thiết cho hành trình là $t = x/v$. Nhưng công thức trên cho thấy, đối với phi hành đoàn, thời gian cần thiết lại là T chứ không phải t. Đối với họ, khoảng cách X phải thỏa mãn $T = X/v$. Do đó

$$X = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

có giá trị nhỏ hơn x.

Việc rút ra sự thay đổi khối lượng ít liên quan hơn, và nó phụ thuộc vào cách diễn giải khái niệm khối lượng, mà cụ thể là "khối lượng nghỉ", do vậy tôi sẽ không đi vào chi tiết. Công thức như sau:

$$M = m/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

và dễ thấy là $M > m$.

Những phương trình này cho ta thấy rằng có điều gì đó rất đặc biệt về tốc độ của ánh sáng (và thực ra là về ánh sáng). Một hệ quả quan trọng của hình thức luận này là tốc độ ánh sáng là một rào chắn không thể vượt qua. Nếu một vật bắt đầu chuyển động chậm hơn ánh sáng, thì nó không thể được gia tốc để có tốc độ vượt qua tốc độ của ánh sáng. Năm 2011, một số nhà vật lý làm việc ở Ý đã thông báo rằng những hạt hạ nguyên tử gọi là neutrino có vẻ như đã chuyển động nhanh hơn ánh sáng[1]. Những quan sát của họ còn gây nhiều tranh cãi, nhưng nếu được xác nhận, chúng sẽ dẫn tới những điều mới mẻ quan trọng trong vật lý*.

Pythagor xuất hiện trong thuyết tương đối còn theo những cách khác. Một trong các cách đó là xây dựng thuyết tương đối hẹp dựa trên hình học của không-thời gian, được đề xuất lần đầu tiên bởi Hermann Minkowski. Không gian Newton thông thường có thể thâu tóm được về mặt toán học, bằng cách làm cho các điểm của nó tương ứng với ba tọa độ *(x, y, z)*, và định nghĩa khoảng cách *d* giữa điểm đó và một điểm *(X, Y, Z)* khác bằng định lý Pythagor:

$$d^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2$$

Bây giờ khai căn hai vế để thu được *d*. Không-thời gian Minkowski cũng tương tự như thế, nhưng giờ ta có bốn tọa độ *(x, y, z, t)*, ba tọa độ không gian cộng với một tọa độ thời gian, và một điểm được gọi là một *sự kiện* – một vị trí trong không gian được quan sát tại một thời điểm cụ thể. Ta cũng có công thức tính khoảng cách tương tự:

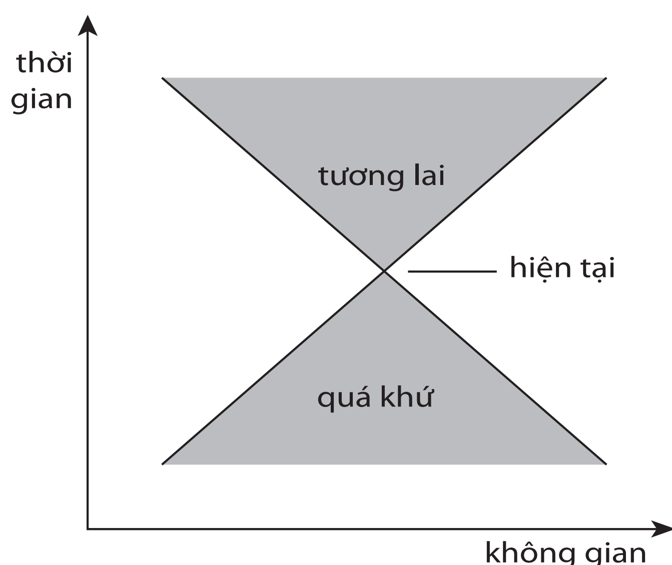
---

* Sau đó một thời gian, họ đã đính chính lại thông tin này, kết quả thu được là sai do một lỗi nhỏ trong hệ thống máy móc - Nxb.

$$d^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - c^2(t - T)^2$$

Thừa số c^2 chỉ là hệ quả của đơn vị được dùng để đo thời gian, nhưng dấu trừ đứng đằng trước nó mới là quan trọng. "Khoảng cách" d được gọi là *khoảng*, và kết quả khai căn hai vế là một số thực chỉ khi vế phải của phương trình là dương. Bản chất của điều này là khoảng cách không gian giữa hai sự kiện lớn hơn hiệu thời gian (theo đơn vị đo đúng: ví dụ như năm ánh sáng và năm, chẳng hạn). Điều này có nghĩa là, về nguyên tắc, một vật có thể đi từ điểm này trong không gian ở thời điểm thứ nhất đến điểm khác trong không gian ở một thời điểm thứ hai, nhưng không được nhanh hơn ánh sáng.

Nói cách khác, về nguyên tắc, một khoảng là thực nếu và chỉ nếu sự di chuyển giữa hai sự kiện là khả dĩ về mặt vật lý. Khoảng sẽ có giá trị bằng 0 nếu và chỉ nếu ánh sáng có thể di chuyển giữa chúng. Vùng tiếp cận được về mặt vật lý được gọi là nón ánh sáng của một sự kiện, và nó có hai phần: quá khứ và tương lai. Hình 50 cho thấy hình học của nón ánh sáng khi không gian bị thu về một chiều.



Hình 50 Không-thời gian Minkowski, với không gian được thể hiện thành một chiều.

Đến đây tôi đã chỉ cho các bạn thấy ba phương trình tương đối tính, và đã phác họa con đường rút ra các phương trình đó, nhưng không có phương trình nào trong số đó là phương trình mang tính biểu tượng của Einstein. Tuy nhiên, bây giờ chúng ta đã sẵn sàng để tìm hiểu xem ông đã rút ra phương trình ấy như thế nào, một dịp để chúng ta tán thưởng một phát kiến mới nữa của vật lý đầu thế kỷ 20. Như chúng ta đã thấy, các nhà vật lý trước đó đã thực hiện các thí nghiệm để chứng tỏ một cách thuyết phục rằng ánh sáng là một sóng, và Maxwell đã chỉ ra rằng đó là một loại sóng điện từ. Tuy nhiên, đến năm 1905, người ta lại thấy rõ ràng rằng mặc dù có những bằng chứng khá vững chắc về bản chất sóng của ánh sáng, nhưng cũng có những tình huống trong đó nó hành xử như một hạt. Năm đó, Einstein đã sử dụng ý tưởng này để giải thích một số đặc tính của hiệu ứng quang điện, trong đó ánh sáng được chiếu vào một tấm kim loại thích hợp thì có thể sinh ra điện. Ông lập luận rằng các thí nghiệm này chỉ có nghĩa khi ánh sáng chiếu đến theo từng bó rời rạc: thực chất là các hạt. Ngày nay chúng được gọi là photon.

Khám phá đầy thách thức này là một trong những bước then chốt dẫn tới cơ học lượng tử mà tôi sẽ nói nhiều hơn ở chương 14. Kỳ lạ là, ý tưởng tinh túy này của cơ học lượng tử lại cực kỳ quan trọng đối với việc xây dựng thuyết tương đối của Einstein. Để đưa ra phương trình liên hệ khối lượng và năng lượng, Einstein đã tưởng tượng điều gì sẽ xảy ra đối với một vật phát ra hai photon. Để việc tính toán trở nên đơn giản, ông giới hạn mối quan tâm của mình về không gian một chiều, khi đó mọi vật sẽ chuyển động dọc theo đường thẳng. Sự đơn giản hóa này không ảnh hưởng gì đến câu trả lời. Ý tưởng cơ bản ở đây là xem xét hệ này trong hai hệ quy chiếu

khác nhau[2]. Một hệ quy chiếu chuyển động cùng với vật, do vậy trong hệ quy chiếu này vật đứng yên. Hệ kia chuyển động với một vận tốc nhỏ, nhưng khác 0 đối với vật. Tôi sẽ lần lượt gọi chúng là hệ quy chiếu đứng yên và hệ quy chiếu chuyển động. Chúng giống như con tàu không gian (trong hệ quy chiếu của chính nó thì nó đứng yên) và người quan sát của tôi tại mặt đất (đối với người này, con tàu chuyển động).

Einstein giả thiết rằng hai photon này có cùng năng lượng, nhưng được phát xạ theo hai hướng ngược nhau. Vận tốc của chúng có độ lớn bằng nhau và ngược hướng, do vậy vận tốc của vật (trong cả hai hệ quy chiếu) đều không thay đổi khi photon được phát ra. Sau đó ông tính toán năng lượng của cả hệ trước và sau khi vật phát xạ hai photon. Bằng cách giả sử rằng năng lượng được bảo toàn, ông thu được một biểu thức liên hệ độ thay đổi năng lượng của vật do sự phát xạ các photon gây ra, và độ thay đổi khối lượng (tương đối tính) của vật. Kết quả cuối cùng là:

$$\text{(độ thay đổi năng lượng)} = \text{(độ thay đổi khối lượng)} \times c^2$$

Sử dụng giả thiết hợp lý rằng một vật có khối lượng bằng 0 sẽ có năng lượng bằng 0, suy ra

$$\text{năng lượng} = \text{khối lượng} \times c^2$$

Hiển nhiên, công thức này chính là công thức nổi tiếng, trong đó E là ký hiệu cho năng lượng và m cho khối lượng.

Song song với việc tính toán, Einstein phải diễn giải ý nghĩa của chúng. Đặc biệt, ông lập luận rằng trong một hệ quy chiếu mà vật đứng yên, năng lượng cho bởi công thức trên phải được coi là năng lượng "nội tại" của nó, năng lượng mà nó sở hữu bởi vì nó được tạo thành từ các hạt hạ nguyên

tử, mỗi hạt trong số đó lại có năng lượng của riêng mình. Trong một hệ quy chiếu chuyển động, năng lượng này còn có phần đóng góp của động năng nữa. Ở đây còn có các mẹo toán học tinh tế khác như việc sử dụng một vận tốc nhỏ và các phép gần đúng cho các công thức chính xác.

Có thể nói, tên tuổi Einstein thường gắn liền với nhận thức về việc một quả bom nguyên tử sẽ giải phóng một lượng năng lượng vô cùng lớn. Dĩ nhiên, tạp chí *Time* cũng đã góp phần tạo ra ấn tượng đó vào tháng 7 năm 1946 khi họ đưa khuôn mặt Einstein lên bìa tạp chí với đám mây hình nấm làm nền, kèm theo phương trình biểu tượng của ông. Mối liên hệ giữa phương trình đó và vụ nổ khủng khiếp có vẻ như khá rõ ràng: phương trình ấy cho ta biết rằng năng lượng vốn có trong bất kỳ vật nào đều bằng khối lượng của vật đó nhân với bình phương tốc độ ánh sáng. Bởi vì tốc độ ánh sáng là khổng lồ, bình phương của nó dĩ nhiên lớn hơn nhiều, và do vậy sẽ có một lượng năng lượng rất lớn trong một lượng nhỏ vật chất. Năng lượng trong một gam vật chất tính ra bằng 90 terajun, tương đương với lượng điện sản xuất ra của một nhà máy điện hạt nhân trong một ngày.

Tuy nhiên, thực tế không diễn ra như vậy. Năng lượng giải phóng từ một quả bom nguyên tử chỉ là một phần nhỏ của khối lượng nghỉ, và các nhà vật lý, dựa trên thực nghiệm, cũng đã ý thức được rằng một số phản ứng hạt nhân có thể giải phóng nhiều năng lượng. Vấn đề kỹ thuật chủ yếu là làm sao giữ được một khối những vật liệu phóng xạ thích hợp cùng nhau đủ lâu để thu được phản ứng dây chuyền, trong đó việc phân rã của một nguyên tử phóng xạ phát ra bức xạ gây ra cùng hiệu ứng như vậy đối với những nguyên tử khác

với sự phát triển theo hàm số mũ. Tuy nhiên, phương trình của Einstein đã nhanh chóng in dấu vào tâm trí của công chúng như là nguồn gốc của bom nguyên tử. Báo cáo Smyth, một tài liệu được chính phủ Mỹ công bố nhằm giải thích về bom nguyên tử, đã đặt phương trình đó ở trang thứ hai. Tôi ngờ rằng những chuyện đã xảy ra chính là những gì mà Jack Cohen và tôi gọi là “trò lừa trẻ con” – những câu chuyện đơn giản hóa được kể với các mục đích chính thống, nhằm lát đường cho sự khai sáng một cách chính xác hơn[3]. Đó là cách mà người ta làm giáo dục: câu chuyện đầy đủ thì luôn quá phức tạp đối với tất thảy mọi người trừ các chuyên gia, mà họ lại biết quá nhiều đến mức họ không còn tin vào hầu hết câu chuyện nữa.

Tuy nhiên, cũng không thể gạt bỏ hoàn toàn phương trình của Einstein. Nó đúng là đã đóng một vai trò nhất định trong sự phát triển của vũ khí hạt nhân. Khái niệm phân hạch, nguồn gốc năng lượng của bom nguyên tử, đã nảy sinh từ các cuộc thảo luận giữa hai nhà vật lý Lise Meitner và Otto Frisch ở nước Đức quốc xã năm 1938. Họ đã cố gắng tìm hiểu các lực đã giữ cho hạt nhân bền vững, những lực này cũng hơi giống như sức căng bề mặt của một giọt chất lỏng. Họ đã đi dạo, thảo luận về vật lý, và họ đã áp dụng phương trình của Einstein để xét xem sự phân hạch có khả dĩ về mặt năng lượng hay không. Frisch sau này đã viết:[4]

> Chúng tôi cùng ngồi xuống một thân cây đổ và bắt đầu tính toán trên mấy mảnh giấy... Khi hai hạt bị tách ra, chúng sẽ bị đẩy xa nhau bởi lực đẩy tĩnh điện, vào khoảng 200MeV. Thật may, Lise Meitner đã nhớ cách tính khối lượng của các hạt nhân... và đã tìm ra rằng tổng khối

> lượng hai hạt nhân được tạo thành… nhẹ hơn khối lượng hạt nhân ban đầu khoảng một phần năm khối lượng một proton… theo công thức của Einstein $E = mc^2$… khối lượng ấy tương ứng với 200MeV. Nghĩa là khớp hoàn toàn!

Mặc dù $E = mc^2$ không trực tiếp chịu trách nhiệm về bom nguyên tử, nhưng nó là một trong những khám phá vĩ đại nhất của vật lý học đã dẫn tới sự hiểu biết rất hiệu quả về mặt lý thuyết của các phản ứng hạt nhân. Vai trò quan trọng nhất của Einstein liên quan đến quả bom nguyên tử lại là vai trò chính trị. Bị Leo Szilard thuyết phục, Einstein đã viết thư cho tổng thống Roosevelt, cảnh báo rằng các nước phát xít có lẽ đang phát triển những vũ khí nguyên tử và giải thích sức mạnh khủng khiếp của chúng. Sự nổi tiếng và tầm ảnh hưởng của ông là cực kỳ to lớn và tổng thống đã để ý tới lời cảnh báo đó. Dự án Manhattan, thảm họa Hiroshima và Nagasaki, và kế đó là Chiến tranh lạnh chỉ là một số hệ quả mà thôi.

Einstein không hài lòng với thuyết tương đối hẹp. Nó đã cung cấp một lý thuyết thống nhất của không gian, thời gian, vật chất và trường điện từ, nhưng nó lại thiếu mất một thành phần quan trọng.

Lực hấp dẫn.

Einstein tin rằng "tất cả các định luật vật lý" phải tuân theo phiên bản mở rộng của ông đối với nguyên lý tương đối Galileo. Và định luật vạn vật hấp dẫn chắc chắn phải nằm trong số đó. Nhưng điều đó không thích hợp với phiên bản lúc ấy của thuyết tương đối. Định luật nghịch đảo bình phương của Newton không biến đổi một cách đúng đắn khi chuyển từ một hệ quy chiếu này sang một hệ quy chiếu

khác. Do vậy, Einstein quyết định phải thay đổi định luật của Newton. Thực tế, ông đã thay đổi mọi thứ khác trong vũ trụ Newton, tại sao lại không chứ?

Công việc ấy đã lấy mất của ông 10 năm trời. Điểm xuất phát của Einstein là tìm ra những hệ quả của nguyên lý tương đối đối với một người quan sát chuyển động tự do dưới tác dụng của lực hấp dẫn – ví dụ như trong một cabin thang máy rơi tự do chẳng hạn. Và cuối cùng ông đã định hướng được cách phát biểu lý thuyết phù hợp. Trong công việc này, ông đã được một người bạn thân giúp đỡ, đó là nhà toán học Marcel Grossmann, người đã hướng ông chú ý tới một ngành toán học đang phát triển mạnh mẽ: hình học vi phân. Ngành toán học này đã phát triển từ khái niệm đa tạp của Riemann, và sự đặc trưng hóa của ông đối với độ cong mà ta đã thảo luận ở chương 1. Trong đó tôi đã lưu ý rằng metric Riemann có thể được viết dưới dạng một ma trận 3×3, và về mặt kỹ thuật đó thực ra là một tensor đối xứng. Có một trường phái toán học Ý, trong đó nổi bật là Tullio Levi-Civita và Gregorio Ricci-Curbastro, đã nắm lấy các ý tưởng của Riemann và phát triển chúng thành môn giải tích tensor.

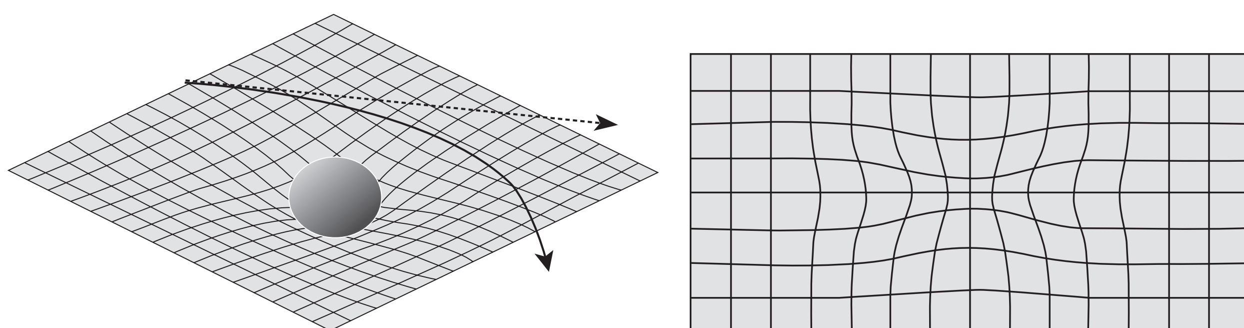
Từ năm 1912, Einstein đã bị thuyết phục rằng chìa khóa cho một lý thuyết hấp dẫn tương đối tính đòi hỏi ông phải phát biểu lại các ý tưởng của mình dựa trên giải tích tensor, nhưng trong không-thời gian bốn chiều chứ không phải trong không gian ba chiều. Các nhà toán học đã tiếp bước Riemann một cách vui vẻ và tìm ra cách tính toán với số chiều bất kỳ, họ đã thiết lập xong mọi thứ còn hơn cả tổng quát. Tóm lại, cuối cùng Einstein cũng đã rút ra được cái mà ngày nay chúng ta gọi là phương trình trường Einstein, được ông viết dưới dạng:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$$

Ở đây, *R, g, T* là các tensor – đó là những đại lượng xác định các tính chất vật lý và những biến đổi theo các quy tắc của hình học vi phân – và *K* là một hằng số. Các chỉ số dưới μ và ν chạy trên bốn tọa độ của không-thời gian, do vậy mỗi tensor là một bảng 4×4 của 16 số. Tất cả đều đối xứng, có nghĩa là chúng không thay đổi nếu μ và ν được đổi chỗ cho nhau, do vậy giúp giảm số các con số này xuống còn 10 số phân biệt. *R* là metric Riemann: nó xác định hình dạng của không-thời gian, *g* là tensor độ cong Ricci, một dạng sửa đổi khái niệm độ cong của Riemann. Và *T* là tensor năng-xung lượng, dùng để mô tả hai đại lượng cơ bản kia phụ thuộc như thế nào vào sự kiện liên quan trong không-thời gian. Einstein đã trình bày các phương trình của mình trước Viện Hàn lâm Khoa học Phổ năm 1915, và ông gọi công trình mới của mình là thuyết tương đối rộng.

Chúng ta có thể diễn giải các phương trình của Einstein theo hình học, và khi làm như vậy, chúng sẽ cung cấp cho chúng ta một cách tiếp cận mới đối với lực hấp dẫn. Sự đổi mới căn bản ở đây là ở chỗ hấp dẫn không còn được biểu diễn như một lực, mà là độ cong của không-thời gian. Nếu không tính đến hấp dẫn, không-thời gian được quy về không gian Minkowski. Công thức cho khoảng xác định tensor độ cong tương ứng. Sự diễn giải của nó là "không bị uốn cong", cũng như định lý Pythagor áp dụng cho một mặt phẳng, chứ không phải cho một không gian phi-Euclid với độ cong dương hoặc âm. Không-thời gian Minkowski là phẳng. Nhưng khi hấp dẫn xuất hiện thì không-thời gian sẽ bị uốn cong.

Phương pháp thông thường để hình dung điều này là hãy tạm quên đi thời gian, giảm số chiều không gian về hai chiều, ta sẽ có được hình 51 (*trái*). Mặt phẳng không(-thời) gian Minkowski sẽ bị biến dạng, mà ở đây là sự uốn cong thực sự, tạo ra một chỗ lõm xuống. Ở xa ngôi sao, vật chất hay ánh sáng sẽ đi theo đường thẳng (đường nét đứt). Nhưng sự cong của không gian khiến cho đường đi ấy bị bẻ cong. Thực tế, bề ngoài có vẻ như có một lực nào đó của ngôi sao đã hút vật chất tới gần nó. Nhưng không có lực nào cả, mà chỉ có không-thời gian bị cong mà thôi. Tuy nhiên, hình ảnh sự uốn cong làm biến dạng không gian dọc theo một chiều thêm vào là không nhất thiết về mặt toán học. Một cách mô tả khác là vẽ một lưới các đường trắc địa, các đường ngắn nhất, cách đều nhau theo metric cong. Chúng chụm lại với nhau khi độ cong trở nên lớn hơn, xem hình 51 (*phải*).



Hình 51 *Trái*: Không gian bị uốn cong gần một ngôi sao, và cách nó bẻ cong đường đi của vật chất hay của ánh sáng. *Phải*: Hình ảnh mô tả khác sử dụng lưới trắc địa, chụm lại ở vị trí có độ cong lớn hơn.

Nếu độ cong của không-thời gian là nhỏ, tức là nếu cái mà chúng ta nghĩ (theo lối cũ) như lực hấp dẫn là không quá lớn, thì công thức này dẫn tới định luật hấp dẫn của Newton. So sánh hai lý thuyết, hằng số Einstein K bằng với $8\pi G/c^4$, với G là hằng số hấp dẫn của Newton. Nó liên kết lý thuyết mới với

lý thuyết cũ, và chứng tỏ rằng trong hầu hết các trường hợp, lý thuyết mới sẽ phù hợp với lý thuyết cũ. Vật lý mới đầy lôi cuốn sẽ xuất hiện khi lực hấp dẫn lớn. Khi Einstein đưa ra lý thuyết của mình, mọi kiểm chứng của thuyết tương đối rộng phải được thực hiện ngoài phòng thí nghiệm, ở thang kích thước rất lớn, đó là thiên văn học.

Bởi vậy, Einstein phải tìm kiếm những tính chất đặc biệt còn chưa được giải thích trong chuyển động của các hành tinh, những hiệu ứng không còn phù hợp với lý thuyết của Newton. Và ông đã tìm ra một hiệu ứng có thể đáp ứng mong muốn: một đặc điểm không rõ ràng trong quỹ đạo của Thủy tinh, hành tinh gần Mặt Trời nhất, chịu lực hấp dẫn lớn nhất – và do vậy, nếu Einstein đúng, nó nằm trong một vùng bị uốn cong rất mạnh.

Cũng giống như tất cả các hành tinh khác, Thủy tinh chuyển động theo một quỹ đạo rất gần với hình ellip, do vậy một số điểm trên quỹ đạo sẽ gần Mặt Trời hơn các điểm khác. Vị trí gần nhất được gọi là *điểm cận nhật*. Vị trí chính xác của điểm này đã được quan sát trong nhiều năm, và có vài điều rất thú vị về nó. Điểm cận nhật quay chầm chậm quanh Mặt Trời, một hiệu ứng có tên là tiến động; và thực tế là trục lớn của quỹ đạo ellip cũng chầm chậm thay đổi hướng của nó. Tất cả đều ổn thôi; các định luật Newton đều đã tiên đoán được điều đó, bởi vì Thủy tinh không phải là hành tinh duy nhất trong Hệ Mặt Trời và những hành tinh khác cũng chậm chạp thay đổi quỹ đạo của mình. Vấn đề là ở chỗ những tính toán theo Newton cho kết quả không đúng về tốc độ tiến động. Theo tính toán đó, trục của quỹ đạo quay quá nhanh.

Vấn đề này đã được biết đến từ năm 1840 khi François Arago, giám đốc Đài Thiên văn Paris, đề nghị Urbain Le Verrier sử dụng các định luật về chuyển động và hấp dẫn của Newton để tính toán quỹ đạo của Thủy tinh. Nhưng khi đối chiếu những kết quả thu được với thời gian chính xác đi ngang qua bề mặt Mặt Trời của Thủy tinh – khi quan sát từ Trái Đất – thì họ nhận thấy các kết quả này là sai. Le Verrier quyết định thử lại, loại bỏ các nguồn sai sót tiềm tàng, và năm 1859, ông đã cho công bố những kết quả mới của mình. Theo mô hình kiểu Newton, tốc độ tiến động chính xác là cỡ 0,7%. Sự khác biệt với quan sát là rất nhỏ, cụ thể là 38 giây góc mỗi thế kỷ (sau này được sửa lại thành 43 giây góc). Đó không phải là một con số lớn, nó nhỏ hơn mười phần nghìn độ trong một năm, nhưng đủ lớn khiến Le Verrier phải quan tâm. Năm 1846, ông đã trở nên nổi tiếng nhờ việc phân tích những bất thường trong quỹ đạo của Thiên Vương tinh và dự đoán sự tồn tại, và cả vị trí nữa, của một hành tinh mà sau này mới được phát hiện: Hải Vương tinh. Và giờ đây ông đang hy vọng có thể lặp lại kỳ tích này. Ông lý giải chuyển động bất thường của điểm cận nhật như là một bằng chứng cho sự tồn tại của một thiên thể chưa được biết đến đã gây nhiễu động quỹ đạo của Thủy tinh. Ông tính toán số liệu và dự đoán sự tồn tại của một hành tinh nhỏ hơn với quỹ đạo gần Mặt Trời hơn Thủy tinh. Thậm chí ông còn đặt tên cho nó là Vulcan, vị chúa tể lửa của người La Mã.

Việc quan sát Vulcan, nếu nó tồn tại, cũng sẽ rất khó khăn. Ánh sáng chói lòa từ Mặt Trời là một cản trở lớn, do vậy cơ hội lớn nhất là phải chụp được Vulcan khi nó đi qua Mặt Trời, khi nó trở thành một chấm tối cực nhỏ nổi bật trên cái đĩa Mặt Trời chói lòa. Không lâu sau dự đoán của Le Verrier, một

nhà thiên văn học nghiệp dư tên là Edmond Lescarbault đã thông báo tới nhà thiên văn đã thành danh kia rằng ông ta đã quan sát được Vulcan. Ban đầu ông ta cứ nghĩ đó là một vết đen Mặt Trời, nhưng nó di chuyển với tốc độ không phù hợp. Năm 1860, Le Verrier gửi thông báo đã khám phá ra Vulcan tới Viện Hàn lâm Khoa học Paris, và chính phủ đã trao cho Lescarbault Huân chương Bắc Đẩu bội tinh danh giá.

Giữa những ồn ào náo nhiệt ấy, một vài nhà thiên văn vẫn tỏ ra không mấy quan tâm. Một trong số đó là Emmanuel Liais, người đã nghiên cứu Mặt Trời với các thiết bị tốt hơn của Lescarbault rất nhiều. Ông cũng là nhà thiên văn có tiếng tăm: ông đã thực hiện các quan trắc Mặt Trời cho chính phủ Brazil, và thật là một điều hổ thẹn nếu bỏ qua những thông tin quan trọng như thế. Ông thẳng thừng bác bỏ chuyển động đi ngang Mặt Trời của Vulcan. Trong thời gian đó, mọi thứ trở nên lộn xộn, chẳng có gì là rõ ràng. Những người nghiệp dư vẫn tiếp tục khẳng định mình đã quan sát được Vulcan, đôi khi còn trước cả khi Le Verrier công bố tiên đoán của ông vài ba năm. Năm 1878, James Watson, một nhà thiên văn chuyên nghiệp, và Lewis Swift, một người nghiệp dư, đã tuyên bố rằng họ quan sát thấy một hành tinh giống như Vulcan trong suốt thời gian xảy ra nhật thực. Le Verrier đã mất một năm trước đó, ông vẫn tin là mình đã tìm ra một hành tinh mới gần Mặt Trời, nhưng không còn nhiệt huyết để tính toán quỹ đạo và dự đoán về sự đi ngang Mặt Trời nữa – mà thực tế không hề có chuyện đó – và rồi sự quan tâm đến Vulcan cũng nhanh chóng tắt ngấm. Các nhà thiên văn trở nên hoài nghi.

Năm 1915, Einstein đã thực hiện đòn quyết định. Ông sử dụng thuyết tương đối rộng để phân tích lại chuyển động của Thủy tinh mà không đưa ra giả thiết về bất kỳ hành tinh mới

nào, và một tính toán đơn giản và rõ ràng đã dẫn ông tới 43 giây góc cho chuyển động tiến động – một con số chính xác thu được sau khi cập nhật những tính toán ban đầu của Le Verrier. Những tính toán hiện đại theo mô hình Newton tiên đoán tốc độ tiến động là 5560 giây góc một thế kỷ, nhưng số liệu quan sát lại cho kết quả là 5600. Khác biệt là 40 giây góc, do vậy 3 giây góc dư ra trong mỗi thế kỷ vẫn chưa được giải thích. Như vậy, kết quả của Einstein đã làm được hai việc: nó được nhìn nhận như là một minh chứng cho thuyết tương đối, và theo quan điểm của hầu hết các nhà thiên văn, nó đã tống khứ Vulcan vào đống phế liệu[5].

Một kiểm chứng thiên văn nổi tiếng khác cho thuyết tương đối rộng là tiên đoán của Einstein rằng Mặt Trời bẻ cong ánh sáng. Lý thuyết hấp dẫn của Newton cũng tiên đoán điều này, nhưng thuyết tương đối rộng dự đoán mức bẻ cong lớn gấp đôi. Hiện tượng nhật thực toàn phần năm 1919 đã mang tới một cơ hội để kiểm chứng hai lý thuyết, và Sir Arthur Eddington đã thực hiện một cuộc thám hiểm, cuối cùng thông báo rằng Einstein đã đúng. Kết quả này được đón nhận nồng nhiệt vào thời điểm đó, nhưng sau này hóa ra các số liệu thu được lại rất nghèo nàn, và kết quả ấy đã bị hoài nghi. Những quan sát độc lập sau đó từ năm 1922 dường như phù hợp với tiên đoán của thuyết tương đối, và cũng giống với kết quả phân tích lại sau này các số liệu của Eddington. Tới những năm trong thập niên 60, người ta có thể thực hiện các quan sát với bức xạ sóng ở tần số vô tuyến, và chỉ khi đó mới chắc chắn rằng các dữ liệu đã thực sự cho thấy độ lệch lớn gấp đôi tiên đoán của Newton, đúng bằng với tiên đoán của Einstein.

Tiên đoán sâu sắc nhất của thuyết tương đối rộng nảy sinh ở một thang kích thước lớn hơn nhiều, đó là các lỗ đen, được sinh ra khi một ngôi sao siêu nặng co sập lại dưới tác dụng của lực hấp dẫn riêng của nó và sự giãn nở của vũ trụ, vào lúc đó đang được giải thích bởi thuyết Big Bang.

Nghiệm của các phương trình Einstein là những dạng hình học của không - thời gian. Chúng có thể biểu diễn vũ trụ như một tổng thể, hay một phần nào đó của nó, với giả thiết là cô lập về mặt hấp dẫn và do vậy không chịu ảnh hưởng đáng kể của phần còn lại của vũ trụ. Điều này cũng tương tự như những giả thiết trong mô hình Newton trước đây, như chỉ có hai vật tương tác với nhau chẳng hạn. Bởi vì các phương trình trường của Einstein có tới mười biến, nên rất hiếm thấy các nghiệm tường minh được biểu diễn dưới dạng các công thức toán học. Ngày nay chúng ta có thể giải các phương trình này bằng phương pháp số, nhưng trước những năm 1960, đó chỉ là một giấc mơ hão huyền, bởi vì khi đó máy tính vẫn còn chưa ra đời hoặc chỉ có các tính năng hết sức hạn chế, không mấy hữu dụng. Cách thông thường để đơn giản hóa các phương trình là viện đến sự đối xứng. Giả sử rằng các điều kiện ban đầu cho không-thời gian có tính đối xứng cầu, tức là tất cả các đại lượng vật lý chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tới tâm. Khi đó số biến trong mô hình sẽ giảm đi rất nhiều. Năm 1916, nhà vật lý thiên văn người Đức Karl Schwarzschild đã áp dụng giả thiết này cho các phương trình Einstein và giải các phương trình đã được đơn giản hóa nhờ giả thiết trên, ông thu được nghiệm là một công thức chính xác, được biết đến dưới cái tên metric Schwarzschild. Công thức của ông có một đặc điểm lạ lùng: nó có một kỳ dị. Nghĩa là nghiệm của các phương trình này trở thành vô hạn ở một khoảng cách cụ

thể tính từ tâm, được gọi là bán kính Schwarzschild. Ban đầu điểm kỳ dị này chỉ được xem như là một tạo tác thuần túy toán học, và ý nghĩa vật lý của nó là chủ đề của nhiều cuộc tranh luận. Ngày nay chúng ta diễn giải nó là chân trời sự cố của một lỗ đen.

Hãy tưởng tượng một ngôi sao đủ nặng để những bức xạ của nó không thắng nổi trường hấp dẫn của chính mình. Ngôi sao sẽ bắt đầu co sập lại dưới tác dụng của trọng lực của chính nó. Càng trở nên đặc hơn, hiệu ứng này càng mạnh, do vậy sự co sập lại diễn ra càng nhanh hơn. Vận tốc thoát, tức tốc độ một vật phải đạt được để thoát khỏi trường hấp dẫn của ngôi sao cũng tăng. Metric Schwarzschild cho chúng ta biết, trong một số trường hợp, vận tốc thoát đúng bằng vận tốc ánh sáng. Khi đó thì không vật nào có thể thoát ra được nữa, bởi vì không có gì chuyển động nhanh hơn ánh sáng cả. Ngôi sao trở thành một lỗ đen, và bán kính Schwarzschild cho ta biết vùng mà không gì có thể thoát ra được, được giới hạn bởi chân trời sự cố của lỗ đen.

Vật lý của lỗ đen rất phức tạp, và không có đủ chỗ để diễn giải một cách tường minh ở đây. Chỉ cần nói thế này: hầu hết các nhà vũ trụ học đều hài lòng vì tiên đoán về lỗ đen là chính xác, rằng vũ trụ có chứa vô số các lỗ đen và thực tế, chí ít là có một lỗ đen ẩn náu ở tâm thiên hà của chúng ta. Mà thực ra là ở tâm của hầu hết các thiên hà.

Năm 1917, Einstein đã áp dụng các phương trình của mình cho toàn bộ vũ trụ, với một giả thiết khác về đối xứng, đó là giả thiết về tính đồng nhất. Cụ thể là vũ trụ nhìn phải như nhau (ở thang kích thước đủ lớn) tại tất cả các điểm không gian và thời gian. Từ đó ông đã sửa chữa các phương trình của mình và

thêm vào một "hằng số vũ trụ" Λ, và đưa ra ý nghĩa của hằng số *K*. Các phương trình giờ đây được viết dưới dạng:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\mu G}{c^4 T_{\mu\nu}}$$

Thực ra, nghiệm của phương trình trước đó có một hệ quả đáng ngạc nhiên: vũ trụ sẽ co lại theo thời gian. Nó khiến Einstein phải thêm vào một số hạng có chứa hằng số vũ trụ: ông đang tìm kiếm một vũ trụ ổn định, không thay đổi, và bằng cách điều chỉnh giá trị của hằng số vũ trụ cho phù hợp, ông có thể khiến mô hình vũ trụ của mình ngừng co lại thành một điểm. Năm 1922, Alexander Friedmann tìm thấy một phương trình khác, phương trình này tiên đoán vũ trụ sẽ giãn nở và không đòi hỏi phải có hằng số vũ trụ. Nó cũng tiên đoán được cả tốc độ giãn nở nữa. Nhưng Einstein không hài lòng: ông muốn vũ trụ ổn định và không thay đổi.

Lần này, trí tưởng tượng của Einstein đã đánh lừa ông. Năm 1929, hai nhà thiên văn người Mỹ Edwin Hubble và Milton Humason đã tìm thấy bằng chứng cho hiện tượng vũ trụ *đang* giãn nở. Các thiên hà ở xa đang chạy ra xa chúng ta, có thể nhận thấy qua sự dịch về phía đỏ trong phổ phát xạ ánh sáng của chúng – hiệu ứng Doppler nổi tiếng, tương tự như đối với âm thanh: tiếng còi của một xe cứu thương nghe trầm dần khi nó vượt qua chúng ta, bởi vì sóng âm bị ảnh hưởng bởi vận tốc tương đối của nguồn phát và nguồn thu. Đối với trường hợp của chúng ta, các sóng là sóng điện từ và vật lý là tương đối tính, nhưng vẫn có hiệu ứng Doppler. Các thiên hà không chỉ đang chạy ra xa chúng ta, mà càng ở xa thì chúng càng chạy đi nhanh hơn.

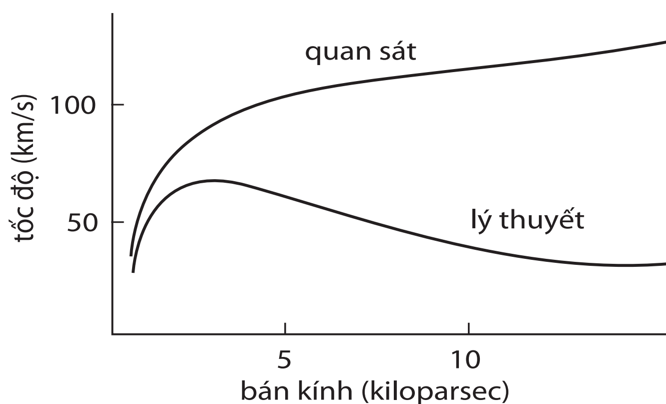
Đảo ngược quá trình giãn nở này theo thời gian, hóa ra ở

thời điểm nào đó trong quá khứ, toàn bộ vũ trụ căn bản chỉ là một điểm mà thôi, trước đó không có gì tồn tại cả. Ở thời khắc ban đầu, không gian và thời gian cùng bắt đầu hiện hữu trong lý thuyết Big Bang nổi tiếng, một lý thuyết được đề xuất bởi nhà toán học người Pháp George Lemaitre năm 1927, nhưng hầu như không được ai chú ý đến. Vào năm 1964, khi các kính thiên văn vô tuyến quan sát thấy bức xạ viba nền vũ trụ, ở một nhiệt độ phù hợp với mô hình Big Bang, các nhà vũ trụ học cho rằng rốt cuộc thì Lemaitre cũng đã đúng. Một lần nữa, chủ đề này xứng đáng dành cho riêng nó một quyển sách, nhưng đã có nhiều người khác viết rồi. Chỉ cần nói thế này: lý thuyết về vũ trụ hiện đang được chấp nhận rộng rãi nhất chỉ là sự phác thảo tỉ mỉ hơn cho kịch bản Big Bang mà thôi.

Tuy nhiên, tri thức khoa học không phải nhất thành bất biến. Những khám phá mới có thể làm cho nó thay đổi. Thuyết Big Bang đã được chấp nhận như một mô hình vũ trụ trong suốt 30 năm qua, nhưng nó bắt đầu cho thấy có một số vết rạn nứt. Một số khám phá mới hoặc đã đưa ra những quan ngại sâu sắc về thuyết này, hoặc đòi hỏi phải có những hạt và các lực vật lý mới, đã được suy đoán ra nhưng còn chưa được phát hiện thấy. Có ba khó khăn chính. Tôi sẽ nêu tóm tắt trước, và sẽ thảo luận chi tiết từng khó khăn sau. Khó khăn đầu tiên là về các đường cong quay của thiên hà, chúng gợi ý rằng hầu hết vật chất trong vũ trụ còn chưa phát hiện được. Đề xuất hiện tại cho rằng đó là dấu hiệu của một loại vật chất mới, vật chất tối, chiếm tới 90% lượng vật chất trong vũ trụ, nó khác hẳn với bất kỳ loại vật chất nào mà chúng ta đã quan sát được một cách trực tiếp trên Trái Đất. Khó khăn thứ hai là gia tốc của sự giãn nở vũ trụ, nó đòi hỏi phải có một loại lực mới gọi là năng lượng tối, với nguồn gốc

chưa được biết nhưng có thể mô hình hóa được nhờ sử dụng hằng số vũ trụ của Einstein. Khó khăn thứ ba là tập hợp các vấn đề lý thuyết liên quan tới lý thuyết phổ biến về sự lạm phát, lý thuyết giải thích tại sao vũ trụ quan sát được lại đồng nhất đến thế. Lý thuyết này phù hợp với các quan sát, nhưng logic nội tại của nó lại chưa được vững chắc lắm.

Trước tiên hãy nói về vật chất tối. Năm 1938, hiệu ứng Doppler đã được dùng để đo tốc độ của các thiên hà trong các đám, nhưng kết quả thu được không phù hợp với lý thuyết hấp dẫn của Newton. Các thiên hà ở cách nhau rất xa, không-thời gian gần như là phẳng, và thuyết hấp dẫn của Newton lẽ ra phải là một mô hình tốt. Để giải thích sự không phù hợp nói trên, Fritz Zwicky đã đề xuất rằng phải có một lượng vật chất không quan sát được và được gọi là vật chất tối vì chúng không được nhìn thấy trong các bức ảnh. Năm 1959, áp dụng hiệu ứng Doppler để đo tốc độ quay của các ngôi sao trong thiên hà M33, Louis Volders đã khám phá ra rằng đường cong quay quan sát được – tức đồ thị biểu diễn vận tốc theo khoảng cách tính từ tâm – cũng không phù hợp với lý thuyết hấp dẫn của Newton. Thay vì giảm dần khi khoảng cách tăng, vận tốc hầu như không thay đổi (xem hình 52). Chính vấn đề này cũng nảy sinh trong nhiều thiên hà khác.



Hình 52 Đường cong quay của thiên hà đối với M33: Lý thuyết và quan sát.

Nếu tồn tại, vật chất tối phải khác hẳn với vật chất "baryonic" thông thường, những hạt quan sát thấy trong các thí nghiệm trên Trái Đất. Sự tồn tại của vật chất tối đã được hầu hết các nhà vũ trụ học chấp nhận, họ lập luận rằng vật chất tối đã giải thích được một số các dị thường khác nhau trong các quan sát, chứ không chỉ riêng cho các đường cong quay. Các hạt ứng viên cũng đã được đề xuất, chẳng hạn như WIMP (các hạt nặng tương tác yếu), nhưng cho tới nay những hạt này vẫn chưa được thực nghiệm phát hiện. Phân bố của vật chất tối xung quanh các thiên hà đã được dựng thành đồ thị bằng việc giả thiết rằng vật chất tối tồn tại và tìm xem nó phải có mặt ở đâu để làm cho các đường cong quay là phẳng. Nhìn chung, nó dường như tạo thành hai quả cầu có kích thước cỡ thiên hà, một ở bên trên mặt phẳng thiên hà và một ở bên dưới, giống như một quả tạ tay khổng lồ vậy. Điều này cũng tựa như tiên đoán sự tồn tại của Hải Vương tinh từ những sai lệch trong quỹ đạo của Thiên Vương tinh, nhưng những tiên đoán như vậy cần phải được kiểm chứng: phải tìm ra được Hải Vương tinh.

Năng lượng tối cũng được đề xuất một cách tương tự để giải thích các kết quả trong năm 1998 của nhóm High-z Supernova Search, với hy vọng tìm ra bằng chứng cho thấy sự giãn nở của vũ trụ đang chậm lại khi xung chấn nguyên thủy từ Big Bang đang tắt dần. Nhưng các quan sát lại chỉ ra rằng sự giãn nở của vũ trụ không chậm lại mà đang tăng tốc, một khám phá đã được kiểm chứng bởi Dự án sao siêu mới trong năm 1999. Như thể có một lực phản hấp dẫn nào đó tràn ngập khắp không gian, đẩy các thiên hà ra xa nhau với tốc độ ngày càng tăng. Lực này không nằm trong số bốn

lực cơ bản của vật lý: lực hấp dẫn, lực điện từ, lực hạt nhân mạnh và lực hạt nhân yếu. Nó được đặt tên là năng lượng tối. Lại một lần nữa, sự tồn tại của năng lượng này dường như sẽ giúp giải quyết một số vấn đề khác nữa trong vũ trụ học.

Lý thuyết lạm phát (*inflation*) được nhà vật lý người Mỹ Alan Guth đề xuất vào năm 1980 để giải thích tại sao vũ trụ lại cực kỳ đồng đều trong những tính chất vật lý của nó ở những thang kích thước rất lớn. Lý thuyết cho thấy rằng Big Bang đáng lẽ phải sinh ra một vũ trụ bị uốn cong hơn rất nhiều. Guth đề xuất rằng một "trường inflaton" (phải, không có chữ i thứ hai đâu: nó được coi như một trường lượng tử vô hướng, tương ứng với một hạt giả thuyết, có tên là flaton) đã khiến cho vũ trụ ở giai đoạn đầu giãn nở cực kỳ nhanh. Giữa giây thứ 10^{-36} và giây thứ 10^{-32} sau Big Bang, thể tích của vũ trụ tăng với một thừa số lớn không tưởng tượng nổi là 10^{78}. Trường inflaton hiện vẫn chưa quan sát được (việc này đòi hỏi mức năng lượng cao không tưởng) nhưng sự lạm phát giải thích được rất nhiều đặc điểm của vũ trụ, và lại rất phù hợp với các quan sát, đến nỗi nhiều nhà vũ trụ học đã bị thuyết phục rằng nó đã thực sự xảy ra.

Không có gì phải ngạc nhiên rằng vật chất tối, năng lượng tối và sự lạm phát lại rất phổ biến trong cộng đồng các nhà vũ trụ học, bởi vì chúng cho phép họ tiếp tục sử dụng những mô hình vật lý ưa thích của họ, và cho những kết quả phù hợp với quan sát. Nhưng mọi thứ đang bắt đầu xa rời nhau.

Sự phân bố của vật chất tối không đưa ra được một sự giải thích thỏa đáng cho các đường cong quay. Phải cần có những lượng vật chất tối khổng lồ để giữ cho các đường cong quay là phẳng ở những khoảng cách lớn mà người ta đã quan sát

được. Rồi vật chất tối lại phải có một momen động lượng lớn tới mức phi thực, nhưng điều này lại không nhất quán với các lý thuyết thông thường về sự hình thành của các thiên hà. Trong mỗi thiên hà cũng lại phải có phân bố ban đầu khá đặc biệt tương tự của vật chất tối, mà điều này xem ra có vẻ ít có khả năng xảy ra. Hình dạng quả tạ tay cũng không bền vì nó đặt thêm khối lượng vào bên ngoài của thiên hà.

Tình hình của năng lượng tối có vẻ tốt hơn, nó được coi như một loại năng lượng chân không theo cơ học lượng tử, nảy sinh từ những thăng giáng trong chân không. Tuy nhiên, những tính toán hiện nay cho kích cỡ của năng lượng chân không là quá lớn, với một thừa số là 10^{122}, và rõ ràng đây là một tin xấu thậm chí theo những tiêu chuẩn của vũ trụ học[6].

Vấn đề chính ảnh hưởng tới lý thuyết lạm phát không phải là những quan sát – bởi kết quả phù hợp đến ngạc nhiên – mà là những cơ sở logic của nó. Hầu hết những kịch bản lạm phát đều dẫn tới một vũ trụ khác đáng kể so với vũ trụ mà ta đang sống; điều đáng được quan tâm là những điều kiện ban đầu ở thời điểm xảy ra Big Bang. Để phù hợp với các quan sát, lý thuyết lạm phát đòi hỏi trạng thái ban đầu của vũ trụ phải rất đặc biệt. Tuy nhiên, có rất nhiều những điều kiện ban đầu đặc biệt cũng cho kết quả là một vũ trụ giống vũ trụ của chúng ta nhưng không cần viện đến lạm phát. Mặc dù cả hai tập hợp các điều kiện ấy đều hiếm khi xảy ra, nhưng những tính toán đã được thực hiện bởi Roger Penrose[7] cho thấy các điều kiện ban đầu ấy không đòi hỏi mức lạm phát tới 10 lũy thừa 10 lũy thừa 100. Do vậy việc giải thích trạng thái hiện thời của vũ trụ không lạm phát sẽ thuyết phục hơn nhiều so với giải thích có lạm phát.

Tính toán của Penrose dựa trên nhiệt động lực học, có thể chưa chắc đã là một mô hình phù hợp, nhưng một cách tiếp cận khác, do Gary Gibbons và Neil Turok thực hiện, cũng dẫn tới cùng một kết luận như vậy. Đó là "quay ngược lại cuốn phim" vũ trụ về trạng thái ban đầu của nó. Hóa ra hầu hết những trạng thái ban đầu tiềm tàng đều không bao gồm một thời kỳ lạm phát nào cả, còn những trạng thái đòi hỏi lạm phát đều chiếm tỉ lệ quá nhỏ. Nhưng vấn đề lớn nhất là khi lý thuyết lạm phát kết hợp cùng cơ học lượng tử, nó tiên đoán rằng đôi khi những thăng giáng lượng tử sẽ khởi phát sự lạm phát ở một vùng nhỏ của một vũ trụ rõ ràng là đã an bài. Mặc dù những thăng giáng như vậy rất hiếm, nhưng sự lạm phát xảy ra nhanh, và khổng lồ tới mức kết quả cuối cùng là những đảo nhỏ của không-thời gian thông thường, được bao quanh bởi những vùng liên tục phình to ra do sự lồng lộn của lạm phát. Trong những vùng này, các hằng số cơ bản của vật lý có thể sẽ khác với các giá trị của chúng trong vũ trụ của chúng ta. Thực tế, mọi chuyện đều có thể xảy ra. Mà một lý thuyết tiên đoán *mọi thứ* thì liệu có thể kiểm chứng một cách khoa học được không?

Cũng có những hướng đi khác và cần phải được xem xét một cách nghiêm túc. Vật chất tối có thể không phải là một Hải Vương tinh khác, nhưng có thể là một Vulcan – một nỗ lực để giải thích sự dị thường của hấp dẫn bằng cách viện đến một vật chất mới, trong khi những thứ thực sự cần phải thay đổi lại là định luật hấp dẫn.

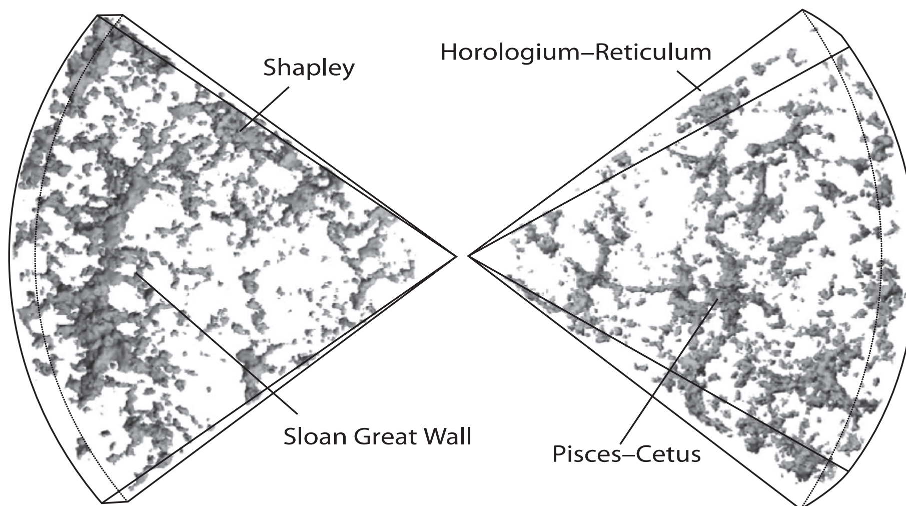
Đề xuất chính đã được phát triển tốt là MOND (viết tắt của *modified Newtonian dynamics* – động lực học Newton sửa đổi), do nhà vật lý người Israel Mordehai Milgrom đưa ra

vào năm 1983. Thực ra, hướng đi này không phải là sửa đổi định luật hấp dẫn, mà là định luật thứ hai về chuyển động của Newton. Nó cho rằng gia tốc không tỉ lệ với lực tác dụng khi gia tốc rất nhỏ. Có một xu hướng trong các nhà vũ trụ học cho rằng những lý thuyết thay thế khả dĩ duy nhất là vật chất tối hoặc MOND – do vậy nếu MOND không phù hợp với quan sát, thì chỉ còn lại vật chất tối mà thôi. Tuy nhiên, cũng có nhiều cách tiềm tàng để sửa đổi định luật vạn vật hấp dẫn, nhưng chúng ta khó có thể tìm thấy hướng đi đúng đắn ngay lập tức. Sự cáo chung của MOND đã được tuyên bố vài lần, nhưng người ta vẫn chưa tìm thấy sai lầm có tính quyết định trong những nghiên cứu sau đó. Vấn đề chính với MOND, theo tôi, là nó đặt tất cả những gì nó hy vọng tìm được vào các phương trình của nó; cũng giống như Einstein sửa đổi định luật của Newton để thay đổi công thức ở gần một vật có khối lượng lớn. Nhưng thay vì thế, ông lại tìm thấy cách suy nghĩ mới một cách triệt để về hấp dẫn, đó là độ cong của không-thời gian.

Thậm chí nếu chúng ta vẫn giữ thuyết tương đối rộng và gần đúng Newton của nó, thì cũng có thể không cần tới vật chất tối. Năm 2009, sử dụng toán học của các sóng xung kích, hai nhà toán học người Mỹ là Joel Smoller và Blake Temple đã chỉ ra rằng có những nghiệm của các phương trình trường Einstein trong đó metric giãn có gia tốc[8]. Các nghiệm này chỉ ra rằng những sự thay đổi nhỏ trong Mô hình chuẩn có thể giải thích sự gia tốc quan sát được của các thiên hà mà không cần viện đến năng lượng tối.

Các mô hình theo thuyết tương đối rộng của vũ trụ giả thiết rằng nó tạo thành một đa tạp; tức là ở các thang kích thước rất lớn thì nó là trơn. Tuy nhiên, phân bố quan sát được của

vật chất trong vũ trụ ở thang kích thước lớn lại có dạng các khối, giống như Sloan Great Wall, một sợi tạo thành từ các thiên hà dài 1,37 tỉ năm ánh sáng, hình 53. Các nhà vũ trụ học thì tin rằng ở thang kích thước lớn hơn nữa, tính trơn của vũ trụ sẽ trở nên rõ ràng – nhưng cho tới ngày nay, mỗi khi tầm quan sát vũ trụ được mở rộng thêm, thì tính cụm lại thành khối vẫn cứ trơ ra đó.



Hình 53 Tính kết thành khối của vũ trụ.

Hai nhà toán học người Anh là Robert MacKay và Colin Rourke đã lập luận rằng một vũ trụ với tính kết thành khối, trong đó nhiều nơi có những nguồn cục bộ gây ra độ cong lớn, có thể giải thích được tất cả các vấn đề nan giải của vũ trụ học[9]. Một cấu trúc như vậy gần với những gì quan sát được hơn là sự trơn tru ở thang kích thước lớn nào đó và nhất quán với nguyên lý tổng quát quy định rằng vũ trụ phải hầu như đồng nhất ở khắp mọi nơi. Trong một vũ trụ như vậy, không cần phải có Big Bang nào cả; thực tế, tất cả mọi thứ có thể ở một trạng thái ổn định, và già, già hơn rất nhiều so với con số hiện tại về tuổi 13,8 tỉ năm của vũ trụ. Từng thiên hà riêng biệt có thể trải qua vòng đời của mình, khoảng 10^{16}

năm, hầu như không thay đổi. Chúng có thể có một lỗ đen siêu nặng ở trung tâm. Đường cong quay của thiên hà có thể là đường cong phẳng do lực kéo quán tính, một hệ quả của thuyết tương đối rộng, trong đó một vật nặng khi quay sẽ kéo không-thời gian ở vùng lân cận quay theo. Sự dịch chuyển về phía đỏ quan sát được trong các quasar (chuẩn tinh) có thể là do một trường hấp dẫn mạnh gây ra, chứ không phải do hiệu ứng Doppler, và đó không phải là dấu hiệu của một vũ trụ đang giãn nở – lý thuyết này đã tiến một bước dài do công lao của nhà thiên văn người Mỹ Halton Arp, và chưa từng bị phản bác một cách thỏa đáng. Một mô hình khác thậm chí còn chỉ ra nhiệt độ 5ºK của bức xạ nền vũ trụ, một bằng chứng chính (bên cạnh sự dịch chuyển về phía đỏ được giải thích như sự giãn nở) của Big Bang.

MacKay và Rourke cho rằng đề xuất của họ "gần như lật nhào mọi nguyên lý của vũ trụ học hiện đại. Tuy nhiên, nó lại không hề mâu thuẫn với bất kỳ bằng chứng quan sát nào". Cũng có thể nó sai, nhưng điểm hấp dẫn ở đây là bạn có thể giữ nguyên các phương trình trường của Einstein, bỏ qua vật chất tối, năng lượng tối và sự lạm phát, mà vẫn nhận được dáng điệu hợp lý giống như tất cả những quan sát lạ lùng kia. Do vậy, cho dù số phận của lý thuyết này có như thế nào đi nữa, thì nó cũng gợi ý rằng các nhà vũ trụ học nên xem xét những mô hình toán học giàu tưởng tượng hơn trước khi viện đến những lý thuyết vật lý mới mà không có căn cứ. Vật chất tối, năng lượng tối, lý thuyết lạm phát, mỗi thứ đều triệt để đòi hỏi một vật lý mới, mà chưa ai quan sát được... Trong khoa học, ngay cả một vị cứu tinh thần thánh (*deux ex machina*) cũng sẽ phải bó tay. Ba lý thuyết trên sẽ

bị coi là không thể chấp nhận được trong bất kỳ một lĩnh vực nào khác trừ vũ trụ học. Công bằng mà nói, thật khó có thể làm thí nghiệm trên toàn bộ vũ trụ, do vậy tất cả những gì mà chúng ta có thể làm là làm cho các lý thuyết phù hợp với các quan sát một cách tư biện mà thôi. Nhưng hãy thử tưởng tượng xem điều gì sẽ xảy ra nếu một nhà sinh học giải thích sự sống bằng một thứ "trường sống" không hề quan sát được nào đó, và tự ý đề xuất rằng cần phải có một loại "vật chất sống" mới và một loại "năng lượng sống" mới – trong khi không đưa ra được một bằng chứng nào đối với sự tồn tại của chính bản thân chúng.

Tạm bỏ sang một bên địa hạt đầy phức tạp của vũ trụ học, hiện nay có nhiều cách giản dị hơn để kiểm chứng thuyết tương đối, cả hẹp và rộng, ở thang kích thước con người. Thuyết tương đối hẹp có thể kiểm chứng được trong phòng thí nghiệm và các kỹ thuật đo đạc hiện đại có độ chính xác rất cao. Các máy gia tốc hạt như Máy Va Chạm Hadron Lớn (LHC) sẽ không hoạt động nếu những người thiết kế nó không tính đến thuyết tương đối hẹp, bởi vì các hạt chạy vòng quanh các máy đó thực chất là chuyển động với tốc độ rất gần với tốc độ ánh sáng. Hầu hết những kiểm chứng thuyết tương đối rộng vẫn là các kiểm chứng trong lĩnh vực thiên văn học, trải từ hiệu ứng thấu kính hấp dẫn tới động lực học các pulsar (sao xung), với độ chính xác ở mức cao. Một thí nghiệm gần đây của NASA ở quỹ đạo thấp gần Trái Đất, sử dụng những con quay hồi chuyển có độ chính xác cao, đã xác minh được hiệu ứng kéo hệ quy chiếu quán tính thực sự diễn ra, nhưng không đạt được đến độ chính xác đã định bởi những hiệu ứng tĩnh điện không mong muốn. Hiện nay, các số liệu của bài toán

này đã được chỉnh sửa lại, và các thí nghiệm khác cũng đạt được kết quả như vậy.

Tuy nhiên, có một ví dụ của động lực học tương đối tính, theo cả nghĩa hẹp và rộng, có ảnh hưởng trực tiếp đến đời sống chúng ta hơn: điều hướng ôtô bằng vệ tinh. Hệ thống điều hướng bằng vệ tinh tính toán vị trí của ôtô bằng cách sử dụng các tín hiệu từ một mạng 24 vệ tinh, gọi là hệ thống định vị toàn cầu GPS. GPS chính xác đến kinh ngạc, và nó hoạt động được là nhờ các kỹ thuật điện tử hiện đại có thể xử lý và đo đạc một cách đáng tin cậy những khoảng thời gian cực nhỏ. Nó dựa trên sự định thời cực kỳ chính xác các tín hiệu, tức các xung phát từ vệ tinh và được thu dưới mặt đất. So sánh các tín hiệu từ vài vệ tinh, bằng tam giác lượng, người ta xác định được vị trí của nguồn thu với sai số trong vòng vài mét. Độ chính xác này đòi hỏi phải biết được khoảng thời gian với sai số trong khoảng 22 nano giây (phần tỉ của giây). Động lực học Newton không thể cung cấp vị trí chính xác đến như thế, bởi vì có hai hiệu ứng làm thay đổi dòng chảy của thời gian đã không được tính đến trong các phương trình Newton, đó là chuyển động của vệ tinh và trường hấp dẫn của Trái Đất.

Thuyết tương đối hẹp xử lý các vấn đề gắn với chuyển động, và nó tiên đoán rằng đồng hồ nguyên tử trên các vệ tinh sẽ chậm 7 micro giây (một phần triệu của giây) mỗi ngày khi được so sánh với đồng hồ dưới mặt đất do sự giãn nở tương đối của thời gian. Còn thuyết tương đối rộng tiên đoán đồng hồ trên vệ tinh nhanh 45 micro giây mỗi ngày do trường hấp dẫn của Trái Đất gây ra. Kết quả cuối cùng là đồng hồ nhanh 38 micro giây mỗi ngày vì những nguyên nhân tương đối tính.

Có vẻ như là quá nhỏ, nhưng ảnh hưởng của nó đến các tín hiệu GPS thì lại không thể bỏ qua được. Một sai số 38 micro giây tức là 38.000 nano giây, gấp 1500 lần sai số mà GPS có thể chấp nhận được. Nếu phần mềm tính toán vị trí ôtô của bạn dựa trên động lực học Newton, thì sự điều hướng bằng vệ tinh cho ôtô của bạn sẽ trở thành vô dụng, bởi vì sai số sẽ tăng theo tốc độ 10km mỗi ngày. Mười phút sau, hệ thống GPS Newton sẽ đưa bạn đến nhầm đường phố; và ngày mai nó sẽ dẫn bạn đến nhầm thị trấn. Trong một tuần bạn sẽ ở trong một tỉnh khác; trong một tháng, bạn sẽ đến nhầm một nước khác. Và trong một năm, bạn sẽ đến nhầm một hành tinh khác. Nếu bạn không tin vào thuyết tương đối nhưng lại sử dụng hệ thống điều hướng bằng vệ tinh để chuẩn bị cho hành trình của mình, thì có một số điều bạn sẽ cần phải tìm hiểu đấy.

14 Lượng tử kỳ bí
Phương trình Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$$

tốc độ biến thiên
căn bậc hai của âm một
hàm sóng lượng tử
hằng số Planck chia cho 2π
theo thời gian
toán tử Hamilton

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Phương trình này mô hình hóa vật chất không phải là hạt mà là sóng và mô tả cách thức lan truyền của nó.

Tại sao nó lại quan trọng?

Phương trình Schrödinger là phương trình cơ bản đối với cơ học lượng tử, cùng với thuyết tương đối tổng quát tạo nên những lý thuyết hiệu quả nhất hiện nay của vũ trụ vật lý.

Nó đã dẫn tới những gì?

Sự xem xét lại một cách triệt để vật lý của thế giới ở những thang rất nhỏ, trong đó mọi đối tượng đều có một "hàm sóng" mô tả đám mây xác suất của các trạng thái khả dĩ. Ở cấp độ đó, thế giới về bản chất là bất định. Những nỗ lực liên hệ thế giới lượng tử vi mô với thế giới cổ điển vĩ mô của chúng ta dẫn tới những vấn đề triết học hiện vẫn còn nhiều ảnh hưởng. Nhưng về mặt thực nghiệm, lý thuyết lượng tử vận hành rất tuyệt vời, và thiếu nó, các chip máy tính ngày hôm nay cũng như các máy laser sẽ không thể hoạt động được.

Năm 1900, nhà vật lý vĩ đại Huân tước Kelvin đã tuyên bố rằng lý thuyết về nhiệt và ánh sáng thời đó được coi là mô tả hoàn chỉnh nhất của tự nhiên, đang bị "hai đám mây đen che phủ. Đám mây thứ nhất có liên quan đến câu hỏi: Làm thế nào Trái Đất có thể chuyển động qua một môi trường rắn và đàn hồi là ether truyền ánh sáng? Đám mây thứ hai là học thuyết Maxwell-Boltzmann về phân bố năng lượng". Kelvin quả thực rất nhạy bén khi phát hiện ra hai vấn đề quan trọng đó. Ở chương 13, chúng ta thấy rằng câu hỏi thứ nhất đã dẫn đến sự ra đời của thuyết tương đối và đã được lý thuyết đó giải quyết trọn vẹn. Bây giờ chúng ta hãy xem câu hỏi thứ hai đã dẫn tới một cột trụ vĩ đại khác của vật lý hiện đại, cụ thể là lý thuyết lượng tử, như thế nào.

Thế giới lượng tử khét tiếng là kỳ bí. Nhiều nhà vật lý cảm thấy rằng nếu không đánh giá hết sự kỳ bí của nó thì bạn sẽ chẳng hiểu gì về nó hết. Có nhiều điều cần phải nói về quan điểm này, bởi vì thế giới lượng tử khác với cái thế giới ở thang con người của chúng ta đến mức ngay cả những khái niệm đơn giản nhất cũng thay đổi đến mức không nhận ra. Chẳng hạn, đó là một thế giới mà ánh sáng vừa là hạt lại vừa là sóng. Một thế giới mà ở đó con mèo nhốt trong một cái hộp kín có thể đồng thời vừa sống vừa chết… cho đến khi bạn mở hộp ra, tức là, khi "hàm sóng" của con vật đáng thương đó bất ngờ "suy sập" về một trạng thái này hay khác. Trong đa vũ trụ lượng tử, tồn tại một bản sao vũ trụ của chúng ta, trong đó

Hitler đã thua trong Thế chiến lần thứ II, và một vũ trụ khác, trong đó y đã thắng cuộc chiến tranh đó. Chúng ta chỉ ngẫu nhiên sống – tức là tồn tại như một hàm sóng lượng tử – trong cái vũ trụ thứ nhất. Còn những phiên bản khác của chúng ta, dù là thực nhưng các giác quan của chúng ta không thể tiếp cận được, thì lại sống trong một thế giới khác.

Cơ học lượng tử quả đúng là kỳ bí. Nhưng liệu nó có thực sự kỳ bí đến thế không thì lại là một chuyện khác.

Mọi chuyện bắt đầu từ những cái bóng đèn. Điều đó cũng thích đáng thôi, bởi vì đó là một trong số những ứng dụng ngoạn mục nhất xuất hiện từ hai lĩnh vực điện và từ mà Maxwell đã thống nhất một cách xuất sắc. Năm 1894, nhà vật lý người Đức Max Planck đã được một công ty điện thuê thiết kế một bóng đèn hiệu quả nhất có thể, cụ thể là cho nhiều ánh sáng nhất trong khi đó lại tiêu thụ năng lượng điện ít nhất. Ông đã nhận thấy rằng chìa khóa để giải quyết bài toán này là một vấn đề cơ bản của vật lý, đã được một nhà vật lý Đức khác là Gustav Kirchhoff nêu ra từ năm 1859. Nó có liên quan đến một kết cấu lý thuyết có tên là vật đen, vật này hấp thụ toàn bộ bức xạ điện từ chiếu đến nó. Một câu hỏi lớn đặt ra là: một vật như vậy sẽ *phát ra* bức xạ như thế nào? Nó không thể lưu giữ lại tất cả được; một số nhất định sẽ phải quay trở lại. Đặc biệt, cường độ của bức xạ phát ra phụ thuộc vào tần số của nó và vào nhiệt độ của vật như thế nào?

Cũng đã có câu trả lời từ nhiệt động lực học, trong đó vật đen được mô hình hóa như một cái hộp có thành là những chiếc gương hoàn hảo. Trong hộp, bức xạ điện từ nảy qua nảy lại khi phản xạ trên các gương. Vấn đề đặt ra là năng lượng trong hộp được phân bố theo tần số như thế nào khi hệ đã

an bài ở một trạng thái cân bằng? Năm 1876, Boltzmann đã chứng minh được định lý “phân bố đều”: năng lượng được phân bố đều cho mỗi thành phần độc lập của chuyển động. Các thành phần này giống như các sóng cơ bản trên dây đàn violin: các mode chuẩn tắc.

Nhưng điều đó chắc chắn là sai, bởi vì nó dẫn đến hệ quả là năng lượng toàn phần được phát ra ở mọi tần số sẽ là vô hạn. Kết luận đầy nghịch lý này đã trở nên nổi tiếng với tên gọi tai họa tử ngoại: tử ngoại là bởi vì nó là khởi đầu của vùng tần số cao, còn tai họa vì nó đúng là như thế. Không có một vật thực nào có thể bức xạ một lượng vô hạn năng lượng cả.

Mặc dù Planck đã ý thức được vấn đề đó, nhưng nó không khiến ông bận tâm, bởi vì ông không tin định lý phân bố đều. Trớ trêu thay, công trình của ông đã giải quyết được nghịch lý đó và loại bỏ được tai họa tử ngoại, nhưng chỉ sau này ông mới nhận thấy điều đó. Ông đã sử dụng các quan sát thực nghiệm cho biết năng lượng phụ thuộc vào tần số như thế nào để khiến công thức toán học của ông phù hợp với số liệu thực nghiệm. Công thức của ông, được rút ra vào đầu năm 1900, ban đầu đã không có cơ sở vật lý nào. Nó chỉ là công thức để làm việc. Nhưng cũng trong năm đó, ông đã cố gắng dung hòa công thức của mình với công thức của nhiệt động lực học cổ điển và quyết định rằng các mức năng lượng của các mode dao động của vật đen không thể là liên tục như nhiệt động lực học đã giả thiết. Thay vì vậy, các mức này là gián đoạn – tức là ngăn cách bởi những khe nhỏ. Thực tế, đối với một tần số đã cho, năng lượng phải là một bội số nguyên của tần số đó nhân với một hằng số rất nhỏ. Giờ đây chúng ta gọi con số đó là hằng số Planck và ký hiệu nó là h. Giá trị của hằng số này, với đơn vị là J.s, bằng 6,62606957(29). 10^{-34}. Giá

trị này được suy ra từ hệ thức lý thuyết giữa hằng số Planck và các đại lượng khác mà ta dễ dàng đo được. Phép đo đầu tiên đã được Robert Millikan tiến hành bằng cách sử dụng hiệu ứng quang điện sẽ được mô tả dưới đây. Các gói năng lượng nhỏ mà hiện nay được gọi là các lượng tử (*quantum*), có nguồn gốc từ tiếng Latin *quantus* có nghĩa là "bao nhiêu".

Hằng số Planck có thể rất nhỏ, nhưng nếu tập hợp các mức năng lượng đối với một tần số đã cho là gián đoạn thì năng lượng toàn phần hóa ra lại là hữu hạn. Như vậy, tai họa tử ngoại là dấu hiệu để chỉ rằng mô hình *continuum* đã không phản ánh được tự nhiên. Và điều đó dẫn đến hệ quả là tự nhiên, ở những thang rất nhỏ, phải là gián đoạn. Ban đầu, Planck đã không nghĩ ra: ông cho rằng các mức năng lượng gián đoạn của ông chẳng qua chỉ là một thủ thuật toán học để nhận được một công thức có ý nghĩa. Thực tế, Boltzmann đã rất thích thú với ý tưởng tương tự vào năm 1877, nhưng không phát hiện được nó. Mọi chuyện đã thay đổi khi Einstein sử dụng trí tưởng tượng phong phú của mình để làm thay đổi tình hình và vật lý học đã bước vào một địa hạt mới. Năm 1905, cùng năm với sự ra đời của công trình về thuyết tương đối hẹp, Einstein đã nghiên cứu hiệu ứng quang điện, trong đó ánh sáng đập vào một kim loại thích hợp sẽ làm cho kim loại đó phát ra electron. Ba năm trước đó, Philipp Lenard đã nhận thấy rằng khi ánh sáng có tần số cao thì các electron bắn ra sẽ có năng lượng lớn. Nhưng thuyết sóng ánh sáng, được Maxwell xác nhận hoàn toàn, lại ngụ ý rằng năng lượng của các electron phải phụ thuộc vào cường độ ánh sáng chứ không phải vào tần số của nó. Einstein nhận thấy rằng các lượng tử của Planck có thể giải thích được sự sai lệch đó. Ông gợi ý rằng ánh sáng không phải là sóng mà gồm các hạt nhỏ

bé, hiện nay chúng ta gọi chúng là photon. Năng lượng của một photon duy nhất, có tần số đã cho, sẽ bằng tần số đó nhân với hằng số Planck – hệt như các lượng tử của Planck. Một photon là một lượng tử của ánh sáng.

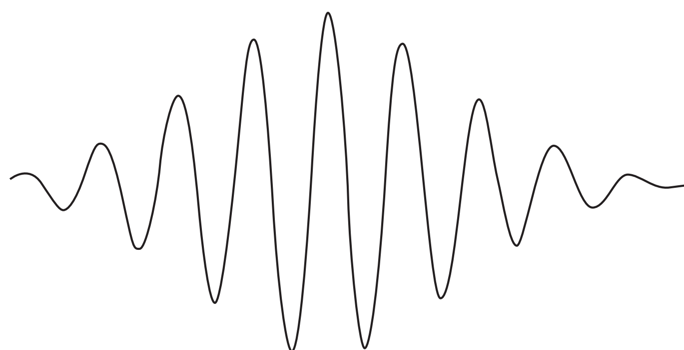
Có một vấn đề hiển nhiên đối với lý thuyết của Einstein về hiệu ứng quang điện: nó giả thiết ánh sáng là hạt. Nhưng đã có nhiều bằng chứng khẳng định rằng ánh sáng là sóng. Mặt khác, hiệu ứng quang điện lại không tương thích với ánh sáng là sóng. Vậy ánh sáng là sóng, hay hạt?

Vâng.

Nó là – hay có các phương diện được thể hiện như là – hoặc cái này hoặc cái kia. Trong một số thí nghiệm, ánh sáng dường như xử sự giống như sóng. Trong một số thí nghiệm khác, nó lại xử sự giống như hạt. Khi các nhà vật lý tiến tới tận các thang rất nhỏ của vũ trụ, họ mới nhận ra rằng ánh sáng không phải là thứ duy nhất có lưỡng tính kỳ lạ, khi thì là sóng khi thì là hạt này, mà toàn bộ vật chất đều như thế. Họ gọi nó là lưỡng tính sóng-hạt. Người đầu tiên nắm bắt được bản chất lưỡng tính đó của vật chất là Louis-Victor de Broglie, vào năm 1924. Ông đã mượn lại định luật của Planck không phải về năng lượng mà là về động lượng, và đề xuất rằng động lượng của khía cạnh hạt và tần số của sóng có mối liên hệ với nhau: nhân chúng với nhau ta sẽ nhận được hằng số Planck. Ba năm sau, ông đã chứng minh được nó, chí ít là đối với electron. Một mặt, các electron là hạt và có thể quan sát được chúng hành xử theo cách đó. Nhưng mặt khác, chúng lại nhiễu xạ giống như các sóng. Năm 1988, các nguyên tử Natri cũng đã được phát hiện có các biểu hiện như một sóng.

Như vậy, vật chất chẳng phải là hạt cũng chẳng phải là sóng, nhưng có một chút của cả hai – một sóng-hạt.

Người ta cũng đã tạo được một số hình ảnh khá trực quan về bản chất lưỡng tính này của vật chất. Chẳng hạn, một hạt là một cụm các sóng định xứ, như trên hình 54, được gọi là một bó sóng. Bó sóng như một toàn bộ có thể xử sự như một hạt, nhưng một số thí nghiệm có thể thăm dò cấu trúc sóng nội tại của nó. Sự chú ý lúc này rời khỏi những hình ảnh cung cấp cho các sóng-hạt để tập trung phân loại cách xử sự của chúng. Sự tìm kiếm nhanh chóng đạt tới mục đích và phương trình trung tâm của lý thuyết lượng tử đã xuất hiện.



Hình 54 Bó sóng.

Phương trình này mang tên Erwin Schrödinger. Năm 1927, dựa trên công trình của một số nhà vật lý khác, mà chủ yếu là Werner Heisenberg, Schrödinger đã đưa ra một phương trình vi phân cho hàm sóng lượng tử. Phương trình có dạng sau:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}\Psi$$

Ở đây Ψ (chữ cái Hy Lạp đọc là psi) là dạng của sóng (gọi là hàm sóng), t là thời gian (vậy $\partial/\partial t$ tác dụng vào Ψ sẽ cho tốc độ biến thiên của hàm sóng đối với thời gian), $\hat{H}$ được gọi là toán tử Hamilton, và $\hbar = h/2\pi$ với h là hằng số Planck. Thế còn i?

Đó là đặc điểm kỳ bí nhất. Nó là căn bậc hai của -1 (xem chương 5). Như vậy, phương trình Schrödinger áp dụng cho các sóng được xác định trên các số *phức*, chứ không chỉ trên các số thực như trong các phương trình sóng quen thuộc.

Vậy sóng là gì? Phương trình sóng cổ điển (chương 8) xác định các sóng trong không gian, và các nghiệm của nó là một hàm số của không gian và thời gian. Chính điều đó cũng đúng với phương trình Schrödinger, nhưng bây giờ hàm sóng Ψ nhận những giá trị phức, chứ không chỉ các giá trị thực. Nó cũng hơi giống với sóng trên đại dương nhưng độ cao của nó là 2 + 3i*. Sự xuất hiện số ảo i về nhiều phương diện là đặc điểm bí ẩn và sâu xa nhất của cơ học lượng tử. Trước đây i đã xuất hiện trong nghiệm của các phương trình, và trong các phương pháp để tìm ra các nghiệm đó, nhưng ở đây nó là một phần của phương trình, một đặc điểm tường minh của quy luật vật lý.

Một cách giải thích điều này là các sóng lượng tử đã liên kết hai sóng thực, một có độ cao 2 và một có độ cao 3 theo hai hướng vuông góc với nhau. Nhưng điều đó không hoàn toàn đơn giản như vậy, bởi vì hai sóng đó không có hình dạng cố định. Theo sự trôi của thời gian, chúng trải qua cả một chuỗi các hình dạng, và mỗi sóng đó đều liên kết một cách bí ẩn với sóng kia. Nó cũng hơi giống hai thành phần điện và từ của sóng ánh sáng, nhưng bây giờ điện có thể "quay" thành từ và ngược lại. Hai sóng này là hai mặt của một hình dạng duy nhất, hình dạng đó quay đều quanh vòng tròn đơn vị của mặt phẳng phức. Cả hai phần thực và ảo của hình dạng quay này thay đổi

---

* Tức là một số phức – ND

một cách rất đặc biệt: chúng được tổ hợp thành những lượng biến thiên dưới dạng hình sin. Về mặt toán học điều đó dẫn tới ý tưởng cho rằng hàm sóng lượng tử có một loại *pha* đặc biệt. Cách giải thích vật lý của pha này tương tự, nhưng vẫn khác với vai trò của pha trong phương trình sóng cổ điển.

Chắc bạn còn nhớ cái mẹo Fourier dùng để giải cả phương trình truyền nhiệt và phương trình sóng chứ? Một số nghiệm đặc biệt, mà cụ thể là các hàm sin và cos của Fourier, có những tính chất toán học hết sức thú vị. Mặc dù phức tạp, tất cả các nghiệm khác đều là chồng chập của các mode chuẩn đó. Chúng ta cũng có thể giải phương trình Schrödinger bằng cách sử dụng ý tưởng tương tự. Chúng được gọi là các hàm riêng và được phân biệt với tất cả các nghiệm khác. Thay vì là một hàm số tổng quát của không gian và thời gian, một hàm riêng là tích của một hàm chỉ của không gian và một hàm chỉ của thời gian. Khi này, các biến thời gian và không gian, theo thuật ngữ chuyên môn, được gọi là tách được. Các hàm riêng phụ thuộc vào toán tử Hamilton, toán tử này là mô tả toán học của hệ vật lý liên quan. Những hệ khác nhau, chẳng hạn như một electron chuyển động trong giếng thế năng hay cặp photon va chạm, sẽ có những toán tử Hamilton khác nhau, do đó mà có những hàm riêng khác nhau.

Để đơn giản, hãy xét một sóng đứng đối với phương trình sóng cổ điển – một dây đàn violin dao động có hai đầu cố định. Ở mọi thời điểm, hình dạng của dây hầu như giống nhau, nhưng biên độ thì bị điều biến, cụ thể là nó được nhân với một thừa số biến thiên theo thời gian dưới dạng hình sin, như minh họa trên hình 35 (trang 220). Pha phức của hàm sóng lượng tử cũng tương tự nhưng khó hình dung hơn. Đối

với một hàm riêng riêng rẽ, tác dụng của pha lượng tử chỉ là làm dịch chuyển tọa độ thời gian. Đối với một chồng chập các hàm riêng, bạn tách hàm sóng thành các thành phần đó, mỗi thành phần lại tách thành phần thuần túy không gian nhân với phần thuần túy thời gian, quay phần thời gian quanh vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng phức với một tốc độ thích hợp rồi cộng những phần đó lại với nhau. Mỗi một hàm riêng tách rời có một biên độ phức, và biên độ này biến điệu theo một tần số riêng của nó.

Xem ra có vẻ quá phức tạp, nhưng sẽ là hoàn toàn thất bại nếu bạn không tách hàm sóng thành các hàm riêng. Chí ít thì khi làm việc đó, bạn sẽ có một cơ may.

Mặc dù phức tạp như thế nhưng cơ học lượng tử có lẽ cũng chỉ là một phiên bản khác thường của phương trình sóng cổ điển, dẫn tới kết quả là có hai hàm sóng chứ không phải một, nếu không có sự xoắn bện bí hiểm nào. Bạn có thể quan sát được các sóng cổ điển và thấy được hình dạng của nó, ngay cả nếu nó là chồng chất của một số mode Fourier. Nhưng trong cơ học lượng tử, bạn sẽ không bao giờ có thể quan sát được toàn bộ hàm sóng. Tất cả những gì bạn quan sát được trong trường hợp đã cho chỉ là một thành phần duy nhất, tức là một hàm riêng mà thôi. Nói một cách nôm na, nếu bạn có ý định đo hai thành phần đó một cách đồng thời, thì quá trình đo thành phần này sẽ làm nhiễu động thành phần kia.

Điều này ngay lập tức làm nảy sinh một vấn đề triết học hắc búa. Nếu bạn không thể quan sát được toàn bộ hàm sóng, thì liệu nó có thực sự tồn tại hay không? Nó có phải là một đối tượng vật lý thật sự, hay chỉ là một hư cấu toán học tiện ích? Một đại lượng không quan sát được liệu có ý nghĩa

về mặt khoa học không? Và cũng chính ở đây con mèo nổi tiếng của Schrödinger bước vào câu chuyện. Nó xuất hiện ở đây là do cách giải thích chuẩn về phép đo lượng tử là gì, cái gọi là cách giải thích của trường phái Copenhagen (thường gọi tắt là cách giải thích Copenhagen)[1].

Hãy tưởng tượng một hệ lượng tử ở một trạng thái chồng chập nào đó: ví dụ, một electron mà trạng thái của nó là hỗn hợp của spin lên (*up*) và spin xuống (*down*) vốn là những trạng thái thuần được xác định bởi các hàm riêng (không quan trọng spin-up và spin-down có nghĩa là gì). Tuy nhiên, khi bạn quan sát trạng thái đó, bạn hoặc sẽ nhận được spin-up, hoặc sẽ nhận được spin-down. Chứ bạn không thể quan sát được chồng chập của chúng. Hơn nữa, một khi bạn đã quan sát được một trong số chúng – chẳng hạn như spin-up – thì nó sẽ *trở thành* trạng thái hiện thời của electron. Bằng cách nào đó phép đo của bạn dường như đã buộc sự chồng chập phải thay đổi thành một hàm riêng thành phần cụ thể. Cách giải thích Copenhagen đã chấp nhận phát biểu sau theo đúng nghĩa đen: quá trình đo của bạn đã làm *suy sập* hàm sóng ban đầu thành một hàm riêng thuần duy nhất.

Nếu bạn quan sát nhiều electron, đôi khi bạn nhận được spin-up, đôi khi bạn lại nhận được spin-down. Bạn có thể suy ra xác suất để electron ở một trong hai trạng thái riêng đó. Như vậy, bản thân hàm sóng có thể được giải thích như một loại đám mây xác suất. Nó không cho biết trạng thái hiện thời của electron: nó chỉ cho biết khả năng bạn nhận được một kết quả cụ thể sẽ như thế nào khi bạn đo nó. Nhưng điều này làm cho nó trở thành một hình mẫu thống kê, chứ không phải là một *sự thực*. Nó chứng tỏ hàm sóng là thực cũng chẳng hơn gì các phép đo chiều cao con người của Quetelet

chứng tỏ rằng một phôi thai đang phát triển sẽ tuân theo một loại đường cong hình chuông nào đó.

Cách giải thích Copenhagen đơn giản và dễ hiểu, nó phản ánh được những cái đã diễn ra trong thực nghiệm mà không cần phải đưa ra những giả thiết chi tiết về những gì sẽ xảy ra khi bạn quan sát một hệ lượng tử. Vì những lý do đó, đa số các nhà vật lý đang hoạt động đều rất hài lòng sử dụng nó. Nhưng, trong những ngày đầu khi lý thuyết vẫn đang còn nhiều tranh cãi, cũng có một số người không sử dụng nó, và ngay cả hiện nay cũng có một số người không tán thành. Và một trong những người ly khai ấy lại chính là Schrödinger.

Năm 1935, Schrödinger rất băn khoăn về cách giải thích Copenhagen. Dĩ nhiên, không phải ông không thấy rằng nó đã vận hành, ở mức độ thực dụng, đối với các hệ lượng tử như các electron và photon. Nhưng còn thế giới xung quanh ông thì dường như lại khác, thậm chí mặc dù sâu bên trong nó chỉ là một khối sôi sục của các hạt lượng tử. Khi tìm cách để làm cho sự khác biệt đó trở nên rõ ràng nhất có thể, ông đã đi tới một thí nghiệm tưởng tượng trong đó hạt lượng tử có tác dụng đầy kịch tính và hiển nhiên lên một con mèo.

Hãy tưởng tượng một cái hộp, khi đậy kín thì không tham gia bất cứ một tương tác lượng tử nào. Bên trong hộp, người ta đặt một nguyên tử phóng xạ, một detector bức xạ, một lọ nhỏ chất độc và một con mèo sống. Sau đó đóng hộp lại, và chờ đợi. Tại một thời điểm nào đó, nguyên tử phóng xạ sẽ phân rã và phát ra một hạt bức xạ. Detector sẽ phát hiện hạt đó, và nó đã được cài đặt sao cho khi điều đó xảy ra, nó sẽ làm vỡ lọ chất độc và chất độc trong lọ thoát ra ngoài giết chết con mèo.

Trong cơ học lượng tử, sự phân rã của nguyên tử phóng xạ là một sự kiện ngẫu nhiên. Nếu nó phân rã thì con mèo chết; nếu chưa thì con mèo sống. Theo cách giải thích Copenhagen, chừng nào chưa có ai đó quan sát nguyên tử, thì nó là sự chồng chập của hai trạng thái: đã phân rã và chưa phân rã. Điều này cũng đúng đối với detector, lọ thuốc độc và con mèo. Nghĩa là con mèo cũng ở trong sự chồng chập của hai trạng thái: sống và chết.

Vì hộp ngăn chặn mọi tương tác lượng tử, nên cách duy nhất để tìm ra nguyên tử đã phân rã và giết chết con mèo hay chưa là mở cái hộp ra. Cách giải thích Copenhagen bảo chúng ta rằng thời điểm mà chúng ta làm điều đó, hàm sóng sẽ bị suy sập và con mèo đột ngột chuyển sang một trạng thái thuần: chết hoặc sống. Tuy nhiên, bên trong hộp không khác gì với thế giới bên ngoài khi ta không bao giờ quan sát con mèo đang ở trạng thái chồng chập sống/chết. Như vậy, trước khi chúng ta mở hộp và quan sát những thứ bên trong nó thì ở đó phải có hoặc con mèo chết hoặc con mèo sống.

Schrödinger đưa ra thí nghiệm tưởng tượng này có dụng ý là để phê phán cách giải thích Copenhagen. Các hệ lượng tử vi mô tuân theo nguyên lý chồng chập và có thể tồn tại ở những trạng thái hỗn hợp, trong khi các hệ vĩ mô thì không thể. Bằng cách liên kết một hệ vi mô (nguyên tử) với một hệ vĩ mô (con mèo), Schrödinger đã chỉ ra cái mà ông tin là sai trong cách giải thích Copenhagen: nó sẽ cho điều vô nghĩa khi áp dụng cho con mèo. Thực tế, ông chắc sẽ rất ngạc nhiên khi thấy đa số các nhà vật lý sẽ đáp lại rằng: “Đúng thế, Erwin ạ, anh tuyệt đối đúng: chừng nào chưa có ai đó mở hộp thì con mèo thực sự đồng thời vừa sống vừa chết”. Đặc biệt, khi

anh ta chợt nhận ra rằng anh ta không thể tìm ra ai là đúng, thậm chí nếu anh ta có mở hộp ra. Anh ta hoặc nhìn thấy con mèo đã chết hoặc con mèo còn sống. Anh ta có thể phỏng đoán rằng con mèo đã ở trạng thái đó trước khi anh ta mở hộp ra, nhưng anh ta không thể biết chắc được. Nghĩa là kết quả quan sát được phù hợp với cách giải thích Copenhagen.

Thôi được, bây giờ hãy đặt thêm một camera vào trong hộp và quay phim tất cả những thứ xảy ra. Lần này thì chắc sẽ giải quyết xong vụ này. "Ồ, không" – các nhà vật lý đáp lại. "Bạn chỉ có thể thấy những cái mà camera quay sau khi bạn mở hộp ra. Còn trước đó thì ngay cả phim cũng ở trong trạng thái chồng chập: nó chứa cả phim con mèo sống cũng như phim con mèo chết".

Cách giải thích Copenhagen đã giải phóng cho các nhà vật lý để họ thực hiện những tính toán và kiểm chứng những cái mà cơ học lượng tử tiên đoán mà không phải đối mặt với những vấn đề hóc búa, nếu không muốn nói là bất khả, chẳng hạn như thế giới cổ điển đã xuất hiện từ cái thể nền lượng tử như thế nào, rồi các dụng cụ vĩ mô, phức tạp đến nỗi khó tưởng tượng nổi ở thang lượng tử làm thế nào có thể đo được một trạng thái lượng tử. Vì cách giải thích Copenhagen đã làm công việc đó, cho nên họ không cần phải quan tâm tới các vấn đề triết học nữa. Do vậy, nhiều thế hệ các nhà vật lý đã được dạy rằng Schrödinger đã chế ra con mèo của ông để chứng tỏ rằng sự chồng chập lượng tử được mở rộng ra cả cho thế giới vĩ mô nữa: thực ra đó là điều ngược hoàn toàn với cái mà Schrödinger định nói với họ.

Thực sự không có gì phải quá ngạc nhiên rằng vật chất ở cấp độ các electron và nguyên tử đã xử sự một cách lạ lùng. Ban

đầu chúng ta có thể chống đối ý tưởng đó vì sự xa lạ của nó, nhưng nếu electron thực sự là một bó sóng nhỏ thay vì là một cục vật chất, thì chúng ta vẫn có thể học cách để chung sống với nó. Nếu điều đó có nghĩa là bản thân trạng thái của electron hơi kỳ dị, nó không chỉ quay quanh trục hướng lên hoặc hướng xuống, mà còn một chút theo cả hai, thì chúng ta vẫn có thể sống với nó. Và nếu những hạn chế của các dụng cụ đo của chúng ta ngụ ý rằng chúng ta không thể nắm bắt được cách hành xử của electron – rằng bất kỳ phép đo nào mà chúng ta thực hiện đều nhất thiết phải dẫn tới một trạng thái thuần nào đó: up hoặc down – thì đó là cách mà nó diễn ra. Nếu áp dụng chính điều này cho nguyên tử phóng xạ, và các trạng thái ở đây là "phân rã" hoặc "không phân rã", thì do các hạt thành phần có những trạng thái khó nắm bắt như các trạng thái của electron, nên chúng ta thậm chí có thể chấp nhận bản thân nguyên tử, dưới dạng tổng thể của nó, nằm ở chồng chập của các trạng thái đó cho tới khi chúng ta tiến hành đo. Nhưng con mèo là con mèo và dường như phải có một nỗ lực tưởng tượng rất lớn để hình dung ra rằng một con vật lại đồng thời có thể vừa sống vừa chết, và chỉ có thể suy sập một cách thần kỳ thành cái này hoặc cái kia khi chúng ta mở hộp nhốt nó ra. Nếu thực tại lượng tử đòi hỏi con mèo nằm ở trạng thái chồng chất sống/chết thì tại sao nó lại né tránh, không cho chúng ta quan sát một trạng thái như vậy?

Có những lý do chính đáng trong hình thức luận của lý thuyết lượng tử (cho tới tận mới đây) đòi hỏi một phép đo, một đại lượng quan sát được bất kỳ phải là một hàm riêng. Có những lý do thậm chí còn chính đáng hơn để đặt câu hỏi tại sao trạng thái của một hệ lượng tử lại là sóng tuân theo phương trình Schrödinger. Làm sao chúng ta có thể chuyển

từ cái này sang cái kia? Cách giải thích Copenhagen tuyên bố rằng bằng cách nào đó (xin đừng hỏi bằng cách nào) quá trình đo lại làm cho một hàm sóng phức tạp, chồng chập suy sập về một hàm riêng thành phần duy nhất. Khi đã được cung cấp dạng ngôn từ đó, nhiệm vụ của bạn, với tư cách một nhà vật lý, là tiếp tục tiến hành các phép đo và tính toán các hàm riêng v.v, và đừng có hỏi các câu hỏi lục vấn nữa. Và điều này đã mang lại những thành quả tuyệt vời nếu bạn đo mức độ thành công bằng việc nhận được các câu trả lời phù hợp với thực nghiệm. Và mọi chuyện sẽ thật êm đẹp nếu phương trình Schrödinger cho phép hàm sóng xử sự theo cách đó, nhưng thực tế lại không như vậy. Trong cuốn *Thực tại ẩn giấu (The Hidden Reality)*, tác giả Brian Greene đã viết như thế này: "Ngay cả sự đụng chạm nhẹ cũng phát lộ một đặc điểm khó chịu… Sự co sập tức thời của hàm sóng… không thể xuất hiện từ toán học của Schrödinger". Thay vì vậy, cách giải thích Copenhagen là cái bu lông thực dụng gắn với lý thuyết đó, là một cách xử lý các phép đo mà không hiểu hoặc không đối mặt với vấn đề chúng thực sự là gì.

Tất cả những điều đó rất hay, nhưng lại không phải là cái mà Schrödinger định chỉ ra. Ông đưa ra con mèo chứ không phải một electron hay một nguyên tử, bởi vì nó đặt ra cái mà ông xem là vấn đề chính nổi lên gay gắt. Một con mèo thuộc thế giới vĩ mô trong đó chúng ta sống, nơi mà vật chất không xử sự như cơ học lượng tử đòi hỏi. Chúng ta không nhìn thấy con mèo trong trạng thái chồng chập[2]. Schrödinger đã đặt câu hỏi tại sao vũ trụ "cổ điển" quen thuộc của chúng ta lại không giống với thực tại lượng tử ẩn bên dưới. Nếu mọi thứ cấu thành nên vũ trụ tồn tại trong những trạng thái chồng chập thì tại sao vũ trụ nhìn lại cổ điển như thế? Nhiều nhà

vật lý đã thực hiện những thí nghiệm tuyệt vời chứng tỏ các electron và các nguyên tử đã thực sự hành xử đúng như lượng tử và cách giải thích Copenhagen quy định. Nhưng người ta đã bỏ sót một điểm: đó là phải làm điều đó với một con mèo. Các nhà lý thuyết đã băn khoăn tự hỏi liệu con mèo có quan sát được trạng thái riêng của nó hay ai đó khác có thể bí mật mở hộp ra và ghi lại những thứ ở bên trong hộp hay không. Theo chính logic của Schrödinger, họ đã kết luận rằng con mèo quan sát được trạng thái của nó khi hộp chứa chồng chập của một con mèo chết đã tự sát do quan sát chính mình và con mèo sống đã quan sát chính mình còn đang sống, cho đến khi người quan sát chính thống (một nhà vật lý) mở hộp ra. Khi đó toàn bộ hệ này mới suy sập về một trạng thái này hay khác. Một cách tương tự, một người có thể trở thành chồng chập của hai người: một người thấy con mèo chết trong khi người kia lại thấy con mèo sống, cho đến khi nhà vật lý mở hộp ra, làm cho trạng thái người đó suy sập. Bạn có thể tiến hành theo cách đó cho đến khi trạng thái của toàn bộ *vũ trụ* là chồng chập của một vũ trụ với con mèo chết và một vũ trụ khác với con mèo sống, và rồi sau đó trạng thái này của vũ trụ suy sập khi nhà vật lý mở hộp ra.

Tất cả những điều đó nghe có vẻ hơi rối rắm. Các nhà vật lý vẫn có thể tiếp tục công việc nghiên cứu của mình mà không cần quan tâm tới những vấn đề này. Họ thậm chí có thể phủ nhận bất cứ điều gì được đưa ra, nhưng có một cái gì đó đã bị bỏ sót. Ví dụ, điều gì sẽ xảy ra với chúng ta nếu như một nhà vật lý xa lạ từ hành tinh Apellobetnees III, ngoài Hệ Mặt Trời, tới mở cái hộp ra? Liệu chúng ta có bất ngờ phát hiện ra rằng chúng ta đã thực sự tan xác trong một cuộc chiến tranh

hạt nhân khi cuộc khủng hoảng tên lửa ở Cuba năm 1962 leo thang, và từ đó đang sống trong một thời gian vay mượn?

Quá trình đo không phải là một phép toán chính xác và rành mạch như cách giải thích Copenhagen quan niệm. Khi được đề nghị mô tả một dụng cụ dẫn tới kết quả của nó như thế nào, cách giải thích Copenhagen đáp lại rằng "nó chỉ quyết định, vậy thôi". Hình ảnh hàm sóng suy sập tới một hàm riêng duy nhất mô tả đầu vào và đầu ra của quá trình đo, nhưng không cho biết đi từ đầu này tới đầu kia như thế nào. Nhưng khi bạn làm một phép đo thực, không phải là bạn vẫy cây đũa thần làm cho hàm sóng không tuân theo phương trình Schrödinger nữa và suy sập. Thay vì thế, bạn đã làm một cái gì đó vô cùng phức tạp, từ quan điểm lượng tử, đến nỗi rõ ràng là việc mô hình hóa nó một cách hiện thực là vô vọng. Ví dụ, để đo spin của electron, bạn làm cho nó tương tác với một bộ phận thích hợp của dụng cụ đo, bộ phận có kim chỉ hoặc là chuyển động tới vị trí "up" hoặc tới vị trí "down", hoặc một hiển thị số hoặc một tín hiệu gửi tới máy tính… Dụng cụ này sản sinh ra một và chỉ một trạng thái duy nhất. Bạn sẽ không thấy kim chỉ nằm ở trạng thái là chồng chập của up và down.

Chúng ta đã quen với điều này, bởi vì đó là cách vận hành của thế giới cổ điển, nhưng ngay bên dưới nó lại được giả thiết là thế giới lượng tử. Thay thế con mèo bằng dụng cụ đo spin, thực sự nó phải tồn tại ở một trạng thái chồng chập. Dụng cụ này được coi như một hệ lượng tử, và nó cực kỳ phức tạp. Nó chứa một số cực lớn các hạt – trong khoảng giữa 10^{25} và 10^{30} – theo đánh giá thô. Phép đo đột sinh bằng một cách nào đó từ tương tác của một electron duy nhất với một số rất lớn các hạt trong dụng cụ. Niềm ngưỡng mộ sự tài tình

về chuyên môn của các công ty sản xuất dụng cụ đo phải là vô hạn; việc trích xuất ra một điều gì đó có ý nghĩa từ một mớ lộn xộn gần như là điều không thể tin nổi. Điều này cũng chẳng khác gì nỗ lực tìm ra cỡ giày của ai đó bằng cách bắt cả thành phố phải thử nó. Nhưng nếu bạn thông minh (thu xếp gặp họ ở một cửa hiệu giày) bạn có thể vẫn thu được kết quả có ý nghĩa, và một người thiết kế dụng cụ đo thông minh vẫn có thể tạo ra những phép đo có ý nghĩa đối với spin của electron. Nhưng sẽ không có một triển vọng hiện thực nào đối với việc mô hình hóa chi tiết một dụng cụ như vậy sẽ vận hành như thế nào với tư cách là một hệ lượng tử đích thực. Do có quá nhiều chi tiết, một máy tính lớn nhất thế giới cũng sẽ dễ sai lầm. Điều này làm cho rất khó phân tích một quá trình đo thực khi dùng phương trình Schrödinger.

Cho dù có như vậy đi nữa, chúng ta vẫn có một số hiểu biết về cách thức mà thế giới cổ điển của chúng ta xuất hiện từ thế giới lượng tử ẩn bên dưới nó. Hãy bắt đầu từ một phiên bản đơn giản, một tia sáng đập vào một gương phẳng. Câu trả lời cổ điển là định luật Snell (tức định luật phản xạ) phát biểu rằng: tia phản xạ nảy ra với góc phản xạ bằng góc tới. Trong cuốn sách của mình về điện động lực học lượng tử (QED), Richard Feynman đã giải thích rằng điều này không phải là cái xảy ra trong thế giới lượng tử. Tia sáng thực sự là một dòng các photon và mỗi photon có thể nảy khắp nơi. Tuy nhiên, nếu bạn chồng chập mọi thứ khả dĩ mà photon có thể làm thì bạn sẽ lại nhận được định luật Snell. Các photon nảy lại dưới các góc rất gần với góc mà chúng đập vào gương chiếm một tỉ lệ áp đảo. Feynman thậm chí còn định chứng tỏ là có thể dùng một thứ toán học phức tạp hơn, nhưng đằng sau tính toán đó là một ý tưởng toán học tổng quát: nguyên lý

pha dừng. Nếu bạn chồng chập tất cả các trạng thái lượng tử đối với một hệ quang học, bạn sẽ nhận được kết cục cổ điển trong đó tia sáng đi theo con đường mất ít thời gian nhất. Thậm chí bạn còn có thể thêm vào những thứ để trang trí cho đường đi của tia sáng với các vân nhiễu xạ của quang học sóng cổ điển.

Ví dụ này đã chứng tỏ hết sức tường minh rằng sự chồng chập của tất cả các thế giới khả dĩ – trong khuôn khổ này của quang học – sẽ mang lại cho chúng ta thế giới cổ điển. Đặc điểm quan trọng nhất không phải là hình học quá ư chi tiết của tia sáng, mà là thực tế nó mang lại chỉ *một* thế giới ở cấp độ cổ điển. Tiến sâu vào các chi tiết lượng tử của các photon riêng rẽ, bạn sẽ quan sát được toàn bộ những thứ nhỏ nhặt nhất của chồng chập, các trạng thái riêng, v.v. Nhưng lên đến cấp độ con người, tất cả những thứ đó sẽ triệt tiêu nhau – cũng có thể cộng lại với nhau nữa – để tạo ra một thế giới cổ điển hoàn hảo.

Một phần khác của cách giải thích này là sự mất kết hợp. Chúng ta đã thấy rằng các sóng lượng tử cũng có pha và biên độ. Đó là một pha khá kỳ cục, nó là một số phức, nhưng dù sao thì nó cũng là pha. Pha cực kỳ quan trọng đối với bất kỳ sự chồng chập nào. Nếu bạn lấy hai trạng thái chồng chập lên nhau, rồi thay đổi pha của trạng thái, rồi lại cộng chúng lại với nhau, cái mà bạn nhận được sẽ không còn gì giống với trạng thái gốc nữa. Nếu bạn làm đúng như vậy với nhiều thành phần, thì sóng lắp ghép lại sẽ có thể là bất cứ thứ gì. Sự mất thông tin về pha sẽ phá vỡ mọi chồng chập giống như con mèo Schrödinger. Bạn không chỉ mất dấu về chuyện con mèo còn sống hay đã chết, mà bạn không còn có thể nói đó là

con mèo nữa. Khi các sóng lượng tử mất hết các mối quan hệ tinh vi về pha, chúng được gọi là mất kết hợp – khi đó chúng bắt đầu xử sự giống vật lý cổ điển hơn, và sự chồng chập sẽ mất mọi ý nghĩa. Cái đã làm cho chúng mất kết hợp là những tương tác với các hạt xung quanh. Đó có lẽ cũng chính là cách mà các dụng cụ có thể đo được spin của electron và thu được một kết quả cụ thể, duy nhất.

Cả hai cách tiếp cận đó đều dẫn tới cùng một kết luận: vật lý cổ điển là cái bạn sẽ quan sát được nếu bạn nhìn một hệ lượng tử rất phức tạp gồm một số rất lớn các hạt trên quan điểm ở thang con người. Các phương pháp thực nghiệm cụ thể, các dụng cụ đo cụ thể, có thể giữ được một số hiệu ứng lượng tử, khi làm cho chúng len vào sự tồn tại cổ điển dễ chịu của chúng ta, nhưng các hệ lượng tử chung sẽ nhanh chóng không còn trình hiện như là lượng tử nữa khi chúng ta chuyển dịch tới các thang hành vi lớn hơn.

Đó là một cách để giải quyết số phận của con mèo tội nghiệp. Chỉ cái hộp hoàn toàn không cho sự mất kết hợp thẩm thấu qua mới có thể thử nghiệm được trạng thái con mèo chồng chập, nhưng *một cái hộp như vậy không tồn tại*. Bạn có thể tạo ra nó từ vật liệu gì?

Nhưng cũng có một cách khác, nằm ở cực ngược lại. Trước đây, tôi đã nói rằng "Bạn có thể cứ làm theo cách đó cho tới khi toàn bộ *vũ trụ* là một chồng chập". Năm 1957, Hugh Everett Jr. chỉ ra rằng theo một nghĩa nào đó, bạn cần phải như thế. Cách duy nhất để tạo ra mô hình lượng tử chính xác của một hệ là xem xét hàm sóng của nó. Mọi người đều vui vẻ làm như vậy khi hệ là một electron hay một nguyên tử,

hay (gây tranh cãi hơn) là một con mèo. Everett lấy luôn hệ là cả vũ trụ.

Ông lập luận rằng bạn không có lựa chọn nếu đó là cái bạn muốn lập mô hình. Không gì nhỏ hơn vũ trụ mà bạn có thể thực sự cô lập được bởi mọi vật đều tương tác với mọi vật khác. Và ông đã phát hiện ra rằng nếu bạn thực hiện bước đó, thì vấn đề con mèo, và mối liên hệ đầy nghịch lý giữa thực tại lượng tử và thực tại cổ điển sẽ dễ dàng được giải quyết. Hàm sóng lượng tử của vũ trụ không phải là một trạng thái riêng thuần túy, mà là một chồng chập của tất cả các trạng thái riêng khả dĩ. Mặc dù chúng ta không thể tính được những thứ như vậy (chúng ta không thể làm điều đó đối với một con mèo, chứ đừng nói tới một vũ trụ còn phức tạp hơn nhiều), nhưng chúng ta có thể bàn luận về chúng. Thực tế, chúng ta đã biểu diễn vũ trụ, theo cách cơ học lượng tử, như một tổ hợp của *tất cả những thứ khả dĩ mà vũ trụ có thể làm*.

Kết cục là hàm sóng của con mèo không cần phải suy sập để cho một quan sát cổ điển duy nhất, nó vẫn hoàn toàn không thay đổi, không vi phạm phương trình Schrödinger. Thay vì vậy, sẽ có hai vũ trụ cùng tồn tại. Trong một vũ trụ thì con mèo là chết, còn trong vũ trụ kia con mèo lại sống. Khi bạn mở hộp ra sẽ có tương ứng hai con người bạn và hai cái hộp. Một trong đó là phần hàm sóng của vũ trụ với con mèo chết; còn cái kia là phần của một hàm sóng khác với con mèo sống. Thay cho một vũ trụ cổ điển duy nhất bằng cách nào đó xuất hiện từ chồng chập của các khả năng lượng tử đó, bạn sẽ có một phạm vi rộng lớn các thế giới cổ điển, mỗi thế giới đó tương ứng với một khả năng lượng tử.

Phiên bản gốc của Everett, mà ông gọi là cách trình bày

trạng thái tương đối, đã được chú ý rộng rãi vào những năm 1970 thông qua Bryce DeWitt, người đã cho nó một cái tên hấp dẫn hơn: cách giải thích đa vũ trụ của cơ học lượng tử. Điều này thường được bi kịch hóa trên bình diện lịch sử: ví dụ như có một vũ trụ trong đó Adolf Hitler đã thắng trong Thế chiến lần thứ II, và một vũ trụ khác trong đó ông ta đã thua. Cái vũ trụ mà trong đó tôi đang viết cuốn sách này chính là vũ trụ thứ hai (Hitler thua), nhưng ở đâu đó bên cạnh nó trong thế giới lượng tử, một Ian Stewart khác đang viết một cuốn sách rất tương tự với cuốn sách này nhưng bằng tiếng Đức, gợi cho các độc giả của ông nhớ rằng họ đang ở trong vũ trụ mà Hitler thắng. Về mặt toán học, cách giải thích của Everett được xem như tương đương về logic với cơ học lượng tử truyền thống, và trong những cách giải thích hạn chế hơn, nó sẽ dẫn tới những cách có hiệu quả để giải các bài toán vật lý. Do đó, hình thức luận của ông sẽ sống sót qua các kiểm chứng thực nghiệm như cơ học lượng tử truyền thống. Vậy liệu điều đó có ngụ ý rằng các vũ trụ song song này *thực sự* tồn tại hay không? Liệu có ai khác vui vẻ viết thư cho tôi từ bàn phím máy tính trong vũ trụ mà Hitler đã thắng? Hay sự sắp đặt đó chẳng qua chỉ là một hư cấu toán học thuận tiện?

Có một vấn đề hiển nhiên: làm thế nào có thể biết chắc rằng trong thế giới bị thống trị bởi giấc mơ Hitler – Đế chế Ngàn năm – các máy tính giống như tôi đang dùng có tồn tại? Rõ ràng là cần có nhiều vũ trụ hơn hai, và các sự kiện trong đó cũng phải theo các hình mẫu cổ điển có ý nghĩa. Vậy rất có thể là Stewart-2 không tồn tại nhưng Hitler-2 lại tồn tại. Một mô tả chung về sự hình thành và tiến hóa của các vũ trụ song song phải bao gồm việc “tách chúng ra” bất cứ khi nào có sự lựa chọn trạng thái lượng tử. Brian Greene chỉ ra rằng hình

ảnh đó là sai: chẳng có gì tách ra hết. Hàm sóng của vũ trụ đã, và luôn luôn sẽ, được tách rồi. Các hàm riêng thành phần của nó đã có sẵn *ở đó*: chúng ta hình dung có sự tách rời khi chúng ta chọn một trong chúng, nhưng điểm chủ yếu trong cách diễn giải của Everett là không có gì trong hàm sóng thực sự thay đổi cả.

Mặc dù vậy, một con số đáng ngạc nhiên các nhà vật lý đã chấp nhận cách giải thích đa vũ trụ. Con mèo của Schrödinger thực sự vừa sống vừa chết. Hitler thực sự vừa thắng vừa thua. Một trong những phiên bản của chúng ta sống ở một trong các vũ trụ đó, những phiên bản khác thì không. Đó là điều mà toán học nói. Đó không phải là một sự giải thích, mà là một cách thuận tiện sắp xếp các tính toán. Nó cũng thực như bạn và tôi vậy. Nó *là* bạn và tôi.

Tôi thì không tin. Không phải sự chồng chập khiến tôi băn khoăn, mặc dù tôi không thấy sự tồn tại của một thế giới Nazi song song là không thể tưởng tượng nổi, hay bất khả[3]. Nhưng tôi kiên quyết phản đối ý tưởng cho rằng bạn có thể tách một hàm sóng lượng tử theo những câu chuyện lịch sử ở thang con người. Sự tách toán học xảy ra ở cấp độ các trạng thái lượng tử của các hạt cấu thành. Đa số các tổ hợp của các trạng thái hạt là hoàn toàn vô nghĩa ở thang bậc con người. Một thay thế đơn giản cho con mèo chết không phải là con mèo sống. Đó là con mèo chết với một electron ở một trạng thái khác. Những thay thế phức tạp có số lượng rất lớn so với trường hợp con mèo sống. Nó bao gồm cả con mèo bất ngờ nổ tung vì một nguyên nhân không rõ ràng nào đó, con mèo biến thành một bình hoa, con mèo đã được bầu làm tổng thống nước Mỹ và cả con mèo đã sống sót thậm chí mặc dù

nguyên tử phóng xạ đã làm cho chất độc thoát ra. Những con mèo thay thế này rất hữu ích về mặt hùng biện, nhưng không tiêu biểu. Đa số các thay thế này còn chẳng phải là con mèo; thực tế *chúng còn không thể mô tả được theo các thuật ngữ cổ điển*. Nếu vậy, phần lớn các Stewart thay thế sẽ không thể được nhận ra như một con người, và hầu hết những thứ tồn tại đều như thế trong một thế giới hoàn toàn vô nghĩa theo các thuật ngữ của con người. Như vậy, cơ may để một phiên bản khác hơi trẻ hơn của tôi sống trong một thế giới khác làm cho câu chuyện có ý nghĩa đối với con người là quá nhỏ bé.

Vũ trụ có thể là một chồng chập cực kỳ phức tạp của các trạng thái có thể thay thế nhau. Nếu bạn nghĩ cơ học lượng tử về cơ bản là đúng, thì nó cần phải như vậy. Năm 1983, Stephen Hawking đã nói rằng cách giải thích đa vũ trụ là "hiển nhiên đúng" theo nghĩa đó. Nhưng từ đó đừng suy ra rằng có tồn tại một chồng chất của nhiều vũ trụ trong đó con mèo sống hoặc chết, Hitler thắng hoặc thua. Không có lý do gì để cho rằng các thành phần toán học có thể được tách ra thành các tập hợp ghép khít với nhau để tạo ra các câu chuyện của con người. Hawking đã bác bỏ cách giải thích câu chuyện của hình thức luận đa vũ trụ khi nói rằng "Thực sự, tất cả mọi thứ mà người ta làm là tính các xác suất có điều kiện – nói cách khác, là tính xác suất xảy ra của A, khi đã cho B. Tôi nghĩ rằng đó chính là cách giải thích đa vũ trụ. Một số người phủ lên nó rất nhiều sự bí ẩn về việc tách hàm sóng thành các phần khác nhau. Nhưng tất cả những thứ mà chúng ta tính toán chỉ là các xác suất có điều kiện".

Cũng rất đáng so sánh chuyện kể về Hitler với câu chuyện của Feynman về tia sáng. Theo phong cách của các Hitler

thay thế nhau, Feynman sẽ nói với chúng ta rằng có một thế giới cổ điển mà ở đó tia sáng phản xạ trên gương với góc tới bằng góc phản xạ, một thế giới khác có góc đó sai lệch 1 độ, một thế giới khác nữa sai lệch 2 độ, v.v. Nhưng ông đã không nói thế, ông nói với chúng ta rằng có *một* thế giới cổ điển đột sinh từ chồng chập các trạng thái lượng tử thay thế nhau. Có thể có vô số các vũ trụ song song ở mức lượng tử, nhưng nó không tương ứng một cách có ý nghĩa với các thế giới song song có thể mô tả được ở thang cổ điển. Như Feynman giải thích về tia sáng, *cái* thế giới cổ điển sẽ đột sinh khi bạn chồng chập tất cả các trạng thái lượng tử thay thế. Chỉ có một chồng chập như thế, do đó cũng chỉ có một vũ trụ cổ điển mà thôi. Đó là vũ trụ của chúng ta.

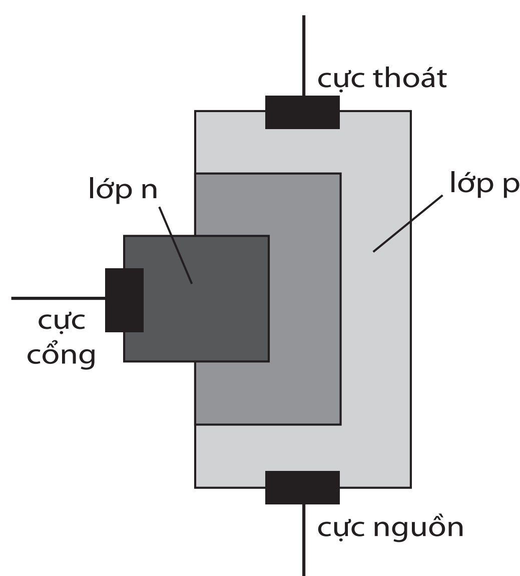
Cơ học lượng tử không chỉ giới hạn trong phòng thí nghiệm. Toàn bộ điện tử học hiện đại đều phụ thuộc vào nó. Công nghệ bán dẫn, cơ sở của tất cả các mạch tích hợp – tức các chip silicon – đều là cơ học lượng tử. Không có vật lý lượng tử thì không ai dám mơ rằng các dụng cụ như thế có thể hoạt động. Máy tính, điện thoại di động, các dàn máy CD, các bảng điều khiển trò chơi, xe hơi, tủ lạnh, lò vi sóng, tóm lại là tất cả các dụng cụ sinh hoạt gia đình đều chứa các chip nhớ, chứa những chỉ dẫn bắt các dụng cụ đó phải làm những cái mà chúng ta muốn. Nhiều dụng cụ chứa hệ mạch phức tạp hơn, như các bộ vi xử lý, phụ thuộc hoàn toàn vào một chip. Đa số các chip nhớ là biến tấu trên dụng cụ bán dẫn thực sự đầu tiên: transistor.

Vào những năm 1930, hai nhà vật lý Mỹ là Eugene Wigner và Frederick Seitz đã tiến hành phân tích chuyển động của các electron qua tinh thể, một bài toán đòi hỏi phải sử dụng

cơ học lượng tử. Và họ đã phát hiện ra một số đặc điểm cơ bản của các chất bán dẫn. Một số vật liệu là chất dẫn điện: các electron có thể chuyển động qua chúng một cách dễ dàng. Kim loại là các chất dẫn điện tốt, và trong đời sống hằng ngày, dây đồng được sử dụng phổ biến cho mục đích đó. Các chất cách điện không cho phép các electron chuyển động qua, do vậy chúng cản trở dòng điện: các chất dẻo bọc các dây điện và tránh cho chúng ta khỏi bị điện giật khi cắm điện cho TV chính là chất cách điện. Chất bán dẫn có tính chất của cả hai, tùy thuộc vào hoàn cảnh. Silic là nổi tiếng nhất và được dùng rộng rãi, nhưng một số nguyên tố khác như antimony, arsenic, boron, carbon, germanium và selenium cũng là các chất bán dẫn. Do các chất bán dẫn có thể chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác, chúng được sử dụng để điều khiển các dòng điện, và đó chính là cơ sở của tất cả các mạch điện.

Wigner và Seitz đã phát hiện ra rằng những tính chất của chất bán dẫn phụ thuộc vào các mức năng lượng của các electron ở trong chúng, và các mức năng lượng này có thể điều chỉnh được nhờ sự "pha tạp" vật liệu bán dẫn cơ bản bằng cách đưa thêm vào những lượng nhỏ các tạp chất cụ thể. Có hai loại bán dẫn quan trọng: loại p, tải điện bởi dòng các electron và loại n, trong đó dòng điện chạy theo chiều ngược với các electron, được tải bởi các "lỗ trống" là những chỗ ít electron hơn bình thường. Năm 1947, John Bardeen và Walter Brattain làm việc ở Bell Labs, đã phát hiện ra rằng tinh thể germanium có thể hoạt động như một bộ khuếch đại. Nếu cho một dòng điện đi vào nó, thì dòng đi ra sẽ mạnh hơn. William Shockley, người đứng đầu nhóm nghiên cứu vật lý chất rắn ở đây, nhận thấy tầm quan trọng của phát hiện này, và đã khởi xướng một dự án nghiên cứu các chất bán dẫn.

Và kết quả là sự ra đời của transistor – viết tắt của “transfer resistor”. Trước đấy cũng đã có một số bằng sáng chế trong lĩnh vực này nhưng đó là những dụng cụ không hoạt động hoặc chỉ là những bài báo được công bố. Về mặt kỹ thuật, dụng cụ của Bell Labs có tên là transistor trường tiếp xúc (JFET – viết tắt của *junction gate field-effect transistor*, hình 55). Từ đột phá ban đầu này, người ta đã phát minh ra nhiều loại transistor khác. Hãng Texas Instruments đã sản xuất được loại transistor silic đầu tiên vào năm 1954. Cùng năm đó cũng xuất hiện một máy tính lắp ráp bằng các transistor (TRIDAC), do quân đội Mỹ chế tạo. Máy này có kích thước 3 feet khối (0,084951 mét khối) và tiêu thụ điện chỉ như một bóng đèn. Đó là bước đầu trong một chương trình khổng lồ của Mỹ nhằm tìm kiếm những dụng cụ thay cho các đèn điện tử chân không quá cồng kềnh, mỏng manh và không khả thi đối với việc sử dụng trong quân sự.



Hình 55 Cấu trúc của một JFET. Cực nguồn (source) và cực thoát (drain) ở hai đầu là lớp loại p, trong khi cực cổng (gate) là một lớp loại n có tác dụng điều khiển dòng. Nếu bạn tưởng tượng dòng các electron đi từ cực nguồn tới cực thoát như một ống nước, thì cực cổng thực tế sẽ bóp ống lại, làm tăng áp suất (điện áp) ở cực thoát.

Do công nghệ bán dẫn dựa trên sự pha tạp silic hoặc các chất tương tự bằng các tạp chất, nên nó thích hợp với sự tiểu hình hóa. Các mạch có thể dựng thành các lớp trên một thể nền silic bằng cách bắn phá bề mặt bằng các tạp chất mong muốn, rồi dùng acid khắc bỏ đi các vùng không mong muốn. Những vùng bị ảnh hưởng được xác định bởi màn chắn (hay mặt nạ) tạo ra bằng cách chụp ảnh, và chúng có thể co lại tới kích thước rất nhỏ nhờ các thấu kính quang học. Điện tử học ngày hôm nay đã ra đời từ tất cả những thứ đó, kể cả các chip nhớ có thể lưu trữ được hàng tỉ byte thông tin cũng như các bộ vi xử lý cực nhanh điều phối sự hoạt động của các máy tính.

Một ứng dụng phổ biến khác của cơ học lượng tử là máy laser. Đó là dụng cụ phát ra một chùm rất mạnh ánh sáng kết hợp: tức là các sóng ánh sáng đồng pha với nhau. Laser gồm một hốc quang học với hai gương phẳng ở hai đầu, được choán đầy bởi một chất phản ứng với ánh sáng có bước sóng đặc biệt để tạo ra ánh sáng mạnh hơn có cùng bước sóng, tức nó là một bộ khuếch đại ánh sáng. Để bắt đầu quá trình phát sáng, người ta bơm năng lượng vào và để cho ánh sáng nảy qua nảy lại giữa hai gương, ánh sáng luôn được khuếch đại cho tới khi đạt đến cường độ đủ mạnh thì cho đi ra ngoài. Môi trường tạo khuếch đại giữa hai gương có thể là lỏng, khí, tinh thể hay bán dẫn. Những vật liệu khác nhau sẽ hoạt động ở các bước sóng khác nhau. Quá trình khuếch đại phụ thuộc vào cơ học lượng tử của các nguyên tử. Các electron trong nguyên tử có thể ở các trạng thái năng lượng khác nhau, và chúng có thể chuyển giữa các trạng thái đó bằng cách hấp thụ hay phát xạ các photon.

LASER là từ viết tắt của *light amplification by stimulated emission of radiation* có nghĩa là khuếch đại ánh sáng bằng bức xạ cảm ứng. Khi máy laser đầu tiên được phát minh ra, nó đã bị nhiều người chế nhạo là dùng đáp số đi tìm bài toán! Đó chẳng qua là do thiếu trí tưởng tượng: một khi đã có lời giải thì sẽ nhanh chóng xuất hiện hàng đống các bài toán. Tạo ra chùm sáng kết hợp là một công nghệ cơ bản và sẽ luôn luôn có những ứng dụng, cũng hệt như một chiếc búa hoàn hảo thì sẽ tự động tìm ra vô số công việc. Khi phát minh ra một công nghệ chung, bạn không cần phải có sẵn trong đầu một ứng dụng cụ thể nào. Hiện nay, chúng ta dùng laser cho nhiều mục đích đến nỗi không thể liệt kê hết được. Có những ứng dụng tầm thường như bút trỏ laser cho các giảng viên và các chùm laser để bạn tùy ý sử dụng (DIY – *do it youself*). Các máy đọc đĩa CD hay DVD và Blu-ray đều dùng laser để đọc thông tin từ những vết nhỏ trên đĩa. Các nhân viên trắc đạc dùng laser để đo khoảng cách và góc. Các nhà thiên văn dùng laser để đo khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng. Các nhà phẫu thuật dùng laser để thực hiện các ca mổ rất tinh vi. Điều trị mắt bằng laser hiện nay là công việc thường nhật như sửa võng mạc bị bong, đắp lại giác mạc để sửa các tật của mắt thay vì phải đeo kính hoặc dùng kính áp tròng. Hệ thống chống tên lửa trong "Cuộc chiến giữa các vì sao" có ý định sử dụng các laser mạnh để bắn hạ các tên lửa của đối phương, và mặc dù hệ thống này còn chưa được xây dựng, nhưng một số máy laser thì đã có. Việc sử dụng laser trong quân sự, như các loại súng trong truyện khoa học viễn tưởng, hiện nay cũng đang được nghiên cứu. Thậm chí còn có khả năng phóng các con tàu không gian bằng cách làm cho chúng lướt trên một chùm laser mạnh.

Những ứng dụng mới của cơ học lượng tử hầu như xuất hiện hằng tuần. Một trong những ứng dụng mới nhất là các chấm lượng tử, tức các mẩu nhỏ chất bán dẫn mà các tính chất điện tử của chúng, kể cả ánh sáng mà chúng phát ra, thay đổi theo hình dạng và kích thước của các chấm đó. Do vậy chúng có thể được thiết kế để có được các tính chất mong muốn. Những chấm này đã có rất nhiều ứng dụng, kể cả sự tạo ảnh sinh học, trong đó chúng có thể thay thế cho những thuốc nhuộm truyền thống (thường là rất độc). Hơn nữa, chúng hoạt động tốt hơn và phát ra ánh sáng mạnh hơn.

Theo đường hướng đó, hiện nay một số kỹ sư và các nhà vật lý đang nghiên cứu về các linh kiện cơ bản của một máy tính lượng tử. Trong một dụng cụ như vậy, các trạng thái nhị phân 0 và 1 có thể được chồng chập thành một tổ hợp bất kỳ, và thực tế cho phép thực hiện những tính toán cả hai giá trị đồng thời. Điều này cũng cho phép thực hiện nhiều tính toán khác nhau một cách song song, làm cho tốc độ tính toán tăng lên kinh khủng. Các thuật toán lý thuyết đã được xây dựng để thực hiện những nhiệm vụ như phân tích một số thành các thừa số nguyên tố. Các máy tính truyền thống sẽ gặp khó khăn khi các con số cần phân tích có hơn 100 chữ số hoặc cỡ như vậy, nhưng đối với một máy tính lượng tử thì ngay cả việc phân tích một con số lớn hơn nhiều cũng khá dễ dàng. Trở ngại chính của tính toán lượng tử là sự mất kết hợp phá hủy các trạng thái được chồng chập. Con mèo Schrödinger đòi hỏi sự trả thù cho những hành động vô nhân tính đối với nó.

15 Mật mã, truyền thông, và máy tính

Lý thuyết thông tin

$$H = -\sum_{x} p(x) \log p(x)$$

thông tin; tổng; xác suất của ký hiệu; ký hiệu; logarit cơ số 2

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Nó xác định có bao nhiêu thông tin trong một thông điệp, và các ký hiệu tạo nên thông điệp đó có thể xuất hiện với xác suất bằng bao nhiêu.

Tại sao nó lại quan trọng?

Đó là phương trình mở ra thời đại thông tin. Nó xác lập các giới hạn về hiệu quả truyền thông, cho phép các kỹ sư dừng tìm kiếm các mã quá hiệu quả không thể tồn tại. Nó là cơ sở đối với truyền thông số ngày hôm nay – điện thoại, đĩa CD, DVD, internet.

Nó đã dẫn tới những gì?

Các mã phát hiện sai và sửa sai hiệu quả được dùng trong mọi thứ, từ các đĩa CD tới các con tàu thăm dò không gian. Các ứng dụng bao gồm: thống kê, trí tuệ nhân tạo, mật mã học, rút ra ý nghĩa của các chuỗi ADN.

Năm 1977, NASA đã cho phóng hai con tàu thăm dò không gian, *Voyager 1* và *2*. Các hành tinh của Hệ Mặt Trời đã an bài ở những vị trí thuận lợi một cách khác thường, giúp con người có thể tìm ra những quỹ đạo hiệu quả một cách hợp lý cho phép đưa những con tàu thăm dò không gian tới thăm một số hành tinh. Mục đích ban đầu là thám hiểm Mộc tinh và Thổ tinh, nhưng nếu các con tàu này còn chịu đựng được thì những quỹ đạo đó có thể đưa chúng đi ngang qua Thiên Vương tinh và Hải Vương tinh. *Voyager 1* còn có thể tới được Diêm Vương tinh (vào thời gian đó vẫn được coi là một hành tinh, và mặc dù bây giờ nó không còn là hành tinh nữa nhưng thực tế sự hấp dẫn của nó vẫn hoàn toàn không thay đổi), nhưng mặt trăng Titan đầy hấp dẫn của Thổ tinh được ưa thích hơn, nên đã được thay thế cho Diêm Vương tinh. Cả hai con tàu đã thành công một cách ngoạn mục, và giờ đây *Voyage 1* đã trở thành vật nhân tạo đi xa Trái Đất nhất, khoảng hơn 10 tỉ dặm, và vẫn còn gửi dữ liệu về.

Cường độ tín hiệu giảm theo bình phương khoảng cách, vì vậy tín hiệu mà Trái Đất nhận được chỉ bằng 10^{-20} cường độ mà nó sẽ nhận được ở khoảng cách 1 dặm. Tức là nhỏ hơn 100 tỉ tỉ lần. *Voyager 1* phải có một máy phát cực mạnh… Không, nó chỉ là một con tàu không gian nhỏ. Năng lượng hoạt động của nó chỉ do đồng vị phóng xạ plutonium-238 cung cấp, năng lượng khả dụng toàn phần của nó bây giờ chỉ bằng 1/8 của một ấm điện thông dụng. Có hai lý do giải thích

tại sao chúng ta vẫn còn nhận được thông tin hữu ích từ con tàu này: chúng ta có các máy thu mạnh trên mặt đất và các mã đặc biệt được dùng để bảo vệ dữ liệu tránh những sai lỗi gây bởi các nhân tố bên ngoài, như các nhiễu chẳng hạn.

Voyager 1 có thể gửi dữ liệu nhờ hai hệ thống khác nhau. Một là kênh tốc độ thấp, có thể gửi 40 chữ số nhị phân, tức các số 0 và 1, mỗi giây, nhưng nó không cho phép mã hóa để xử lý các sai lỗi tiềm tàng. Hệ thống thứ hai, kênh tốc độ cao, có thể truyền lên tới 120.000 chữ số nhị phân mỗi giây, và chúng được mã hóa sao cho các sai lỗi có thể được phát hiện và sửa ngay với điều kiện chúng không xảy ra quá thường xuyên. Cái giá phải trả cho khả năng này là các thông báo phải dài gấp đôi, do đó chúng chỉ truyền tải được một nửa số dữ liệu mà chúng có thể. Vì các sai lỗi có thể phá hủy dữ liệu, nên đó là cái giá cũng đáng để trả.

Các mã thuộc loại này đã được sử dụng rộng rãi trong tất cả các dạng truyền thông hiện đại: các sứ mệnh không gian, điện thoại cố định và di động, internet, các đĩa CD và DVD, Blu-ray, v.v. Thiếu chúng, tất cả các dạng truyền thông sẽ dễ bị sai lỗi, và điều đó thì không thể chấp nhận được. Chẳng hạn, bạn dùng internet để thanh toán. Nếu lệnh của bạn là trả 20$, nhưng nó lại trở thành 200$ thì hẳn bạn sẽ không thể hài lòng. Một đầu đọc đĩa CD dùng các thấu kính mỏng nhằm hội tụ chùm laser vào các rãnh rất nhỏ được khắc trên vật liệu làm đĩa. Các thấu kính này đặt bên trên, cách mặt đĩa quay một khoảng nhỏ. Dù vậy, bạn vẫn có thể nghe các đĩa CD trong khi lái xe dọc theo một con đường khấp khểnh, đó là bởi vì tín hiệu đã được mã hóa cho phép phát hiện được các sai lỗi và sửa ngay nhờ hệ thống điện tử học, trong khi đĩa

vẫn đang chơi. Cũng có những thủ thuật khác, nhưng đây là điều cơ bản.

Thời đại thông tin của chúng ta dựa trên các tín hiệu số hóa – đó là những chuỗi dài các chữ số 0 và 1, mà cụ thể là có và không có các xung điện hay vô tuyến. Các thiết bị gửi, nhận và lưu trữ tín hiệu dựa trên các mạch điện tử rất nhỏ và rất chính xác được thiết kế trên các phiến silic nhỏ xíu gọi là các "chip". Nhưng dẫu cho việc thiết kế và sản xuất có thông minh thế nào đi nữa, thì không có một chip nào có thể vận hành được mà lại không có các mã phát hiện và sửa sai. Trong bối cảnh đó, thuật ngữ "thông tin" không còn là từ không chính thức để chỉ 'know-how' (bí quyết) nữa mà đã trở thành một đại lượng số có thể đo đạc được. Và đại lượng này đã cung cấp những hạn chế cơ bản đối với hiệu quả mà các mã có thể sửa đổi các thông điệp nhằm bảo vệ chúng chống lại các sai sót. Biết những hạn chế này đã tiết kiệm cho các kỹ sư rất nhiều thời gian vô ích dùng để cố gắng phát minh ra các mã hiệu quả hơn mà thực tế họ không thể. Nó cũng là cơ sở cho văn hóa thông tin ngày hôm nay.

Tôi đã đủ già để còn nhớ cái thời chỉ có một cách duy nhất để gọi điện cho ai đó ở nước ngoài, bạn sẽ phải đăng ký trước với công ty điện thoại – ở Anh chỉ có một công ty duy nhất đó là công ty Post Office Telephones – đặt trước thời gian và thời lượng cuộc gọi. Ví dụ, bạn sẽ gọi 10 phút vào lúc 3h45 chiều, ngày 11 tháng Giêng. Và giá thì là cả một gia tài. Ít tuần trước một người bạn và tôi có một cuộc phỏng vấn từ Anh quốc, kéo dài cả tiếng đồng hồ cho một hội nghị về khoa học viễn tưởng ở Úc, nhờ dùng Skype™. Miễn phí hoàn hoàn, lại còn gửi cả video và âm thanh. Trong 50 năm đã có quá nhiều thay

đổi. Ngày nay chúng ta trao đổi thông tin online với bạn bè, cả thực cũng như ảo, mà rất nhiều người sưu tập như sưu tập bướm từ các mạng xã hội. Chúng ta không mua các đĩa nhạc CD hay các đĩa phim DVD nữa: chúng ta mua thông tin chứa trong đó, được tải về từ internet. Rồi sách cũng sẽ đi theo con đường đó. Các công ty nghiên cứu thị trường đã thu thập được một lượng lớn thông tin về thói quen mua sắm của chúng ta và dùng nó để tạo ảnh hưởng đến những thứ mà chúng ta mua sắm. Ngay trong y tế, đã có sự chú trọng ngày càng tăng đến thông tin chứa trong ADN của chúng ta. Thái độ đối với điều này thường là: nếu bạn có thông tin đòi hỏi phải làm gì đó, thì chỉ thế thôi là đủ; bạn không cần phải thực sự làm điều đó, hoặc thậm chí không cần biết làm điều đó như thế nào.

Có rất ít nghi ngờ rằng cuộc cách mạng thông tin đã làm biến đổi cuộc sống chúng ta, nhìn chung, trường hợp may mắn có thể mang lại những lợi ích vượt trội các thiệt hại – ngay cả khi những thiệt hại bao hàm cả sự mất mát tính riêng tư, sự truy cập trái phép vào tài khoản của chúng ta từ bất cứ đâu trên thế giới chỉ bằng một cú nhấp chuột, và những virus máy tính có thể làm tê liệt hoạt động của nhà băng hoặc một nhà máy điện hạt nhân.

Vậy thông tin là gì? Tại sao nó lại có sức mạnh ghê gớm như vậy? Và nó có thực là cái như đã được tuyên bố hay không?

Khái niệm thông tin như một đại lượng đo được đã xuất hiện từ các phòng thí nghiệm nghiên cứu của hãng Bell Telephone, nhà cung cấp chính dịch vụ điện thoại ở Mỹ từ năm 1877 và chấm dứt năm 1984 trên cơ sở chống lũng đoạn (độc quyền). Trong số các kỹ sư của hãng có Claude Shannon, một người

họ hàng xa của nhà sáng chế nổi tiếng Edison. Môn học giỏi nhất của Shannon ở trường là toán học, và ông rất có năng khiếu chế tạo các dụng cụ cơ học. Vào thời gian làm việc cho Bell Labs, ông là nhà toán học kiêm mật mã, đồng thời cũng là một kỹ sư điện tử. Ông là người đầu tiên áp dụng logic toán – cái gọi là đại số Boole – để tính toán các mạch điện. Ông đã dùng kỹ thuật này để đơn giản hóa việc thiết kế các mạch chuyển mạch dùng trong hệ thống điện thoại và sau đó được mở rộng sang những vấn đề khác trong thiết kế mạch.

Trong Thế chiến thứ II, Shannon làm việc về mật mã và truyền thông, ông cũng đã phát triển một số ý tưởng cơ bản tường trình trong một bản ghi nhớ được coi là mật của Bell vào năm 1945 với nhan đề *Một lý thuyết toán học của mật mã*. Năm 1948, ông đã cho công bố một số công trình của mình trong sách báo công khai và bài viết năm 1945 đã được giải mật, được công bố ít lâu sau đó. Cùng với một số tư liệu của Warren Weaver, nó đã xuất hiện vào năm 1949 như là *Một lý thuyết toán học của truyền thông*.

Shannon rất muốn biết phải truyền tin như thế nào cho có hiệu quả khi mà đường truyền rất dễ bị các sai lỗi ngẫu nhiên, hay nói theo thuật ngữ chuyên môn là bị "nhiễu". Tất cả các loại truyền thông trên thực tế đều bị nhiễu, do lỗi của thiết bị, do các tia vũ trụ hoặc do sự thay đổi không tránh khỏi của các linh kiện trong mạch. Một giải pháp để giảm thiểu nhiễu là chế tạo các thiết bị tốt hơn, nếu có thể. Một cách khác là mã hóa các tín hiệu nhờ sử dụng các phương pháp toán học có thể phát hiện lỗi và thậm chí có thể sửa ngay. Mã phát hiện lỗi đơn giản nhất là gửi cùng một thông tin hai lần (*the same message twice*). Nếu bạn nhận được:

the same massage twice
the same message twice

thì rõ ràng có lỗi ở từ thứ ba. Nhưng nếu không hiểu tiếng Anh thì sẽ không biết phiên bản nào là đúng. Sự lặp lại lần thứ ba sẽ giải quyết được vấn đề này theo nguyên tắc đa số và trở thành một mã sửa sai. Những mã như vậy chính xác và hiệu quả như thế nào còn phụ thuộc vào khả năng xảy ra và bản chất của các sai lỗi. Nếu kênh truyền tin rất nhiễu chẳng hạn, thì cả ba phiên bản của tin có thể bị bóp méo tồi tệ đến mức không thể nào dựng lại được.

Trên thực tế, sự lặp lại một cách đơn giản như vậy là quá thô sơ: có nhiều cách hiệu quả hơn để mã hóa thông tin nhằm phát hiện và sửa sai. Xuất phát điểm của Shannon là xác định ý nghĩa của hiệu quả. Tất cả các mã như vậy đều thay thế một tin bằng một tin dài hơn. Hai mã nói ở trên tăng gấp đôi và gấp ba chiều dài. Các tin dài hơn thì thời gian gửi đi cũng lâu hơn, giá thành cũng cao hơn, chiếm bộ nhớ nhiều hơn và sẽ dễ làm tắc kênh truyền thông. Vì vậy đối với tốc độ phát hiện và sửa sai đã cho, thì hiệu quả có thể được định lượng như tỉ số của chiều dài tin được mã hóa và chiều dài của tin gốc.

Đối với Shannon, vấn đề chủ yếu là xác định những giới hạn cố hữu của những mã như vậy. Giả sử một kỹ sư lập ra một mã mới. Liệu có cách nào đó xác định được nó cũng tốt cỡ như là người ta đã nhận được hay không hay có thể hoàn thiện thêm nữa? Shannon đã bắt đầu bằng cách định lượng hóa một thông điệp chứa đựng bao nhiêu thông tin. Bằng cách đó, ông đã biến "thông tin" từ một ẩn dụ mơ hồ thành một khái niệm khoa học.

Có hai cách khác nhau để biểu diễn một con số. Nó có thể được định nghĩa bằng một dãy các ký hiệu, chẳng hạn như các chữ số thập phân, hoặc nó có thể tương ứng với một đại lượng vật lý nào đó như chiều dài một cây gậy hoặc điện áp trên một dây dẫn. Biểu diễn loại thứ nhất là số hóa còn biểu diễn thứ hai là tương tự. Vào những năm 1930, các tính toán khoa học và kỹ thuật thường được thực hiện bằng các máy tính tương tự, bởi vì ở thời đó chúng dễ dàng thiết kế và chế tạo hơn. Ví dụ, các mạch điện tử đơn giản dễ dàng cộng và nhân các điện áp. Tuy nhiên, các máy thuộc loại này kém chính xác và các máy tính số bắt đầu xuất hiện. Mọi người nhanh chóng nhận ra rằng biểu diễn các con số thuận tiện nhất không phải là trong hệ thập phân, tức là theo cơ số 10, mà là hệ nhị phân, cơ số 2. Trong ký hiệu thập phân, có 10 ký hiệu từ 0 đến 9. Đối với mỗi bước dịch một ký tự về bên trái thì giá trị của nó nhân lên 10 lần. Ví dụ, số 157 biểu diễn

$$1\times10^2+5\times10^1+7\times10^0$$

Ký hiệu nhị phân cũng dùng nguyên tắc cơ sở y như thế, nhưng bây giờ chỉ có hai ký hiệu là 0 và 1. Một số nhị phân, chẳng hạn như 10011101, là mã hóa dưới dạng ký hiệu của số

$$1\times2^7+0\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$$

Như vậy, mỗi chữ số sẽ nhân đôi giá trị của nó đối với mỗi bước dịch chuyển sang trái. Trong hệ thập phân số đó bằng 157, vậy là chúng ta đã biểu diễn cùng một số dưới hai dạng khác nhau, bằng cách dùng hai loại ký hiệu khác nhau.

Ký hiệu nhị phân rất lý tưởng đối với các hệ điện tử bởi vì phân biệt giữa hai giá trị khả dĩ của một dòng điện, một điện áp hoặc một từ trường sẽ dễ dàng hơn nhiều so với phân biệt

nhiều hơn hai giá trị. Nói một cách nôm na, 0 có thể có nghĩa là "không có dòng điện" và 1 có nghĩa là "có dòng điện"; 0 có thể có nghĩa "không có từ trường" và 1 có nghĩa là "có từ trường" và v.v. Thực tế, các kỹ sư đặt một giá trị ngưỡng, và khi đó 0 có nghĩa là "dưới ngưỡng", còn 1 có nghĩa là "trên ngưỡng". Bằng cách giữ các giá trị hiện thời cho 0 và 1 đủ xa nhau, và đặt ngưỡng ở giữa, nguy cơ lẫn lộn 0 và 1 là rất nhỏ. Vì vậy các dụng cụ dựa trên ký hiệu nhị phân rất chắc chắn. Đó chính là nguyên nhân chúng trở thành công cụ số hóa.

Với những máy tính thế hệ đầu, các kỹ sư đã phải vật lộn để giữ cho mạch biến thiên trong những giới hạn hợp lý, hệ nhị phân đã làm cho cuộc sống của họ trở nên dễ chịu hơn nhiều. Các mạch hiện đại trên các chip silic đủ chính xác để cho phép có những lựa chọn khác, như cơ số 3 chẳng hạn. Nhưng thiết kế của các máy tính số đã được dựa trên ký hiệu nhị phân quá lâu rồi, nên hiện nay, nói chung người ta vẫn gắn bó với nhị phân, ngay cả khi những khả năng lựa chọn khác vẫn có thể dùng được. Các mạch hiện đại cũng rất nhỏ và rất nhanh. Không có những đột phá công nghệ như vậy trong sản xuất mạch thì thế giới chỉ có khoảng vài ngàn máy tính thay vì hàng tỉ như hiện nay. Thomas J. Watson, người sáng lập hãng IBM, một lần đã nói rằng ông không nghĩ là lại có một thị trường cho khoảng hơn 5 ngàn máy tính trên khắp thế giới. Vào thời gian đó, điều ông nói là có lý, bởi vì thời đó các máy tính mạnh nhất có kích thước lớn cỡ một tòa nhà, tiêu thụ điện năng bằng cả một làng và giá thành cỡ 10 triệu đôla. Chỉ có những cơ quan lớn của chính phủ, như quân đội Mỹ, mới đủ sức mua một cái, hoặc mới có đủ việc để sử dụng nó. Ngày nay, một điện thoại di động lỗi mốt cũng có

khả năng tính toán mạnh hơn cả những máy tính vào thời Watson đưa ra ý kiến trên.

Sự lựa chọn biểu diễn nhị phân cho các máy tính số, từ đó cũng cho cả các thông điệp số hóa được truyền giữa các máy tính – và sau đó giữa hai dụng cụ điện tử bất kỳ trên hành tinh – đã dẫn tới một đơn vị cơ bản của thông tin: *bit*. Tên này thực chất là rút gọn của "binary digital" (chữ số nhị phân), và một bit thông tin là một số 0 hay một số 1. Cũng thật hợp lý khi định nghĩa thông tin "được chứa trong" một dãy các chữ số nhị phân là tổng số các chữ số trong dãy đó. Ví dụ dãy có 8 chữ số 10011101 chứa 8 bit thông tin.

Shannon đã nhận thức được rằng việc đếm bit một cách thô sơ như trên có ý nghĩa như một phép đo thông tin, chỉ nếu các số 0 và 1 giống như ngửa và sấp khi tung một đồng xu hoàn hảo, tức là khả năng xuất hiện của chúng là như nhau. Giả sử chúng ta biết rằng trong một số hoàn cảnh cụ thể nào đó, 0 xuất hiện 9 lần trong 10, còn 1 chỉ xuất hiện 1 lần. Khi chúng ta đọc dọc theo chuỗi các chữ số, chúng ta kỳ vọng hầu hết các chữ số là 0. Nếu sự kỳ vọng đó được xác nhận thì chúng ta sẽ không nhận được nhiều thông tin, bởi vì dù sao đó cũng là cái mà chúng ta chờ đợi. Tuy nhiên, nếu tôi thấy số 1, điều đó chuyển tải *nhiều* thông tin hơn, bởi vì tôi chẳng kỳ vọng điều đó một chút nào.

Chúng ta có thể lợi dụng điều này để mã hóa thông tin một cách hiệu quả hơn. Nếu 0 xuất hiện với xác suất 9/10 và 1 với xác suất 1/10, chúng ta có thể định nghĩa một mã mới như sau:

000 → 00 (dùng bất cứ khi nào có thể)
00 → 01 (nếu không có 000 nào còn lại)

0 → 10 (nếu không có 00 nào còn lại)
1 → 11 (luôn luôn)

Cái mà tôi muốn nói ở đây là thông điệp như

00000000100010000010000001000000000

trước hết được phân thành các khối 000, 00, 0, hoặc 1. Với các xâu gồm các số 0 liên tiếp ta dùng 000 bất cứ khi nào có thể. Nếu không, những cái còn lại hoặc là 00 hoặc là 0 tiếp theo bởi số 1. Và đây là thông điệp đã được phân ra như thế:

000-000-00-1-000-1-000-00-1-000-000-1-000-000-000

Sau khi mã hóa theo quy tắc trên, thông điệp ban đầu trở thành:

00-00-01-11-00-11-00-01-11-00-00-11-00-00-00

Thông điệp gốc có 35 chữ số, nhưng phiên bản mã hóa chỉ có 30. Lượng thông tin dường như đã bị giảm.

Đôi khi các phiên bản mã hóa có thể dài hơn, ví dụ 111 biến thành 111111. Nhưng điều đó rất hiếm bởi vì trung bình 1 chỉ xuất hiện 1 lần trong 10. Sẽ có khá nhiều các khối 000 bị rút thành 00. Còn các cặp 00 thì đổi thành 01, có cùng chiều dài, trong khi đó 0 tăng chiều dài thành 10. Kết quả là, nếu tính đường dài, đối với các thông điệp với xác suất đã cho của 0 và 1, thì phiên bản mã hóa sẽ ngắn hơn.

Mã của tôi ở đây còn rất thô sơ và một sự lựa chọn thông minh hơn sẽ còn rút ngắn được thông điệp hơn nữa. Một trong những câu hỏi chủ yếu mà Shannon muốn trả lời là: mã thuộc loại tổng quát đó có thể hiệu quả đến mức nào? Nếu bạn biết danh sách các ký hiệu được dùng để tạo ra một thông điệp và bạn cũng biết mỗi ký hiệu đó xuất hiện với xác suất bằng bao nhiêu, thì bằng cách dùng một mã thích hợp,

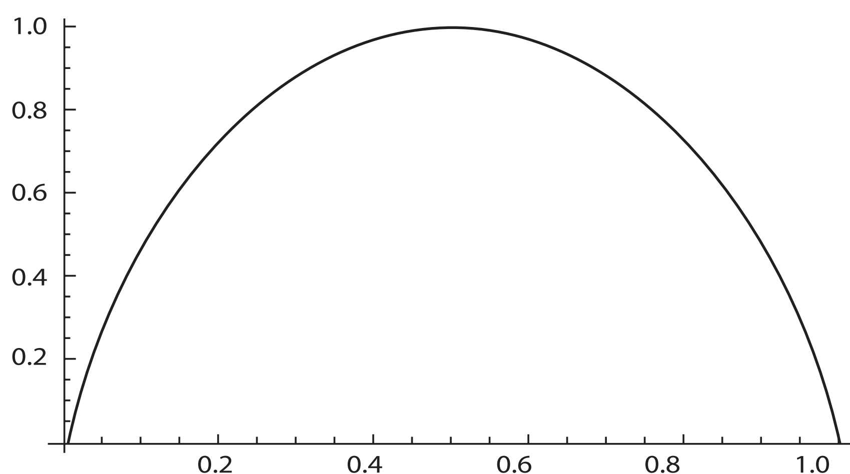
bạn sẽ rút ngắn thông điệp được bao nhiêu? Lời giải của ông là một phương trình khi định nghĩa lượng thông tin thông qua các xác suất đó.

Để đơn giản, giả sử rằng các thông điệp chỉ dùng hai ký hiệu là 0 và 1, nhưng bây giờ chúng giống như cách lật của một đồng xu không hoàn hảo, sao cho 0 có xác suất xuất hiện là p và 1 có xác suất là $q = 1 - p$. Sự phân tích của Shannon đã dẫn ông tới một công thức cho lượng thông tin, được định nghĩa như sau:

$$H = -p\log p - q\log q$$

ở đây log là logarit cơ số 2.

Thoạt đầu xem ra công thức trên dường như vô cùng xa lạ với trực giác. Ngay dưới đây tôi sẽ giải thích Shannon đã rút ra nó như thế nào, nhưng điều chủ yếu phải đánh giá được ở giai đoạn này là H sẽ thay đổi như thế nào khi p biến thiên từ 0 đến 1 và điều này được minh họa trên hình 56. Giá trị của H tăng trơn từ 0 đến 1 khi p tăng từ 0 đến 1/2, rồi sau đó giảm một cách đối xứng tới 0 khi p tiếp tục tăng từ 1/2 tới 1.



Hình 56 Sự phụ thuộc của hàm thông tin Shannon *H* vào *p*. Trục thẳng đứng là *H*, trục nằm ngang là *p*.

Shannon đã chỉ ra một số "tính chất lý thú" của hàm *H*:

- Nếu $p = 0$, trong trường hợp đó chỉ có ký hiệu 1 xuất hiện, hàm thông tin *H* bằng 0. Điều này có nghĩa là nếu chúng ta biết chắc ký hiệu nào sẽ được truyền tới chúng ta thì việc nhận được nó không chuyển tải một thông tin nào.
- Điều nói trên cũng đúng khi $p = 1$. Khi này chỉ ký hiệu 0 xuất hiện và chúng ta lại không nhận được một thông tin nào.
- Lượng thông tin là lớn nhất khi $p = q = 1/2$, tương ứng với việc tung đồng xu hoàn hảo. Trong trường hợp đó,

$$H = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = -\log\frac{1}{2} = 1$$

Luôn nhớ trong đầu rằng logarit ở đây là cơ số 2. Điều này có nghĩa là một lần tung một đồng xu hoàn hảo sẽ chuyển tải một bit thông tin, như chúng ta đã giả thiết ban đầu trước khi bận tâm tới chuyện mã hóa các thông điệp để nén chúng và các đồng xu không hoàn hảo.

- Trong tất cả các trường hợp khác, sẽ nhận được một ký hiệu chuyển tải thông tin *ít hơn* 1 bit.
- Đồng xu càng không hoàn hảo thì kết quả của một lần tung chuyển tải càng ít thông tin.
- Công thức trên đối với hai ký hiệu hoàn toàn bình đẳng với nhau.

Tất cả các tính chất đó đều phù hợp với trực giác của chúng ta về lượng thông tin mà chúng ta nhận được khi được cho biết kết quả tung đồng xu. Và điều đó tạo cho công thức trên một định nghĩa hợp lý. Sau đó Shannon đã cung cấp một nền tảng vững chắc cho định nghĩa của ông, bằng cách liệt kê một số

nguyên tắc cơ sở mà bất kỳ một phép đo lượng thông tin nào cũng phải tuân theo và rút ra một công thức duy nhất thỏa mãn những nguyên tắc đó. Cách làm của Shannon rất tổng quát: thông điệp có thể chọn từ nhiều ký hiệu khác nhau, xuất hiện với các xác suất $p_1, p_2, \ldots, p_n$ với n là số các ký hiệu. Hàm thông tin H được chuyển tải bằng cách chọn một trong các ký hiệu đó thỏa mãn:

- H là một hàm liên tục của $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tức là một thay đổi nhỏ trong các xác suất cũng dẫn tới những thay đổi nhỏ của lượng thông tin.
- Nếu tất cả các xác suất đều bằng nhau, điều này ngụ ý tất cả chúng đều bằng $1/n$, thì H sẽ tăng khi n tăng. Tức là nếu bạn chọn giữa 3 ký hiệu có cùng xác suất, thì thông tin mà bạn nhận được sẽ nhiều hơn so với khi bạn chọn chỉ giữa 2 ký hiệu có xác suất như nhau; lựa chọn 4 ký hiệu sẽ chuyển tải nhiều thông tin hơn so với chọn 3, v.v.
- Nếu có một cách tự nhiên để tách sự lựa chọn thành hai lựa chọn liên tiếp thì hàm H ban đầu sẽ là tổ hợp đơn giản của hai hàm H mới.

Điều kiện cuối cùng ở trên là dễ hiểu nhất thông qua một ví dụ trong phần Chú thích[1]. Shannon đã chứng minh được rằng hàm H duy nhất tuân theo 3 nguyên tắc trên của ông là:

$$H\,(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \ldots 0\; p_n \log p_n$$

hoặc là một hằng số nhân với biểu thức đó. Điều này về cơ bản chỉ làm thay đổi đơn vị của thông tin mà thôi, giống như thay đổi từ dặm sang kilomet vậy.

Có lý do chính đáng để lấy hằng số nói trên bằng 1, và chúng ta sẽ minh họa điều đó bằng một trường hợp đơn giản.

Hãy nghĩ về 4 xâu nhị phân 00, 01, 10, 11 như là những ký hiệu thực sự. Nếu 0 và 1 có xác suất như nhau, thì 4 xâu trên cũng có xác suất như nhau, mà cụ thể là bằng 1/4. Do đó, lượng thông tin được chuyển tải bởi một lựa chọn một xâu như vậy bằng

$$H\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = -\log\frac{1}{4} = 2$$

Tức là 2 bit. Đây là con số có ý nghĩa đối với thông tin chứa trong một xâu nhị phân có chiều dài là 2 khi việc chọn 0 và 1 có cùng xác suất. Tương tự như vậy, nếu các ký tự là tất cả các xâu nhị phân có chiều dài n và chúng ta đặt hằng số bằng 1, thì lượng thông tin sẽ là n bit. Chú ý rằng khi $n = 2$, chúng ta nhận được công thức có đồ thị cho trên hình 56. Chứng minh định lý của Shannon quá phức tạp nên không thể trình bày ở đây, nhưng nó chứng tỏ rằng nếu bạn chấp nhận ba điều kiện của Shannon thì có một cách tự nhiên duy nhất để định lượng hóa thông tin[2]. Bản thân phương trình ở đây đã là một định nghĩa: điểm quan trọng là nó thực hiện như thế nào trong thực tế.

Shannon đã dùng phương trình của ông để chứng minh rằng có một giới hạn cơ bản đối với lượng thông tin mà một kênh truyền thông có thể chuyển tải. Giả sử bạn truyền một tín hiệu số dọc theo một đường dây điện thoại mà khả năng mang thông điệp của nó tối đa là C bit một giây. Khả năng đó được xác định bởi số chữ số nhị phân mà đường dây đó có thể truyền được, và nó không có liên hệ gì với xác suất của các ký hiệu khác nhau. Giả sử rằng thông điệp được sinh ra từ các ký hiệu có lượng thông tin H, cũng được đo bằng bit/giây. Định lý của Shannon trả lời câu hỏi: nếu kênh bị nhiễu,

thì tín hiệu có thể được mã hóa sao cho tỉ lệ sai lỗi nhỏ như ta mong muốn hay không? Câu trả lời là: luôn luôn có thể, bất kể mức nhiễu như thế nào, nếu H nhỏ hơn hoặc bằng C. Thực tế, tỉ lệ sai lỗi không thể giảm xuống dưới hiệu $H - C$ bất kể là dùng mã nào, nhưng tồn tại các mã đạt tới gần điều bạn muốn đối với tỉ lệ sai lỗi đó.

Chứng minh của Shannon đã khẳng định sự tồn tại của các mã đáp ứng yêu cầu đối với cả hai trường hợp của ông, nhưng chứng minh ấy không cho biết những mã đó là gì. Toàn bộ ngành khoa học thông tin, một hỗn hợp của toán học, tính toán và kỹ thuật điện tử, lao vào tìm kiếm những mã hiệu quả cho những mục đích cụ thể. Nó được gọi là lý thuyết mã. Những phương pháp để tìm kiếm các mã đó rất khác nhau, phải viện đến nhiều lĩnh vực của toán học. Các phương pháp này được hợp nhất trong các dụng cụ của chúng ta, như một cái smartphone hay máy phát trên con tàu *Voyager 1*. Mọi người đều mang những đại lượng của đại số trừu tượng cực kỳ tinh xảo trong túi của mình, dưới dạng một phần mềm thực hiện các mã sửa sai dùng cho điện thoại di động.

Tôi sẽ cố gắng đem lại cho bạn một chút hương vị của lý thuyết mã mà không đi vào những chi tiết quá phức tạp của nó. Một trong những khái niệm có ảnh hưởng nhất của lý thuyết này có liên quan tới các mã đối với hình học nhiều chiều. Khái niệm này đã được Richard Hamming công bố vào năm 1950 trong một bài báo nổi tiếng nhan đề "Mã phát hiện sai và sửa sai". Dưới dạng đơn giản nhất, nó cung cấp một sự so sánh giữa các xâu gồm những chữ số nhị phân. Hãy xét hai xâu như vậy, chẳng hạn 10011101 và 10110101. So sánh các bit tương ứng và đếm xem chúng khác nhau bao nhiêu lần, tựa như:

10**0**1**1**101
10**1**1**0**101

trong đó chúng ta đã đánh dấu những chỗ khác nhau bằng cách cho in đậm. Có hai vị trí mà ở đó các xâu bit khác nhau. Chúng ta gọi con số đó là khoảng cách Hamming giữa hai xâu. Nó có thể được coi như số lỗi 1-bit nhỏ nhất có thể biến xâu này thành xâu kia. Như vậy nó liên hệ rất mật thiết với kết quả nhiều khả năng mắc lỗi nếu những sai lỗi này xảy ra với tỉ lệ trung bình đã biết. Điều đó gợi ý rằng nó có thể cung cấp một hiểu biết sâu sắc về cách phát hiện những lỗi như vậy và thậm chí có thể cả cách sửa ngay các lỗi đó.

Hình học nhiều chiều nhập cuộc bởi vì các xâu có chiều dài cố định có thể gắn với các đỉnh của một "hình siêu lập phương" nhiều chiều. Riemann đã dạy chúng ta cách hình dung các không gian như thế bằng cách nghĩ về chúng như một danh sách các con số. Ví dụ, không gian 4 chiều gồm tất cả các danh sách khả dĩ của 4 số: (x_1, x_2, x_3, x_4). Mỗi một danh sách như vậy được coi là một điểm trong không gian đó, và mọi danh sách khả dĩ, về nguyên tắc, đều có thể xuất hiện.

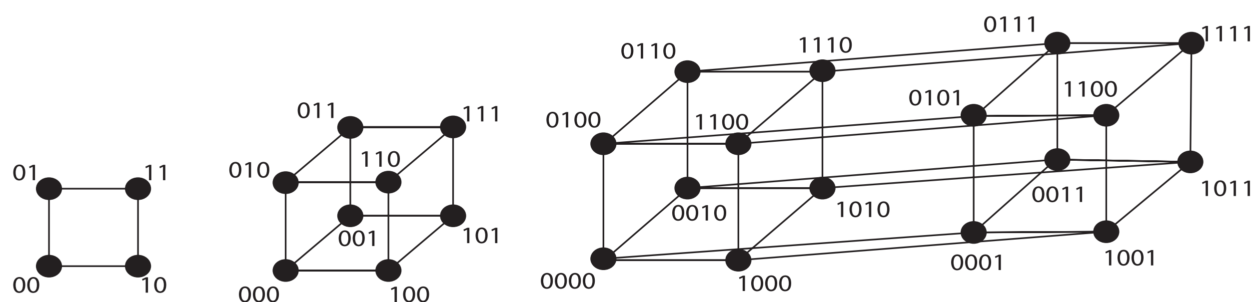
Các x riêng rẽ trong danh sách được gọi là tọa độ của điểm tương ứng. Nếu không gian có 157 chiều thì bạn cần dùng danh sách gồm 157 số: $(x_1, x_2, ..., x_{157})$. Các số này có lợi để xác định xem hai danh sách như thế cách nhau bao xa. Trong hình học Euclid "phẳng", khoảng cách đó được cho bằng cách tổng quát hóa định lý Pythagor. Giả sử ta có điểm thứ hai $(y_1, y_2, ..., y_{157})$ trong không gian 157 chiều. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm này là căn bậc hai của tổng các bình phương các hiệu tọa độ tương ứng. Tức là

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_{157} - y_{157})^2}$$

Nếu không gian là cong thì sẽ phải dùng tới ý tưởng về metric của Riemann.

Ý tưởng của Hamming là làm một cái gì đó tương tự, nhưng giá trị của các tọa độ chỉ giới hạn là 0 và 1. Khi đó $(x_1 - y_1)^2$ sẽ bằng 0 nếu x_1 và y_1 giống nhau, và bằng 1 nếu khác nhau. Đối với $(x_2 - y_2)^2$ cũng như thế, và v.v. Ông cũng bỏ đi căn bậc hai, điều này làm cho đáp số thay đổi, nhưng bù lại kết quả nhận được sẽ luôn là các số nguyên, bằng khoảng cách Hamming. Khái niệm này có mọi tính chất làm cho "khoảng cách" trở nên có nghĩa, chẳng hạn như nó bằng 0 chỉ khi hai xâu đồng nhất với nhau và đảm bảo rằng chiều dài của một cạnh "tam giác" (tập hợp gồm ba xâu) luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng tổng của hai cạnh kia.

Chúng ta có thể vẽ hình của tất cả các xâu bit có chiều dài là 2, 3, 4 (và mất nhiều sức hơn nhưng kém rõ ràng hơn với chiều dài là 5, 6 và có thể thậm chí 10, mặc dù không ai thấy hữu ích cả). Các giản đồ được cho trên hình 57.



Hình 57 Không gian của tất cả các xâu bit có chiều dài 2, 3 và 4.

Hai hình đầu tiên dễ dàng nhận ra là hình vuông và hình lập phương (được chiếu lên một mặt phẳng vì nó cần phải in lên một tờ giấy). Hình thứ ba là một hình siêu lập phương, một tương tự 4 chiều của hình lập phương, và lại một lần

nữa nó được chiếu lên một mặt phẳng. Đường thẳng nối hai chấm đen có chiều dài Hamming bằng 1 – hai xâu ở hai đầu khác nhau đúng ở một vị trí, tức một tọa độ. Khoảng cách Hamming giữa hai xâu bất kỳ là số các đường thẳng như thế theo đường ngắn nhất nối hai xâu đó.

Giả sử chúng ta xét các xâu 3-bit ở góc của một hình lập phương. Lấy một xâu, chẳng hạn là 101. Cũng giả sử rằng tỉ lệ lỗi nhiều nhất là 1bit trong mỗi 3 bit. Khi đó xâu này có thể được truyền mà không thay đổi hoặc nó có thể kết thúc như một trong các xâu sau: 001, 111 hoặc 100. Các xâu này khác xâu gốc chỉ tại một vị trí, vì vậy khoảng cách Hamming của chúng đến xâu gốc bằng 1. Trong hình ảnh hình học không thật chặt chẽ thì các xâu lỗi nằm trên một "mặt cầu" có tâm ở xâu đúng, với bán kính bằng 1. Mặt cầu này chỉ gồm ba điểm, còn nếu chúng ta làm việc trong không gian 157 chiều với bán kính ví dụ bằng 5, thì nó trông chẳng có gì là giống với mặt cầu nữa. Nhưng nó vẫn đóng vai trò như một mặt cầu thông thường: nó có dạng khá *compac* và chứa chính xác các điểm mà khoảng cách từ chúng đến tâm nhỏ hơn hoặc bằng bán kính.

Giả sử chúng ta dùng các mặt cầu này để dựng một mã, sao cho mỗi mặt cầu tương ứng với một ký hiệu mới, và ký hiệu này được mã hóa bằng các tọa độ của tâm mặt cầu. Lại giả sử thêm rằng những mặt cầu này không xen phủ nhau. Ví dụ, ta có thể đưa vào một ký hiệu *a* đối với mặt cầu có tâm là 101. Mặt cầu này chứa 4 xâu 101, 001, 111 và 100. Nếu ta nhận được một xâu nào trong 4 xâu đó, thì ta biết rằng ký hiệu gốc là *a*. Ít nhất đó là đúng với điều kiện các ký hiệu khác của tôi tương ứng một cách tương tự với các mặt cầu không có điểm chung nào với mặt cầu ở trên.

Bây giờ hình học phát huy tác dụng của nó. Trong một hình lập phương, có 8 điểm (xâu) và mỗi mặt cầu chứa 4 điểm trong số đó. Nếu tôi cố gắng đặt khít các mặt cầu vào trong hình lập phương này, sao cho chúng không phủ nhau, thì may lắm tôi đặt được hai, vì 8/4 = 2. Tôi thực sự tìm được mặt cầu thứ hai có tâm là 010. Mặt cầu này chứa 4 điểm 010, 110, 000, 011, trong đó không có điểm nào nằm trong hình cầu thứ nhất. Vì vậy tôi có thể đưa vào ký hiệu thứ hai *b* gắn với mặt cầu này. Mã sửa sai của tôi đối với thông điệp viết bằng hai ký hiệu *a* và *b* bây giờ được thay mỗi ký hiệu *a* bằng 101 và mỗi ký hiệu *b* bằng 010. Ví dụ, nếu tôi nhận được thông điệp

101-010-100-101-000

thì tôi có thể giải mã tìm lại được thông điệp gốc như sau:

a-b-a-a-b

mặc dù có sai lỗi ở xâu thứ ba và thứ năm. Tôi sẽ chỉ thấy xâu lỗi thuộc mặt cầu nào trong hai mặt cầu của tôi.

Mọi chuyện đều tuyệt vời, nhưng mã này nhân độ dài của thông điệp lên ba lần, và chúng ta đã biết một cách dễ dàng hơn để đạt được chính kết quả đó: lặp lại thông điệp ba lần. Nhưng chính ý tưởng đó lại có tầm quan trọng mới khi chúng ta làm việc trong những không gian nhiều chiều hơn. Với các xâu có chiều dài là 4, tức hình siêu lập phương, có 16 xâu, và mỗi mặt cầu chứa 5 điểm. Như vậy, rất có thể đặt trọn được ba mặt cầu vào trong mà chúng không phủ nhau. Thực tế là không thể, hai mặt cầu thì được rồi, nhưng phần không gian còn trống lại không phù hợp để đặt thêm một mặt cầu vào. Tuy vậy, các số ngày càng tăng có lợi cho chúng ta. Không gian các xâu có chiều dài 5 chứa tất cả 32 xâu, mỗi mặt cầu

chỉ dùng 6 trong các xâu đó – có thể có chỗ cho 5 mặt cầu, nếu không thì cũng là 4. Chiều dài 6 cho chúng ta 64 điểm, và các mặt cầu dùng 7, như thế có thể đặt vào tới 9 mặt cầu.

Từ điểm này cần rất nhiều chi tiết vụ vặt để tìm ra những cái có thể xảy ra. Điều này giúp ta phát triển những phương pháp tinh xảo hơn. Nhưng cái mà chúng ta xem xét là sự tương tự, trong không gian các xâu, của cách hiệu quả nhất để xếp chặt các mặt cầu với nhau. Thật may mắn, đây là một lĩnh vực toán học đã tồn tại từ lâu và đã được biết đến khá nhiều. Một số kỹ thuật ở đó có thể chuyển từ hình học Euclid sang các khoảng cách Hamming, và khi điều đó không ổn, người ta lại phát minh ra các phương pháp mới thích hợp hơn với hình học của các xâu. Ví dụ, Hamming đã phát minh ra một mã mới, hiệu quả hơn bất kỳ mã nào đã được biết vào thời gian đó. Nó mã hóa các xâu 4 bit bằng cách biến nó thành các xâu 7 bit. Được cải tiến thành một mã 8 bit, nó có thể phát hiện bất kỳ lỗi 2 bit nào, nhưng không sửa được.

Mã này được gọi là mã Hamming. Tôi không mô tả nó ở đây, nhưng sẽ tổng kết lại để xem nó có thể là khả dĩ hay không. Có 16 xâu chiều dài 4 và 128 xâu chiều dài 7. Các mặt cầu bán kính 1 trong hình siêu lập phương 7 chiều chứa 8 điểm. Và 128/8 = 16. Như vậy, nếu đủ khéo léo, có thể nén 16 mặt cầu đòi hỏi vào trong một hình siêu lập phương 7 chiều. Chúng cần nằm khít một cách chính xác, vì không còn một khe hở nào. Khi điều đó xảy ra, một sự sắp đặt như vậy tồn tại, và Hamming đã tìm ra nó. Không có sự trợ giúp của hình học nhiều chiều thì khó mà đoán ra sự tồn tại của nó, chứ chưa nói tới chuyện tìm ra nó. Mà nếu có thể thì cũng rất khó. Ngay với sự trợ giúp của hình học đấy, nó cũng không phải là hiển nhiên.

Khái niệm thông tin của Shannon cũng cung cấp những giới hạn về hiệu quả của các mã. Lý thuyết mã hóa sẽ làm một nửa công việc còn lại, đó là tìm các mã hiệu quả nhất có thể. Các công cụ quan trọng ở đây được lấy từ đại số trừu tượng. Đây là lĩnh vực nghiên cứu các cấu trúc toán học chia sẻ những đặc điểm số học căn bản của các số nguyên hoặc các số thực, nhưng khác với chúng một cách đáng kể. Trong số học, chúng ta có thể cộng, trừ và nhân các số và kết quả nhận được là các số cùng loại. Đối với các số thực, chúng ta còn có thể chia chúng cho một số bất kỳ khác 0 và sẽ nhận được một số thực. Điều này nói chung là không thể đối với các số nguyên, bởi vì, chẳng hạn 1/2 không phải là số nguyên. Tuy nhiên, điều này là có thể nếu chúng ta chuyển sang một hệ thống lớn hơn của các số hữu tỉ, tức là các phân số. Trong các hệ thống số quen thuộc, các luật khác nhau của đại số được nghiệm đúng, ví dụ như luật giao hoán của phép cộng, nói rằng 2 + 3 = 3 + 2 và điều này là đúng đối với hai số bất kỳ.

Các hệ quen thuộc chia sẻ những tính chất đại số này với các hệ ít quen thuộc hơn. Ví dụ đơn giản nhất là dùng chỉ hai số 0 và 1. Tổng và tích của hai số này được định nghĩa như đối với các số nguyên, với một ngoại lệ: chúng ta khẳng định 1 + 1 = 0, chứ không phải bằng 2. Mặc dù có sự sửa đổi đó, nhưng tất cả các luật thông thường của đại số đều vẫn đúng. Hệ này chỉ có hai "phần tử", hai đối tượng giống như số. Có chính xác một hệ như vậy bất cứ khi nào số các phần tử là lũy thừa của một số nguyên tố bất kỳ: 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 13, 16, v.v. Những hệ như vậy được gọi là các trường Galois theo tên nhà toán học danh tiếng người Pháp Évariste Galois, người đã phân loại chúng vào khoảng năm 1830. Vì chúng có số phần

tử hữu hạn nên rất thích hợp với truyền thông số, và các lũy thừa của 2 đặc biệt thuận tiện vì ký hiệu nhị phân.

Các trường Galois dẫn tới các hệ mã hóa gọi là *các mã Reed-Solomon* theo tên của Irving Reed và Gustave Solomon, những người đã phát minh ra chúng vào năm 1960. Chúng được dùng trong các dụng cụ điện tử tiêu dùng, đặc biệt là các đĩa CD và DVD. Chúng cũng là mã sửa sai dựa trên các tính chất đại số của các đa thức mà các hệ số của các đa thức đó được lấy từ các trường Galois. Tín hiệu được mã hóa – cả audio và video – được dùng để dựng nên một đa thức. Nếu đa thức đó có bậc là n, tức là lũy thừa cao nhất có mặt là x^n thì đa thức đó có thể được tái dựng từ các giá trị của nó ở n điểm bất kỳ. Nếu chúng ta chỉ định giá trị ở hơn n điểm thì chúng ta có thể mất hoặc làm thay đổi một số giá trị mà không hề mất dấu vết của đa thức ban đầu. Nếu số các lỗi không quá lớn, vẫn có thể tìm lại đa thức ban đầu và giải mã để nhận lại dữ liệu gốc.

Thực tế, tín hiệu được biểu diễn như một chuỗi các khối số nhị phân. Một sự lựa chọn phổ biến là dùng 255 byte (tức các xâu 8 bit) một khối. Trong số đó, 223 byte mã hóa tín hiệu, trong khi 32 byte còn lại là “các ký hiệu về tính chẵn lẻ”, nó cho chúng ta biết rằng số các tổ hợp khác nhau của các chữ số trong dữ liệu chưa bị hư hỏng là lẻ hay chẵn. Mã Reed-Solomon này có thể sửa được tới 16 lỗi trong một khối, tức là tỉ lệ lỗi chỉ nhỏ hơn 1%.

Bất cứ khi nào bạn lái xe trên một con được gập ghềnh và nghe đĩa CD, tức là bạn đã dùng đại số trừu tượng dưới dạng một mã Reed-Solomon để đảm bảo rằng âm nhạc phát ra vẫn du dương, thay vì bị giật cục và đứt đoạn, và cũng có khi bị mất luôn cả một đoạn.

Lý thuyết thông tin được sử dụng rộng rãi trong mật mã và phân tích mã – các mã bí mật và các phương pháp để phá chúng. Bản thân Shannon đã sử dụng nó để đánh giá lượng thông điệp được mã hóa cần phải chặn để có cơ hội phá được mã. Giữ thông tin bí mật hóa ra còn khó khăn hơn là ta tưởng, và lý thuyết thông tin sẽ làm sáng tỏ vấn đề đó, cả trên quan điểm của người muốn giữ bí mật lẫn của người muốn tìm ra bí mật đó. Vấn đề này không chỉ quan trọng đối với quân sự mà còn đối với tất cả những ai dùng internet để mua sắm hàng hóa hoặc giao dịch với ngân hàng qua điện thoại.

Lý thuyết thông tin hiện nay cũng đóng vai trò quan trọng trong sinh học, đặc biệt là trong phân tích dữ liệu về trình tự ADN. Phân tử ADN là một chuỗi xoắn kép tạo bởi hai mạch xoắn quanh nhau. Mỗi mạch là một trình tự các bazơ (base), các phân tử đặc biệt gồm 4 loại: adenine, guanine, thymine và cytosine. Như vậy, ADN giống như một thông điệp mã hóa dùng 4 ký hiệu khả dĩ là A, G, T, C. Ví dụ, bộ gen của con người dài 3 tỉ bazơ. Hiện nay các nhà sinh học đã tìm được trình tự ADN của vô số sinh vật với tốc độ ngày càng nhanh, dẫn tới một kỷ nguyên mới của khoa học máy tính với sự ra đời của *tin sinh học*. Nó tập trung nghiên cứu những phương pháp xử lý các dữ liệu sinh học một cách hiệu quả, và một trong những công cụ cơ bản của nó là lý thuyết thông tin.

Vấn đề khó khăn là chất lượng thông tin chứ không phải số lượng. Các thông điệp “hai cộng hai bằng bốn” và “hai cộng hai bằng năm” chứa chính xác cùng một lượng thông tin, nhưng một cái là đúng còn cái kia là sai. Các bài tụng ca thời đại thông tin đã lờ đi một sự thật khó chịu là nhiều thông tin rầm rộ trên internet lại là các thông tin giả. Có những website

do bọn tội phạm điều hành, những kẻ muốn đánh cắp tiền của bạn, hoặc những kẻ phủ định sạch trơn (denialists) muốn thay thế khoa học vững chắc bằng bất cứ thứ gì chợt xuất hiện trong đầu họ.

Khái niệm có tầm quan trong sống còn ở đây không phải là những thông tin như thế mà là ý nghĩa. Ba tỉ các bazơ trong ADN của bộ gen con người thực ra sẽ là vô nghĩa nếu chúng ta không tìm ra chúng có tác động như thế nào tới cơ thể và hành vi của chúng ta. Trong dịp kỷ niệm lần thứ 10 ngày hoàn thành dự án về bộ gen con người, một số tạp chí khoa học hàng đầu đã tiến hành điều tra những tiến bộ y học đạt được cho tới lúc đó từ sự liệt kê các bazơ của ADN con người. Giọng điệu chung là câm lặng: chỉ có một ít điều trị mới cho các bệnh đã được phát hiện cho tới lúc đó, nhưng không phải số lượng đã dự báo ban đầu. Việc trích xuất ý nghĩa từ thông tin về ADN tỏ ra khó khăn hơn những gì các nhà sinh học đã kỳ vọng. Dự án bộ gen con người là bước đi ban đầu cần thiết, nhưng nó mới chỉ cho thấy các vấn đề đó khó khăn như thế nào chứ không cho biết phải giải chúng ra sao.

Khái niệm thông tin đã thoát ra khỏi kỹ thuật điện tử và tràn sang nhiều lĩnh vực khác của khoa học, cả như một ẩn dụ và như một khái niệm kỹ thuật. Công thức tính thông tin rất giống công thức của entropy trong cách tiếp cận nhiệt động lực học của Boltzmann: những khác biệt chủ yếu là logarit cơ số 2 thay cho logarit tự nhiên và một thay đổi về dấu. Sự tương tự ở đây có thể được hình thức hóa và entropy có thể được giải thích là "sự mất thông tin". Như vậy, entropy của một chất khí tăng vì chúng ta mất dấu vết về vị trí chính xác của các phân tử cũng như vận tốc của chúng. Mối liên hệ

giữa entropy và thông tin cần phải xác lập một cách rất cẩn trọng: mặc dù các công thức là giống nhau, nhưng bối cảnh áp dụng chúng lại khác nhau. Entropy nhiệt động lực học là một tính chất ở các thang lớn của trạng thái một chất khí, nhưng thông tin là một tính chất của *nguồn* tạo dữ liệu, chứ không phải của một tín hiệu. Năm 1957, nhà vật lý Mỹ Edwin Jaynes, một chuyên gia về cơ học thống kê đã thiết lập được mối quan hệ: entropy nhiệt động lực học có thể được coi như một *ánh xạ* của thông tin Shannon, chứ bản thân entropy không thể đồng nhất với việc mất thông tin mà không chỉ ra bối cảnh cụ thể. Nếu lưu ý tới sự khác biệt đó thì có những bối cảnh hợp thức, trong đó entropy có thể được coi như một sự mất thông tin. Cũng như sự tăng entropy đặt ra những ràng buộc đối với hiệu suất của các máy hơi nước, sự giải thích dựa trên entropy đối với thông tin cũng đặt ra những ràng buộc đối với hiệu suất của tính toán. Ví dụ, cần phải tốn ít nhất $5,8\times10^{-23}$J năng lượng để lật một bit từ 0 sang 1 hoặc ngược lại ở nhiệt độ helium lỏng, bất kể bạn sử dụng phương pháp gì.

Nhiều vấn đề được đặt ra khi các từ "entropy" và "thông tin" được sử dụng theo nghĩa ẩn dụ hơn. Các nhà sinh học thường nói rằng ADN xác định "cái thông tin" được đòi hỏi để tạo ra một cơ thể. Điều này sẽ trở nên có ý nghĩa khi xóa chữ "cái" đi. Tuy nhiên, cách giải thích ẩn dụ của thông tin gợi ý rằng một khi bạn đã biết về ADN thì bạn sẽ biết mọi thứ có thể biết về cơ thể. Suy cho cùng, bạn đã nhận được *cái* thông tin đó, phải vậy không? Và trong một thời gian, các nhà sinh học đã nghĩ rằng phát biểu đó rất gần với chân lý. Tuy nhiên, hiện nay chúng ta biết rằng điều đó quá lạc quan.

Thậm chí nếu thông tin ấy trong ADN đã thực sự chỉ định cơ thể ấy một cách duy nhất thì bạn còn cần phải tìm ra cơ thể ấy tăng trưởng như thế nào và ADN thực sự đã làm gì. Hơn nữa, phải có nhiều thứ hơn là một danh sách các mã ADN để tạo ra một cơ thể: những cái gọi là các nhân tố biểu sinh cần phải được tính đến. Những nhân tố đó bao gồm các “chuyển mạch” hóa học làm cho một đoạn mã ADN hoạt động hay không hoạt động, cũng như các nhân tố hoàn toàn khác được truyền từ bố mẹ sang con cái. Đối với loài người, những nhân tố này bao gồm cả văn hóa mà trong đó chúng ta lớn lên. Như vậy, việc phải trả giá khi dùng các từ kỹ thuật như từ “thông tin” là điều có thể dự đoán.

16 Sự mất cân bằng của tự nhiên
Lý thuyết hỗn độn

kích cỡ quần thể | của thế hệ kế tiếp | tốc độ tăng trưởng

$$x_{t+1} = kx_t(1-x_t)$$

kích cỡ quần thể | hiện tại

Phương trình này cho ta biết điều gì?
Nó lập mô hình cách mà một quần thể sinh vật thay đổi từ thế hệ này sang thế hệ tiếp sau, khi có những giới hạn đối với các nguồn khả dụng.

Tại sao nó lại quan trọng?
Đó là một trong những phương trình đơn giản nhất có thể sinh ra hỗn độn tất định – một hành vi bên ngoài có vẻ là ngẫu nhiên nhưng không có nguyên nhân ngẫu nhiên nào.

Nó đã dẫn tới những gì?
Nhận thức rằng các phương trình phi tuyến đơn giản có thể tạo ra một động lực học rất phức tạp và tính ngẫu nhiên biểu kiến có thể đã che đậy một trật tự ẩn giấu. Được biết một cách rộng rãi là lý thuyết hỗn độn, khám phá này có vô số ứng dụng trong hầu hết các lĩnh vực khoa học kể cả chuyển động của các hành tinh trong Hệ Mặt Trời, dự báo thời tiết, động lực học quần thể trong sinh thái học, các ngôi sao biến quang, mô hình động đất, và các quỹ đạo hiệu quả đối với các con tàu thăm dò không gian.

Ẩn dụ về sự cân bằng của tự nhiên có thể dễ dàng mô tả như là trạng thái của vũ trụ nếu con người tàn nhẫn không can thiệp vào. Tự nhiên, nếu để mặc các bộ máy của nó tự vận hành, sẽ an bài về một trạng thái hài hòa tuyệt đối. Những rạn san hô sẽ mãi mãi là nơi ẩn náu của những loài cá rực rỡ sắc màu với số lượng không thay đổi; thỏ và cáo sẽ học cách chia nhau những cánh đồng và các khu rừng để cho cáo được no nê và thỏ cũng sẽ được sống sót, và sẽ không có một quần thể nào bùng phát hay tắt lụi. Thế giới sẽ dừng lại ở một trạng thái tĩnh tại và an bài ở đó. Cho đến khi một thiên thạch lớn hay một siêu núi lửa làm đảo lộn sự cân bằng.

Đây là một ẩn dụ phổ biến, và nguy hiểm là ở chỗ nó rất gần với một lời sáo rỗng. Nó cũng dễ dẫn tới những hiểu lầm. Sự cân bằng của tự nhiên thực ra không vững chắc.

Trước kia chúng ta đã từng nhắc tới điều này. Khi Poincaré gửi công trình tham gia cuộc thi giành giải thưởng của vua Oscar (Thụy Điển), lương tri chúng ta đã biết rằng một Hệ Mặt Trời ổn định là hệ trong đó mỗi hành tinh vĩnh viễn đi theo cùng một quỹ đạo dù vẫn có những nhiễu động nhỏ vô hại. Về mặt kỹ thuật, đó không phải là một trạng thái dừng, mà là một trạng thái trong đó mỗi hành tinh lặp đi lặp lại những chuyển động tương tự và chịu những nhiễu động nhỏ do tất cả các hành tinh khác gây ra, nhưng không lệch quá lớn với những cái mà hành tinh đó sẽ làm nếu không có nhiễu động. Động lực học ở đây là "tựa tuần hoàn" – nó là tổ

hợp của một số chuyển động tuần hoàn tách biệt có chu kỳ không phải cùng là bội số của cùng một khoảng thời gian. Trong lãnh địa của các hành tinh, đó là trạng thái "gần với dừng" nhất mà con người có thể hy vọng.

Nhưng Poincaré, với cái giá đắt phải trả, đã phát hiện ra một cách muộn màng rằng động lực học thực ra không hẳn như vậy. Trong những hoàn cảnh nhất định nó có thể là hỗn độn. Mặc dù các phương trình không chứa tường minh một số hạng ngẫu nhiên nào, sao cho về nguyên tắc, trạng thái hiện tại hoàn toàn xác định trạng thái tương lai, nhưng một điều nghịch lý là sự xuất hiện của chuyển động thực sự lại có tính ngẫu nhiên. Thực tế, nếu bạn đặt các câu hỏi thô kiểu như "Nó sẽ ở phía nào của Mặt Trời?", thì câu trả lời có thể sẽ là một chuỗi ngẫu nhiên các quan sát. Chỉ khi bạn có thể quan sát thật tỉ mỉ thì bạn mới có thể thấy rằng chuyển động thực ra là hoàn toàn xác định.

Đó mới chỉ là sự gợi ý đầu tiên về cái mà chúng ta gọi là hỗn độn, cách viết gọn của thuật ngữ "hỗn độn tất định", và nó hoàn toàn khác với ngẫu nhiên – mặc dù bề ngoài chúng có vẻ giống nhau. Động lực học hỗn độn có những hình mẫu ẩn giấu, nhưng chúng rất tinh tế và rất khác với suy nghĩ tự nhiên của chúng ta về đo lường. Chỉ bằng cách tìm hiểu các nguyên nhân gây ra hỗn độn, chúng ta mới có thể rút ra các hình mẫu đó từ đống lộn xộn các dữ liệu.

Như thường thấy trong khoa học, có một số điềm báo đơn độc thường được nhìn nhận như những thứ lạ lẫm nhỏ mọn không đáng để ý tới một cách nghiêm túc. Chỉ vào những năm 1960, các nhà toán học, các nhà vật lý và kỹ sư mới bắt đầu nhận thấy hỗn độn thể hiện tự nhiên như thế nào trong

động lực học và nó khác với những thứ được xem xét trong khoa học cổ điển triệt để đến mức nào. Chúng ta vẫn còn đang phải học hỏi để đánh giá hết những cái mà hỗn độn nói với chúng ta và những cái chúng ta cần phải làm với nó. Nhưng động lực học hỗn độn, hay theo cách nói đại chúng là "lý thuyết hỗn độn", đã tràn ngập phần lớn các lĩnh vực của khoa học. Thậm chí nó có thể nói với chúng ta nhiều điều về kinh tế và các khoa học xã hội. Tất nhiên, nó không phải là câu trả lời cho tất cả: chỉ có các nhà phê bình mới tuyên bố như vậy và họ làm thế để dễ dàng hạ gục nó hơn. Nhưng hỗn độn đã vượt qua được mọi cuộc công kích và vì một lý do chính đáng: nó là tuyệt đối cơ bản đối với mọi hành vi được chi phối bởi các phương trình vi phân, mà những phương trình này lại là cốt lõi của các định luật vật lý.

Cũng có cả hỗn độn trong sinh học. Một trong những người đầu tiên ý thức được điều đó là nhà sinh thái học người Úc Robert May, hiện nay là Huân tước May của Oxford và là nguyên chủ tịch của Hội Hoàng gia. Ông đã tìm hiểu những quần thể của các loài khác nhau thay đổi như thế nào theo thời gian trong các hệ tự nhiên như các khối đá san hô hay các cánh rừng. Năm 1975, May đã viết một bài báo ngắn đăng trên *Nature* – một tạp chí khoa học danh giá – trong đó ông đã chỉ ra rằng những phương trình thường được dùng để lập mô hình các thay đổi đối với những quần thể động vật và thực vật có thể tạo ra hỗn độn. May không tuyên bố rằng các mô hình mà ông thảo luận là những biểu diễn chính xác những cái đã diễn ra với các quần thể thực. Ý tưởng của ông mang tính tổng quát hơn: hỗn độn là điều tự nhiên trong các mô hình kiểu này, và đó là điều cần phải ghi nhớ trong đầu.

Hệ quả quan trọng nhất của hỗn độn là một hành vi bất thường không cần phải có các nguyên nhân khác thường. Trước đó, nếu các nhà sinh thái học nhận thấy một số quần thể động vật thăng giáng rất mạnh thì họ lại đi tìm những nguyên nhân bên ngoài cũng được cho là thăng giáng rất mạnh và nói chung được gán cho cái nhãn "ngẫu nhiên". Chẳng hạn như thời tiết hay sự xuất hiện bất ngờ của động vật ăn thịt từ đâu đó tới. Các ví dụ của May đã chứng tỏ rằng những hoạt động nội tại của quần thể động vật có thể làm phát sinh tính bất thường mà không có sự trợ giúp từ bên ngoài.

Ví dụ chính của ông là phương trình trang trí cho phần mở đầu của chương này. Nó được gọi là phương trình *logistic* và là mô hình đơn giản của quần thể động vật trong đó kích cỡ của mỗi thế hệ được xác định bởi thế hệ trước nó. Nó là "gián đoạn" theo nghĩa dòng thời gian được tính theo các thế hệ. Như vậy, mô hình này cũng tương tự với một phương trình vi phân trong đó thời gian là một biến liên tục, nhưng về mặt khái niệm và tính toán thì đơn giản hơn. Kích cỡ của quần thể được đo như tỉ phần của một giá trị lớn tổng cộng nào đó và do đó có thể được biểu diễn bằng một con số nằm giữa 0 (tuyệt chủng) và 1 (số tối đa về lý thuyết mà hệ có thể duy trì). Giả sử thời gian t điểm theo các bước nguyên tương ứng với các thế hệ, con số nói trên được ký hiệu là x_t ở thế hệ t. Khi đó, phương trình *logistic* có dạng:

$$x_{t+1} = kx_t\,(1 - x_t)$$

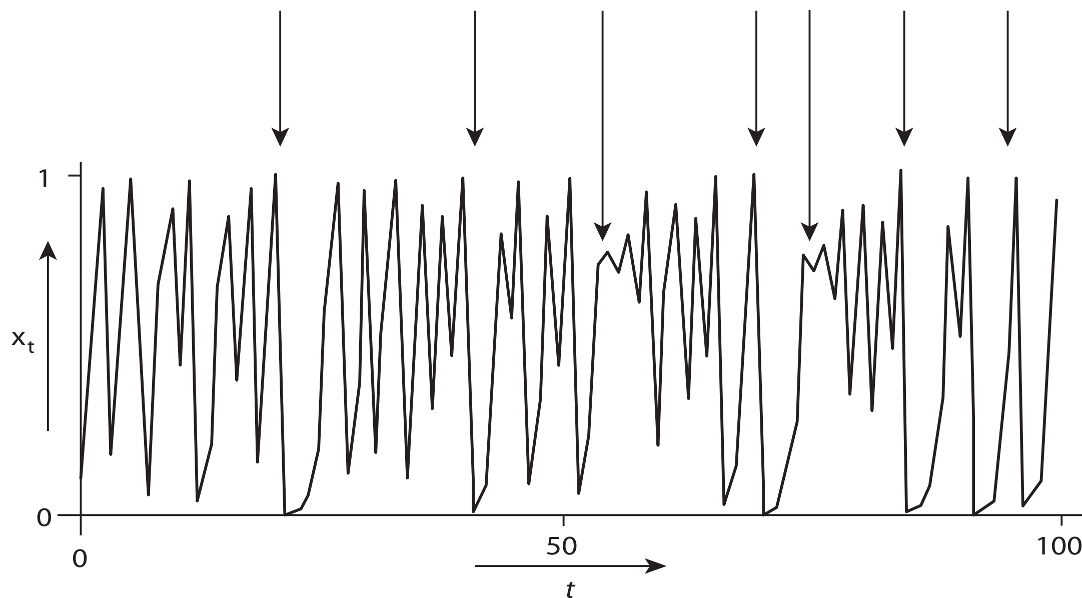
trong đó k là một hằng số. Chúng ta có thể giải thích k như là tốc độ tăng trưởng của quần thể khi mà việc giảm các nguồn không làm chậm nó lại[1].

Chúng ta sẽ bắt đầu mô hình từ thời điểm 0 với kích cỡ của quần thể là x_0. Sau đó ta dùng phương trình với $t = 0$ để tính x_1, rồi sau đó dùng phương trình với $t = 1$ để tính x_2 và cứ tiếp tục như vậy. Không cần tổng kết lại ta cũng có thể thấy ngay rằng, đối với tốc độ tăng trưởng k cố định, kích cỡ quần thể ở một thế hệ xác định hoàn toàn kích cỡ của tất cả các thế hệ tiếp sau. Như vậy, mô hình đúng là *tất định*: tri thức về hiện tại xác định tương lai một cách duy nhất và chính xác.

Vậy tương lai là gì? Ẩn dụ về sự cân bằng của tự nhiên gợi ý rằng quần thể sẽ dịch chuyển về một trạng thái dừng và an bài tại đó. Chúng ta thậm chí có thể tính được trạng thái dừng đó: chỉ cần đặt quần thể tại thời điểm $t + 1$ bằng quần thể tại thời điểm t. Điều này sẽ dẫn tới hai trạng thái dừng: các quần thể 0 và $1-1/k$. Một quần thể có kích cỡ 0 là tuyệt chủng, vậy giá trị thứ hai dùng cho quần thể đang tồn tại. Thật không may, mặc dù đó là một trạng thái dừng, nhưng lại là không bền. Nếu quả như vậy thì chúng ta sẽ không bao giờ nhìn thấy nó: điều này chẳng khác gì cố gắng đặt một chiếc bút chì trên đầu vót nhọn của nó để nó cân bằng theo phương thẳng đứng. Chỉ cần một nhiễu động nhỏ nhất cũng làm cho chiếc bút đổ. Những tính toán chứng tỏ rằng trạng thái dừng không bền khi k lớn hơn 3.

Khi đó, chúng ta sẽ thấy gì trong thực tế? Hình 58 cho thấy "chuỗi thời gian" đối với quần thể này khi k bằng 4. Nó không dừng: nó ở khắp nơi. Tuy nhiên, nếu bạn nhìn kỹ hơn sẽ thấy gợi ý rằng động lực học ở đây không hoàn toàn ngẫu nhiên. Bất cứ khi nào kích cỡ của quần thể thực sự lớn thì nó ngay lập tức suy giảm tới một giá trị rất thấp, rồi sau đó lại tăng lên một cách đều đặn (gần đúng theo hàm mũ) đối với hai đến

ba thế hệ tiếp theo: hãy xem những mũi tên ngắn trên hình 58. Và một điều thú vị xảy ra bất cứ khi nào quần thể ở gần giá trị 0,75: nó dao động luân phiên lên trên và xuống dưới giá trị đó, những dao động tăng tạo ra hình dạng ziczac rất đặc trưng, và trở nên rộng hơn hướng tới bên phải: xem các mũi tên dài trên hình.



Hình 58 Các dao động hỗn độn trong một mô hình quần thể động vật. Các mũi tên ngắn chỉ sự suy giảm mạnh tiếp sau một sự tăng trưởng theo hàm mũ trong thời gian ngắn. Các mũi tên dài chỉ các dao động không bền.

Mặc dù những hình mẫu này có một ý nghĩa trong đó hành vi thực sự là có tính ngẫu nhiên, nhưng đó chỉ là khi bạn đã vứt bỏ đi một số chi tiết. Giả sử rằng chúng ta gán ký hiệu N (ngửa) bất cứ khi nào quần thể lớn hơn 0,5, và S (sấp) khi nó nhỏ hơn 0,5. Tập dữ liệu bắt đầu với dãy SNSNSNNSNNSSNN và tiếp tục không tiên đoán được, giống như dãy ngẫu nhiên xuất hiện khi tung đồng xu vậy. Cách làm thô dữ liệu như thế, tức là chỉ lưu ý tới phạm vi của quần thể, được gọi là động lực học tượng trưng. Trong trường hợp đó, có thể chứng

minh rằng đối với hầu hết các giá trị ban đầu x_0 của quần thể, dãy các trạng thái ngửa và sấp về mọi phương diện đều giống với dãy điển hình xuất hiện khi tung một cách ngẫu nhiên một đồng xu hoàn hảo. Chỉ khi quan sát các giá trị chính xác chúng ta mới bắt đầu nhận ra một số hình mẫu.

Đó là một phát hiện rất đáng kể. Một hệ động lực hoàn toàn là tất định, với những hình mẫu nhìn thấy được trong các dữ liệu chi tiết, nhưng một quan sát thô đối với chính dữ liệu đó lại có vẻ là ngẫu nhiên – theo một ý nghĩa chặt chẽ có thể chứng minh được. Quyết định luận và tính ngẫu nhiên không phải là đối lập nhau. Trong một số hoàn cảnh, chúng có thể hoàn toàn tương thích với nhau.

May không phát minh ra phương trình logistic, và ông cũng không phát minh ra các tính chất đáng kinh ngạc của nó. Ông cũng không tuyên bố mình đã làm cái này hoặc cái kia. Mục đích của ông là cảnh báo cho những người làm việc trong các ngành khoa học về sự sống, đặc biệt là các nhà sinh thái học, về các phát minh đáng chú ý xuất hiện trong khoa học vật lý và toán học: những phát minh làm thay đổi một cách cơ bản cách thức mà các nhà khoa học nên suy nghĩ về các số liệu quan sát. Con người chúng ta có thể gặp khó khăn khi giải các phương trình dựa trên những quy tắc đơn giản, nhưng tự nhiên không cần giải các phương trình theo cách của con người. Nó chỉ tuân theo các quy tắc. Vì vậy nó có thể làm những điều khiến chúng ta có ấn tượng là quá phức tạp, chỉ vì những lý do đơn giản.

Hỗn độn đã xuất hiện từ cách tiếp cận topo đối với động lực học, mà đứng đầu là nhà toán học người Mỹ Stephen Smale

và nhà toán học Nga Vladimir Arnold vào những năm 1960. Cả hai người đã cố gắng tìm ra những loại dáng điệu điển hình trong các phương trình vi phân. Smale đã bị thôi thúc bởi những kết quả lạ lùng của Poincaré trong bài toán ba vật (Chương 4), còn Arnold lấy cảm hứng từ những phát minh có liên quan của Andrei Kolmogorov – người thầy hướng dẫn nghiên cứu trước kia của ông. Cả hai đã nhanh chóng nhận ra tại sao hỗn độn lại phổ biến như vậy: nó là hệ quả tự nhiên của hình học các phương trình vi phân, như chúng ta sẽ thấy ngay dưới đây.

Khi sự quan tâm tới hỗn độn lan rộng, người ta đã phát hiện ra nhiều ví dụ ẩn giấu trong nhiều bài báo khoa học trước đó. Vốn chỉ được xem như những hiệu ứng kỳ bí đơn độc, những ví dụ này giờ đây được hòa nhập vào một lý thuyết rộng lớn hơn. Vào những năm 1940, hai nhà toán học Anh là John Littlewood và Mary Cartwright đã nhìn thấy những dấu vết của hỗn độn trong các dao động tử điện từ. Năm 1958, Tsuneji Rikitake thuộc Hiệp hội dự báo động đất Tokyo đã phát hiện ra hành vi hỗn độn trong mô hình dynamo của từ trường Trái Đất. Và vào năm 1963, nhà khí tượng người Mỹ Edward Lorenz đã nắm bắt được động lực học hỗn độn một cách khá chi tiết trong một mô hình đơn giản về sự đối lưu của khí quyển nhằm phục vụ cho dự báo thời tiết. Họ và những nhà tiên phong khác đã vạch được đường đi và giờ đây tất cả những khám phá rời rạc của họ bắt đầu khớp lại với nhau.

Đặc biệt, những hoàn cảnh dẫn tới hỗn độn, chứ không phải thứ gì đó đơn giản hơn, hóa ra lại là hình học chứ không phải đại số. Trong mô hình logistic với $k = 4$, cả hai cực hạn của quần thể (là 0 và 1) dịch chuyển tới 0, trong khi điểm

giữa, 1/2, thì dịch chuyển tới 1. Như vậy, ở mỗi một bước thời gian, khoảng từ 0 đến 1 được kéo dãn tới hai lần chiều dài của nó rồi bị gập đôi, và bị chặn lại tại vị trí ban đầu của nó. Đó là việc người đầu bếp đã làm để nhào bột khi làm bánh mì, và bằng cách nghĩ về sự nhào bột ta có thể luận giải về hỗn độn. Hãy hình dung một hạt nhỏ – hạt nho chẳng hạn – bị lẫn trong bột nhào. Giả sử rằng nó tình cờ ở trong một chu trình tuần hoàn, sao cho sau nhiều lần kéo giãn và gập đôi lại, hạt này lại trở về vị trí ban đầu của nó. Bây giờ ta sẽ xem tại sao điểm này là không bền. Hãy hình dung một hạt nho khác, ban đầu ở rất gần hạt nho thứ nhất. Mỗi lần kéo dãn lại làm cho nó dịch chuyển ra xa hơn. Mặc dù, có lần nó không dịch chuyển đủ xa để ngừng theo vết của hạt thứ nhất. Khi bột nhào bị gập đôi lại, cả hai hạt nho cuối cùng lại ở cùng một lớp. Trong lần nhào tiếp theo, hạt thứ hai dịch chuyển ra xa hạt thứ nhất hơn. Điều này giải thích tại sao trạng thái tuần hoàn là không bền: sự kéo dãn làm cho tất cả các điểm ở gần dịch chuyển ra xa nó, và không tiến tới nó nữa. Cuối cùng, sự cách xa trở nên lớn tới mức hai hạt nho sẽ ở hai lớp khác nhau khi bột nhào bị gập lại. Sau đó, số phận của chúng gần như trở nên độc lập với nhau. Tại sao người đầu bếp lại phải nhào bột? Đó là để trộn lẫn các thành phần (kể cả khí được bẫy ở trong đó). Nếu bạn trộn kỹ, các hạt cá thể sẽ dịch chuyển chẳng theo quy luật nào. Các hạt lúc đầu ở rất gần nhau, cuối cùng lại ở cách xa nhau; các điểm ở xa nhau, khi gập lại, có thể lại ở cạnh nhau. Nói tóm lại, hỗn độn là kết quả tự nhiên của quá trình *trộn*.

Tôi đã nói ở đầu chương này rằng trong bếp nhà bạn không có cái gì là hỗn độn cả, có lẽ chỉ trừ chiếc máy rửa bát. Nhưng tôi đã nói dối. Thực ra, nhiều khả năng là bạn

đã có một vài dụng cụ như vậy như máy xử lý thực phẩm hay máy đánh trứng, chẳng hạn. Lưỡi dao của máy xử lý thực phẩm hoạt động theo một quy tắc rất đơn giản: quay vòng rất nhanh. Thực phẩm tương tác với lưỡi dao: nó cũng làm một việc rất đơn giản, nhưng nó không quay tít mù mà nó được trộn. Khi lưỡi dao cắt qua thực phẩm, một số mẩu đi về một phía, một số khác đi về phía kia của dao: về cục bộ mà nói thì thực phẩm bị đẩy ra xa nhau. Nhưng vì không thoát ra khỏi bình trộn, nên tất cả chúng lại bị cuộn lại lên chính mình.

Smale và Arnold nhận thấy rằng toàn bộ động lực học hỗn độn gần giống vậy. Họ không trình bày kết quả của mình bằng ngôn ngữ hoàn toàn như thế, nhưng bạn hãy nhớ rằng "đẩy ra xa nhau" ứng với thuật ngữ chuyên môn là "số mũ Liapunov dương" và "cuộn lại" là "hệ có miền compac". Nhưng trong ngôn ngữ bình dân thì họ nói rằng hỗn độn giống như trộn bột nhào.

Điều này cũng giải thích được một thứ khác nữa mà Lorenz đã đặc biệt chú ý vào năm 1963. Động lực học hỗn độn rất nhạy với các điều kiện ban đầu. Hai hạt nho ban đầu ở rất gần nhau, cuối cùng chúng bị đẩy ra xa nhau tới mức chuyển động sau đó của chúng trở nên độc lập với nhau. Hiện tượng này thường được gọi là hiệu ứng con bướm: một con bướm vẫy cánh và một tháng sau đó thời tiết trở nên hoàn toàn khác với cái đáng lẽ sẽ diễn ra. Lorenz thường được gán cho là tác giả của cụm từ này. Thực ra, ông không đưa ra nó, nhưng có gì đó tương tự với nhan đề của một trong các bài thuyết trình của ông. Tuy nhiên, một ai khác đã đặt cái nhan đề đó cho ông và bài thuyết trình cũng không phải là bài báo nổi tiếng năm 1963 của ông, mà là một bài khác ít nổi tiếng hơn cũng được công bố trong năm đó.

Cho dù hiện tượng đó được gọi là gì đi nữa, thì nó cũng có một hệ quả thực hành quan trọng. Mặc dù động lực học hỗn độn về nguyên tắc là tất định, nhưng trên thực tế nó nhanh chóng trở nên không thể tiên đoán được, bởi vì một sự bất định trong trạng thái ban đầu sẽ tăng nhanh theo hàm mũ. Có một chân trời đối với sự tiên đoán mà bên ngoài nó tương lai không thể dự báo được. Đối với thời tiết, một hệ quen thuộc mà các mô hình máy tính chuẩn của nó được biết là hỗn độn, thì chân trời này chỉ là một vài ngày. Đối với Hệ Mặt Trời thì đó là mười triệu năm tới. Đối với các đồ chơi ở phòng thí nghiệm, như con lắc kép (một con lắc treo vào đáy một con lắc khác) nó chỉ là một vài giây. Một giả thiết đã được duy trì rất lâu cho rằng "tất định" và "tiên đoán được" đều sai. Điều này chỉ đúng nếu trạng thái hiện thời có thể đo được với độ chính xác tuyệt đối, nhưng điều đó là không thể.

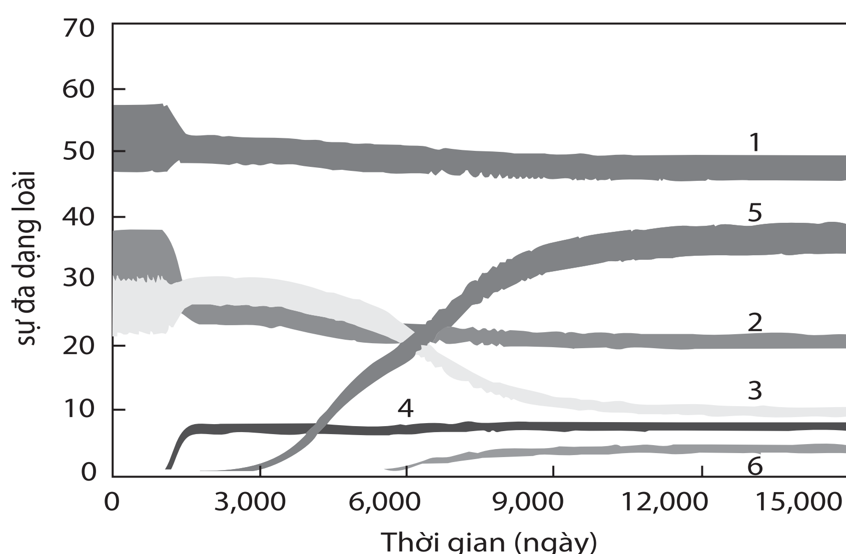
Tính tiên đoán được ngắn hạn của hỗn độn có thể được dùng để phân biệt với tính ngẫu nhiên thuần túy. Nhiều kỹ thuật khác nhau đã được tạo ra để làm việc đó, và cũng để tìm ra động lực học ẩn dưới nó nếu hệ xử sự một cách tất định nhưng hỗn độn.

Hiện nay, hỗn độn có nhiều ứng dụng trong mọi lĩnh vực của khoa học, từ thiên văn học tới động vật học. Trong chương 4 chúng ta đã thấy nó dẫn tới những quỹ đạo mới, hiệu quả hơn đối với các chuyến bay không gian như thế nào. Trong một quy mô rộng lớn hơn, hai nhà thiên văn Jack Wisdom và Jacques Laskar đã chứng tỏ rằng động lực học của Hệ Mặt Trời là hỗn độn. Nếu bạn muốn biết Diêm Vương tinh sẽ ở đâu trên quỹ đạo của nó vào năm 10 triệu SCN thì hãy quên đi. Họ cũng đã chứng tỏ được rằng thủy triều do Mặt Trăng có

tác dụng làm cho Trái Đất ổn định đối với những ảnh hưởng có thể dẫn tới chuyển động hỗn độn, gây ra những biến đổi rất nhanh của khí hậu từ những thời kỳ ấm áp sang thời kỳ băng giá và ngược lại. Như vậy, lý thuyết hỗn độn chứng minh rằng, nếu không có Mặt Trăng, Trái Đất sẽ trở thành một nơi khó có thể sống nổi. Đặc điểm này thường được sử dụng để biện luận rằng quá trình tiến hóa của sự sống trên một hành tinh đòi hỏi phải có một mặt trăng tạo sự ổn định, nhưng đó chỉ là nói quá lên mà thôi. Sự sống trong các đại dương sẽ chẳng hề hấn gì nếu trục của Trái Đất cứ thay đổi mấy triệu năm một lần. Sự sống trên đất liền cũng có đủ thời gian để di trú đi nơi khác, trừ phi nó bị kẹt lại ở đâu đó không có đường bộ để tới nơi có các điều kiện thích hợp hơn. Sự thay đổi khí hậu giờ đây đang diễn ra nhanh hơn nhiều bất cứ thứ gì mà sự thay đổi độ nghiêng của trục Trái Đất có thể gây ra.

Gợi ý của May nói rằng động lực học bất thường của quần thể trong một hệ sinh thái đôi khi do hỗn độn nội tại chứ không phải tính ngẫu nhiên bên ngoài gây ra. Điều này đã được kiểm chứng trong các phiên bản ở phòng thí nghiệm của một số hệ sinh thái thực. Năm 1995, một nhóm do nhà sinh thái người Mỹ James Cushing đứng đầu đã phát hiện thấy động lực học hỗn độn trong các quần thể bọ cánh cứng trong bột mì (mọt bột *Tribolium castaneum),* loài này có thể tràn vào phá hoại các kho trữ bột mì[2]. Năm 1999, hai nhà sinh học người Hà Lan là Jef Huisman và Franz Weissing đã áp dụng hỗn độn cho “nghịch lý sinh vật phù du”, đó là sự đa dạng đến bất ngờ của các loài sinh vật này[3]. Có một nguyên tắc chuẩn trong sinh thái học, nguyên tắc loại trừ cạnh tranh, phát biểu rằng một hệ sinh thái không thể chứa số loài nhiều hơn số vùng cư trú trong cùng một môi trường. Nhưng loài

sinh vật phù du dường như lại vi phạm nguyên tắc đó: số các vùng nhỏ, nhưng số các loài này lên tới hàng ngàn. Họ đã phát hiện ra điều này nhờ một kẽ hở nằm ngay trong nguồn gốc của nguyên tắc loại trừ cạnh tranh, đó là giả thiết cho rằng các quần thể là ổn định. Nếu các quần thể thay đổi theo thời gian thì kết quả toán học suy ra từ mô hình thông thường sẽ là sai, và theo trực giác, các loài khác nhau có thể chiếm cùng một khu vực bằng cách luân phiên – không phải là sự hợp tác có ý thức mà là bởi một loài tạm thời tiếp quản từ một loài khác và có sự bùng nổ về số lượng, trong khi loài bị thay thế co lại thành một quần thể rất nhỏ, hình 59.



Hình 59 Sáu loài chia nhau ba nguồn. Các dải đặt gần nhau là những dao động hỗn độn.

Năm 2008, nhóm của Huisman đã công bố các kết quả của thí nghiệm được tiến hành trong phòng thí nghiệm với một hệ sinh thái thu nhỏ dựa trên hệ sinh thái được tìm thấy ở biển Baltic, bao gồm các vi khuẩn và một số loài phù du. Công trình nghiên cứu trong 6 năm đã phát lộ động lực học hỗn độn trong đó các quần thể thăng giáng rất dữ dội, thường tăng đến 100 lần lớn hơn rồi sau đó lụi hẳn. Các phương pháp

thông thường để phát hiện hỗn độn đã xác nhận sự hiện diện của nó. Thậm chí có cả hiệu ứng con bướm nữa: chân trời tiên đoán của hệ chỉ là ít tuần lễ.

Có những ứng dụng của hỗn độn ảnh hưởng đến cuộc sống hằng ngày của chúng ta, nhưng phần lớn thường gặp trong các quá trình sản xuất và dịch vụ công cộng, chứ không phải được tập trung trong các dụng cụ gia đình. Sự phát hiện ra hiệu ứng con bướm đã làm thay đổi cách thức dự báo thời tiết. Thay vì dồn mọi nỗ lực tính toán nhằm lọc ra một dự báo duy nhất, giờ đây các nhà khí tượng học cho "chạy" nhiều dự báo, bằng cách thực hiện các thay đổi nhỏ ngẫu nhiên khác nhau đối với các số liệu quan sát do khí cầu và vệ tinh thời tiết cung cấp trước khi bắt đầu mỗi lần "chạy". Nếu tất cả các dự báo đó đều phù hợp, thì dự báo có nhiều khả năng là chính xác; còn nếu chúng khác nhau rõ rệt, thì thời tiết ở trạng thái ít khả năng dự báo được. Bản thân các dự báo cũng đã được hoàn thiện nhờ một số các tiến bộ khác, chủ yếu là trong tính toán các ảnh hưởng của đại dương đến trạng thái của khí quyển, nhưng vai trò chính của hỗn độn đã được cảnh báo cho các nhà dự báo, không nên kỳ vọng quá nhiều và phải định lượng được xác suất để một dự báo được coi là đúng.

Những ứng dụng trong công nghiệp bao gồm sự hiểu biết tốt hơn các quá trình trộn, vốn được sử dụng rộng rãi để chế tạo thuốc hoặc trộn các thành phần thực phẩm. Thuốc thực sự trong mỗi viên thường chỉ là một lượng nhỏ, và nó cần được trộn với một chất trơ nào đó. Điều quan trọng là phải có đủ thành phần thuốc trong mỗi viên, nhưng cũng không được quá nhiều. Một máy trộn cũng giống như một máy xử lý thức ăn khổng lồ, động lực học của nó là tất định nhưng

hỗn độn. Toán học của hỗn độn đã cung cấp một sự hiểu biết mới về các quá trình trộn và dẫn tới một số thiết kế hoàn thiện hơn. Các phương pháp được dùng để phát hiện hỗn độn trong dữ liệu lấy cảm hứng từ các thiết bị kiểm tra các vật liệu được dùng để chế tạo lò xo, nhằm hoàn thiện quá trình sản xuất đó. Lò xo bình thường cũng có nhiều ứng dụng quan trọng: nó có mặt trong đệm giường, trong các đầu đọc DVD, thậm chí trong cả các bút bi. Việc kiểm soát hỗn độn, một kỹ thuật dùng hiệu ứng con bướm để duy trì dáng điệu động lực ổn định, đang tỏ ra có nhiều hứa hẹn trong việc thiết kế các máy tạo nhịp tim hiệu quả hơn và ít gây tác dụng xấu hơn.

Tuy nhiên, về tổng thể, hỗn độn tác động chủ yếu lên tư duy khoa học. Trong khoảng 40 năm từ khi sự tồn tại của nó bắt đầu được thừa nhận một cách rộng rãi, hỗn độn đã thay đổi từ một thứ của lạ toán học không mấy quan trọng thành một đặc điểm cơ bản của khoa học. Ngày nay chúng ta có thể nghiên cứu nhiều điều bất thường của tự nhiên mà không cần viện đến thống kê, bằng cách tìm ra những hình mẫu ẩn giấu vốn đặc trưng cho hỗn độn tất định. Đây chỉ là một trong những cách mà ở đó lý thuyết các hệ động lực hiện đại, với sự nhấn mạnh đến trạng thái phi tuyến, đang tạo ra một cuộc cách mạng lặng lẽ trong cách tư duy về thế giới của các nhà khoa học.

17 Công thức Midas

Phương trình Black-Scholes

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

Phương trình này cho ta biết điều gì?

Mô tả cách mà giá cả của một công cụ tài chính phái sinh thay đổi theo thời gian, dựa trên nguyên lý khi giá cả được xác định đúng, thì công cụ phái sinh không mang theo rủi ro và không ai có thể thu lời qua việc bán nó ở một mức giá khác.

Tại sao nó lại quan trọng?

Nó biến việc mua bán một công cụ phái sinh trước ngày đáo hạn trở nên khả thi thông qua việc gán cho nó một mức giá "hợp lý", qua đó biến chính công cụ phái sinh này trở thành một dạng hàng hóa ảo.

Nó đã dẫn tới những gì?

Sự tăng trưởng mạnh mẽ của khu vực tài chính, cùng với sự phát triển những công cụ tài chính ngày một phức tạp hơn, sự phát triển thịnh vượng của nền kinh tế điểm xuyết bởi những cuộc đổ vỡ tài chính, cuộc khủng hoảng tài chính 2008-2009, và cuộc suy thoái kinh tế đang diễn ra.

Kể từ khi bước sang thế kỷ mới, nguồn tăng trưởng lớn nhất trong lĩnh vực tài chính nằm trong các công cụ tài chính được biết đến như là các công cụ phái sinh. Những công cụ phái sinh đó không phải là tiền, cũng không phải là những khoản đầu tư vào chứng khoán hay cổ phiếu. Chúng là những đầu tư trong đầu tư, kỳ vọng về các kỳ vọng. Những chuyên gia giao dịch về phái sinh sử dụng tiền ảo, là những con số trong một máy vi tính. Họ mượn chúng từ những nhà đầu tư, những người mà có lẽ đã vay mượn chúng từ đâu đó khác nữa. Thường thì họ chẳng vay mượn gì cả, cho dù là vay mượn ảo: họ chỉ nhấp chuột để xác nhận rằng họ *sẽ* mượn tiền nếu việc ấy là cần thiết. Nhưng họ không hề có ý định để việc đó trở nên cần thiết; họ sẽ bán các công cụ phái sinh trước khi việc đó xảy ra. Những người cho vay – cũng là cho vay trong tưởng tượng thôi, bởi vì việc vay mượn sẽ không bao giờ xảy ra dựa trên cùng một lý do đã nói ở trên – có lẽ cũng không thực sự có tiền. Đây là kiểu tài chính trên mây, nhưng nó đã trở thành chuẩn mực trong hoạt động thực tiễn của hệ thống ngân hàng trên thế giới.

Thật không may, các hệ quả của những giao dịch thương mại phái sinh cuối cùng lại chuyển thành tiền thật, và gây thiệt hại cho những con người thật. Các mánh lới ấy có tác dụng trong đa số trường hợp là vì việc cắt đứt mối liên hệ với thực tế không tạo nên hiệu ứng gì đáng nói, ngoài việc làm cho một số chủ ngân hàng và thương nhân trở nên giàu

khủng khiếp nhờ việc họ múc tiền thật từ những cái bể ảo. Chỉ cho tới khi mọi chuyện đến bờ đổ vỡ. Khi ấy họ phải đối diện với hệ quả của những sai lầm mà họ đã gây ra, mang theo những món nợ ảo phải trả bằng tiền thật. Và lẽ tự nhiên, kẻ gánh nợ là toàn bộ xã hội.

Đây là những gì đã gây ra cuộc khủng hoảng tiền tệ năm 2008-2009, kể từ lúc đó tới nay các nền kinh tế trên thế giới vẫn đang còn loạng choạng. Những mức lãi suất thấp và các khoản tiền thưởng khổng lồ cho cá nhân đã khuyến khích các chủ ngân hàng và ngân hàng của họ đặt cược số lượng tiền ảo lớn chưa từng có vào những công cụ phái sinh phức tạp chưa từng thấy – họ đã tin tưởng là cực kỳ đảm bảo – trong thị trường bất động sản, nhà đất và doanh nghiệp. Khi nguồn cung bất động sản phù hợp và lượng người mua nhà đất bắt đầu giảm, những người dẫn đầu nền tài chính thế giới cần phải tìm ra những cách thức mới để thuyết phục các cổ đông rằng họ đang mang lại lợi nhuận, để bào chữa và chi tiền cho các món tiền thưởng mà họ được nhận. Và như vậy, vào một lúc nào đó, những nhà tài chính ấy sẽ bắt đầu buôn bán những gói nợ, cũng được cho là cực kỳ đảm bảo, trên bất động sản trong đời thực. Để cho việc này thành hiện thực thì cần phải giữ được sự liên tục trong nhu cầu về nhà đất, nhằm tăng cái bể thế chấp. Vậy là các ngân hàng bắt đầu bán các gói tín dụng thế chấp cho những người mà khả năng trả tiền của họ ngày càng trở nên đáng nghi ngờ. Đây còn gọi là thị trường thế chấp “dưới chuẩn”, “dưới chuẩn” là một cách nói hoa mỹ hàm ý rằng đây là những khoản nợ “có khả năng vỡ nợ”. Sau rồi “dưới chuẩn” cũng nhanh chóng trở thành “chắc chắn vỡ nợ”.

Các ngân hàng hành xử như một trong những nhân vật hoạt hình, lượn qua lượn lại bên rìa một vách đá, bay chấp chới trong không gian cho tới khi nhìn xuống, và chỉ lúc đó mới lao thẳng xuống đất. Mọi thứ có vẻ như đều ổn cho tới khi các ông chủ ngân hàng tự hỏi bản thân họ rằng liệu kiểu kế toán kép với số tiền không có thực và những tài sản được định giá quá mức có thể tồn tại mãi được không, họ muốn biết xem giá trị thực trong những công cụ phái sinh mà họ có là bao nhiêu, và nhận ra rằng đến cả họ cũng không thể kết luận được gì. Ngoại trừ một điều là chắc chắn giá trị thật thấp hơn nhiều so với những gì họ nói với các cổ đông của mình và các cơ quan quản lý của chính phủ.

Khi sự thật khủng khiếp được hé lộ, niềm tin hoàn toàn tan vỡ. Sự thật ấy làm suy thoái thị trường nhà đất, do vậy những tài sản được đem ra thế chấp cho những khoản nợ cũng bị mất giá theo. Ở thời điểm đó, toàn bộ hệ thống rơi vào một vòng phản hồi dương, trong đó mỗi sự mất giá lại dẫn tới một sự mất giá hơn nữa. Kết quả cuối cùng là sự mất mát 17 tỉ đôla Mỹ. Đối diện với khả năng suy sập hoàn toàn của hệ thống tài chính thế giới, sự mất trắng tiền tiết kiệm của người gửi và làm cho cuộc Đại khủng hoảng năm 1929 chỉ giống như một bữa tiệc vườn, chính phủ bị buộc phải bảo lãnh các ngân hàng đang đứng bên bờ vực phá sản. Một trong số đó, ngân hàng Lehman Brothers, đã được cho phép phá sản, nhưng sự mất mát về niềm tin lớn đến mức có vẻ như là không khôn ngoan chút nào nếu lặp lại bài học đó một lần nữa. Như vậy, những người dân đóng thuế phải trả tiền, rất nhiều trong đó là tiền thật. Các ngân hàng đã chộp lấy tiền bằng cả hai tay, và sau đó cố gắng làm ra vẻ rằng thảm họa ấy không phải là lỗi của họ. Họ sỉ mắng những bộ máy hành chính của chính

phủ: một ví dụ rất thú vị cho câu "Đó là lỗi của các ông: các ông đã để chúng tôi làm thế".

Vậy tai nạn thảm khốc nhất trong lịch sử nhân loại của con tàu tài chính đã xảy ra như thế nào?

Có thể nói rằng một trong những kẻ góp mặt vào tai nạn đó là một phương trình toán học.

Dạng công cụ phái sinh đơn giản nhất đã xuất hiện quanh ta từ lâu. Chúng được biết đến như thỏa thuận tương lai (*futures*) và quyền chọn (*option*), khởi nguồn từ thế kỷ 18 ở sàn giao dịch gạo Dojima tại Osaka, Nhật Bản. Sàn giao dịch này được thành lập từ năm 1697, thời kỳ kinh tế cực kỳ thịnh vượng ở Nhật, khi tầng lớp thượng lưu, samurai, được trả công bằng gạo chứ không phải tiền. Một cách tự nhiên, những kẻ môi giới gạo xuất hiện, họ buôn bán trao đổi gạo cứ như chúng là tiền vậy. Khi những thương lái Osaka này đã nắm chắc loại lương thực trọng yếu này của đất nước trong tay, thì những hoạt động của họ có một ảnh hưởng gián tiếp đến giá cả của hàng hóa. Trong thời gian đó, hệ thống tài chính chuyển sang tiền kim loại, và sự kết hợp này đã được chứng minh là một sai lầm chết người. Năm 1730, giá gạo tụt xuống mức thấp nhất.

Thật trớ trêu, nguyên nhân lại là vì những vụ mất mùa. Các samurai, vẫn còn gắn bó với truyền thống trả lương bằng gạo, nhưng canh chừng sự phát triển của tiền tệ, đã bắt đầu cảm thấy lo lắng. Dạng "tiền tệ" ưa thích của họ đã nhanh chóng bị mất giá. Các thương lái còn làm cho vấn đề trở nên trầm trọng hơn bằng việc tạo nên sự khan hiếm giả tạo của gạo trên thị trường do lưu trữ một lượng lớn gạo trong các

kho. Dù việc làm như vậy nghe như có vẻ sẽ giúp tăng giá (tiền) của gạo, nhưng thực tế nó lại có tác dụng ngược lại, bởi vì các samurai đang coi gạo như một loại tiền tệ. Họ chỉ ăn một lượng gạo rất nhỏ so với lượng gạo mà họ sở hữu. Do vậy trong khi những người bình thường thì chết đói, những thương nhân vẫn dự trữ gạo. Gạo trở nên quá khan hiếm nên tiền giấy đã tiếp quản, và tiền giấy nhanh chóng được yêu thích hơn gạo bởi vì người ta có thể thực sự nắm chúng trong tay. Không lâu sau, các thương nhân của Dojima đã bắt đầu tổ chức hoạt động một hệ thống ngân hàng khổng lồ, giữ các tài khoản cho những người giàu có và quyết định tỉ giá trao đổi giữa gạo và tiền giấy.

Cuối cùng triều đình nhận ra rằng cách tổ chức này đã mang đến quá nhiều quyền lực cho các thương lái gạo, và đã cải tổ lại sàn giao dịch gạo, cùng với hầu hết những bộ phận khác trong nền kinh tế của đất nước. Năm 1939, Sàn giao dịch gạo được thay thế bởi Cơ quan quản lý gạo của chính phủ. Nhưng trong khi Sàn giao dịch gạo còn tồn tại, các thương gia đã nghĩ ra một kiểu giao kèo mới giúp cân bằng mức dao động lớn trong giá cả của gạo. Những người đã ký giao kèo được đảm bảo có thể mua hoặc bán một lượng gạo cụ thể ở một ngày cụ thể nào đó trong tương lai với một mức giá cũng cụ thể. Ngày nay, những công cụ như thế được gọi là thỏa thuận tương lai và quyền chọn. Giả sử rằng một thương gia đồng ý mua gạo ở thời điểm sau sáu tháng với một mức giá đã thỏa thuận. Nếu giá cả thị trường tăng cao hơn giá đã được thỏa thuận trong thời gian giao dịch diễn ra, ông ta sẽ mua được gạo rẻ hơn và lập tức bán chúng và thu lời. Mặt khác, nếu giá cả thấp hơn, tức ông ta đã cam kết mua gạo ở một giá cao hơn giá thị trường, và do vậy sẽ bị lỗ.

Những người nông dân nhận thấy những công cụ này hữu ích bởi vì họ thực sự muốn bán một thứ hàng hóa thực là gạo. Mọi người sử dụng gạo làm đồ ăn, hay chế biến thành các loại thức ăn khác, đều muốn mua thứ hàng hóa này. Trong hình thức giao dịch này, giao kèo sẽ làm giảm rủi ro cho cả hai bên – mặc dù với một giá nhất định. Nó thực chất là một dạng bảo hiểm: một thị trường được đảm bảo ở một mức giá đảm bảo, độc lập với sự lên xuống của giá cả thị trường. Thật đáng để bỏ ra một lượng nhỏ lợi nhuận nhằm tránh được sự bất định. Nhưng hầu hết các nhà đầu tư đưa ra các giao kèo về tương lai chỉ với mục đích duy nhất là kiếm tiền và thứ cuối cùng mà họ muốn là hàng tấn, hàng tấn gạo. Họ luôn bán nó trước khi họ phải nhận hàng thực. Do vậy vai trò chính của thỏa thuận tương lai là kích thích đầu cơ tài chính, và nó làm cho mọi thứ trở nên tồi tệ hơn qua việc sử dụng gạo như một loại tiền tệ. Cũng như ngày nay tiêu chuẩn vàng tạo ra giá trị giả tạo cho một loại vật chất (vàng) mà bản thân nó ít có giá trị thực, và gây ra sự kích thích nhu cầu đối với vàng, cũng như vậy, giá gạo bị chi phối bởi việc mua bán các thỏa thuận tương lai hơn là việc giao thương chính bản thân gạo. Những thỏa thuận như trên là một dạng đánh bạc, và những giao kèo này nhanh chóng tự chúng có một giá trị, và rồi về sau được trao đổi cứ như thể là hàng hóa thật vậy. Hơn nữa, mặc dù lượng gạo bị giới hạn bởi những gì mà nông dân có thể gieo cấy, số lượng các giao kèo cho gạo có thể được cấp ra là không có giới hạn.

Những thị trường chứng khoán lớn trên thế giới đã nhanh chóng nhận ra cơ hội chuyển đổi “không khí” thành tiền như thế, và họ đã bắt đầu buôn bán các thỏa thuận tương lai kể từ đó. Đầu tiên, hoạt động này, tự thân nó không gây ra những

vấn đề kinh tế lớn, mặc dù thi thoảng nó cũng mang tới sự bất ổn chứ không phải là sự bình ổn thường được khẳng định để biện hộ cho hệ thống đó. Nhưng vào khoảng năm 2000, khu vực tài chính trên thế giới bắt đầu khám phá ra các biến thể thậm chí còn tinh vi hơn của các dạng thỏa thuận tương lai, đó là "những công cụ phái sinh" phức tạp mà giá trị của nó dựa trên những biến động mang tính giả thuyết trong tương lai của một số tài sản. Không giống như thỏa thuận tương lai vì chúng chí ít còn dựa trên những tài sản có thực, những công cụ phái sinh có thể dựa trên một loại tài sản mà bản thân nó cũng là một công cụ phái sinh. Các ngân hàng đã không còn mua và bán những vụ đặt cược về giá cả tương lai của hàng hóa như gạo; mà họ mua và bán những vụ đặt cược về giá cả trong tương lai của một vụ *đặt cược*.

Điều này đã nhanh chóng trở thành một ngành kinh doanh lớn. Năm 1998, hệ thống tài chính thế giới đã giao dịch khoảng 100 ngàn tỉ đôla trên các công cụ phái sinh. Tới năm 2007, nó đã tăng lên thành 100 ngàn triệu triệu đôla Mỹ. Ngàn tỉ, ngàn triệu triệu,... chúng ta đều biết rằng đây là những con số rất lớn, nhưng lớn tới cỡ nào? Hãy đặt câu hỏi này trong một bối cảnh cụ thể, tổng giá trị của tất cả các sản phẩm tạo ra từ các ngành công nghiệp sản xuất, trong một ngàn năm trở lại đây, cũng chỉ khoảng 100 ngàn tỉ đôla Mỹ, con số đã được điều chỉnh sau khi đã tính tới lạm phát. Vậy mà nó cũng chỉ bằng một phần mười giá trị của những giao dịch phái sinh trong một năm. Phải thừa nhận rằng số lượng lớn các sản phẩm công nghiệp chỉ mới xuất hiện trong 50 năm trở lại đây, nhưng ngay cả như vậy, giá trị giao dịch các công cụ phái sinh vẫn là một con số khổng lồ. Đặc biệt, điều này có nghĩa là những giao thương phái sinh bao gồm

hầu hết là các lượng tiền không thực sự tồn tại – tức tiền ảo, những con số trong máy tính, không hề có bất kỳ mối liên hệ nào với thế giới thực. Thực tế cho thấy, những giao dịch như thế *buộc phải* là ảo: tổng lượng tiền trong khi lưu thông toàn cầu hoàn toàn không tương xứng với số tiền để trả cho những giao dịch sau một cú nhấp chuột. Những cú nhấp chuột của những người không quan tâm gì đến những hàng hóa có liên quan, và cũng chẳng hề biết sẽ phải làm gì nếu họ nhận hàng thực, khi sử dụng tiền mà họ không thực sự sở hữu.

Bạn không cần phải là một nhà khoa học tài giỏi mới nhận ra rằng đây là một công thức cho thảm họa. Nhưng trong một thập kỷ, nền kinh tế thế giới đã phát triển không ngừng dựa trên những giao dịch phái sinh. Không những bạn có thể dễ dàng vay để mua nhà, thậm chí bạn có thể vay được nhiều hơn số tiền cần có để mua. Ngân hàng thậm chí cũng không buồn kiểm tra xem thu nhập thực sự của bạn ở mức nào, hay bạn đã có những món nợ nào khác. Bạn có thể nhận được 125% giá trị thực sự của văn tự cầm cố tự xác nhận – có nghĩa là bạn cho ngân hàng biết rằng bạn có đủ khả năng trả nợ và họ sẽ không hỏi bạn những câu hỏi rắc rối nữa – và thoải mái sử dụng số tiền dư ra kia cho một kỳ nghỉ, mua một chiếc ôtô, phẫu thuật thẩm mỹ hay mua một đống các thùng bia. Các ngân hàng đã đi sai hướng trong việc cổ động các khách hàng của mình đi vay, ngay cả khi họ không có nhu cầu.

Cái mà họ nghĩ sẽ đảm bảo cho họ nếu như người vay không trả được nợ thật đơn giản. Những khoản vay mượn ấy được đảm bảo bằng ngôi nhà của bạn. Giá cả nhà đất lên cao vút, do vậy họ sẽ nhanh chóng có thể bù lỗ; còn nếu bạn không trả nợ được, ngân hàng có thể tịch thu nhà của bạn, bán nó, hay đem cho thuê. Nghe thật ổn. Nhưng thực ra không phải

thế. Các ông chủ ngân hàng không hề tự hỏi mình về giá cả nhà cửa nếu hàng trăm ngân hàng đồng thời đem bán hàng triệu ngôi nhà cùng một thời điểm. Họ cũng không đặt vấn đề xem giá cả nhà cửa có tiếp tục tăng chóng mặt hơn cả lạm phát hay không. Họ dường như thực sự nghĩ rằng giá cả nhà cửa sẽ tăng thêm 10-15% giá trị thực mỗi năm, tăng vô hạn định. Họ sẽ vẫn thôi thúc những người quản lý thị trường hãy buông lỏng những điều luật và cho phép họ cho vay thậm chí còn nhiều tiền hơn khi những người nghèo nhất rời khỏi thị trường bất động sản.

Nhiều mô hình toán học phức tạp nhất hiện nay của các hệ thống tài chính được cho là khởi nguồn từ chuyển động Brown, được nhắc đến trong chương 12. Khi nhìn qua kính hiển vi, các hạt nhỏ lơ lửng trong chất lỏng chuyển động một cách ziczac thất thường, Einstein và Smoluchowski đã phát triển các mô hình toán học mô tả quá trình này và sử dụng chúng để chứng minh sự tồn tại của các nguyên tử. Mô hình thông thường giả định rằng các hạt nhận được những va chạm ngẫu nhiên qua những khoảng cách mà phân bố xác suất là phân bố chuẩn, có dạng một đường hình chuông. Hướng của những cú va chạm này được phân bố đều – mỗi hướng đều có cùng cơ hội xảy ra như nhau. Quá trình này gọi là bước đi ngẫu nhiên. Mô hình của chuyển động Brown là một phiên bản liên tục của những bước đi ngẫu nhiên như vậy, trong đó kích cỡ của những cú va chạm và thời gian giữa hai va chạm liên tiếp trở nên bé tùy ý. Bằng trực giác, chúng ta giả định rằng có vô hạn những cú va chạm vô cùng bé như vậy.

Các tính chất thống kê của chuyển động Brown dựa trên

số lượng lớn các phép thử, được xác định bởi một phân bố xác suất cho biết xác suất để hạt kết thúc ở một vị trí cụ thể sau một khoảng thời gian cho trước. Phân bố này có dạng đối xứng xuyên tâm, tức xác suất chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm đó đến điểm gốc. Ban đầu hạt cũng có vẻ như ở rất gần điểm gốc, nhưng theo thời gian, phạm vi các vị trí khả dĩ lan rộng ra khi hạt có nhiều cơ hội khám phá những miền xa của không gian. Đáng chú ý là, sự tiến hóa theo thời gian của phân bố xác suất trên tuân theo phương trình truyền nhiệt, mà trong bối cảnh này thường được gọi là phương trình khuếch tán. Vì vậy, xác suất cũng lan tỏa giống như nhiệt.

Sau khi Einstein và Smoluchowski công bố công trình của họ, hóa ra hầu hết các nội dung toán học trong đó đã được đưa ra trước đó, trong luận án tiến sĩ của nhà toán học Pháp Louis Bachelier vào năm 1900. Nhưng Bachelier đã áp dụng nó cho một ý tưởng khác: các thị trường chứng khoán và quyền chọn. Tiêu đề luận án của ông là *Lý thuyết đầu cơ* (*Théorie de la speculation*). Công trình này không được đón nhận với những lời ngợi khen nồng nhiệt, có lẽ bởi vì chủ đề của nó quá xa với phạm vi chuẩn mực của toán học thời đó. Thầy hướng dẫn của Bachelier là nhà toán học trứ danh Henri Poincaré, người đã tuyên bố rằng công trình ấy là "rất độc đáo". Ông cũng có một phần trách nhiệm đối với việc luận án này ít được chú ý khi thêm vào, với sự tham chiếu tới phần luận án đưa ra phân bố chuẩn cho các sai số: "Thật đáng tiếc rằng M. Bachelier đã không phát triển thêm phần này của luận án". Bất kỳ nhà toán học nào cũng có thể giải thích điều đó nghĩa là "đây là nơi mà toán học đã bắt đầu trở nên thực sự thú vị, và nếu ông chịu tiếp tục đi sâu hơn nữa, chứ không chỉ dừng lại ở những ý tưởng mờ mịt về thị trường

chứng khoán, thì sẽ dễ cho ông điểm cao hơn". Luận án này chỉ được cho điểm "honorable" (trung bình), một điểm số vừa đủ; thậm chí nó cũng đã được công bố, nhưng không nhận được điểm số cao nhất "très honorable" (giỏi).

Bachelier thực ra đã nắm được nguyên lý rằng những thăng giáng của thị trường chứng khoán tuân theo bước đi ngẫu nhiên. Độ lớn của các thăng giáng liên tiếp tuân theo phân bố đường cong hình chuông, giá trị trung bình và độ lệch chuẩn có thể được xác định dựa theo dữ liệu từ thị trường. Một hệ quả suy ra từ đó là những thăng giáng lớn rất khó có thể xảy ra. Nguyên nhân thực ra nằm ở chỗ phần đuôi của phân bố chuẩn triệt tiêu rất nhanh: nhanh hơn cả hàm mũ. Đường cong hình chuông giảm về 0 ở một tốc độ như hàm mũ *x bình phương*. Các nhà thống kê (cũng như các nhà vật lý và phân tích thị trường) đã nói về các thăng giáng hai-sigma, ba-sigma,...vv. Ở đây sigma (σ) là độ lệch chuẩn, một thước đo xem đường cong hình chuông rộng cỡ nào. Ví dụ, một thăng giáng ba-sigma là thăng giáng lệch khỏi kỳ vọng một lượng ít nhất là ba lần độ lệch chuẩn. Toán học của đường cong hình chuông cho phép chúng ta gán các xác suất cho những "biến cố cực hạn" đó, xem Bảng 3.

Kích cỡ cực tiểu của thăng giáng	**Xác suất**
σ	0,3174
2σ	0,0456
3σ	0,0027
4σ	0,000063
5σ	0,0000006

Bảng 3 Xác suất của các biến cố đa-sigma

Kết quả của mô hình chuyển động Brown của Bachelier là các thăng giáng của thị trường chứng khoán hiếm hoi tới mức, trong thực tế chúng gần như chẳng bao giờ xảy ra. Bảng 3 cho thấy một biến cố năm-sigma, chẳng hạn, được kỳ vọng sẽ xảy ra sáu lần trong mỗi 10 triệu lần thử. Tuy nhiên, dữ liệu từ thị trường chứng khoán lại cho thấy rằng chúng xảy ra thường xuyên hơn thế. Chứng khoán của Cisco Systems, một công ty hàng đầu thế giới trong lĩnh vực viễn thông, đã trải qua năm biến cố kiểu năm-sigma trong 20 năm gần đây, trong khi con số mà mô hình chuyển động Brown dự đoán chỉ là 0,003. Tôi chọn công ty này một cách ngẫu nhiên, và không có gì là bất thường cả. Vào ngày thứ hai đen tối (ngày 19 tháng 10 năm 1987), thị trường chứng khoán thế giới đã mất hơn 20% giá trị giao dịch chỉ trong vài giờ; một biến cố cực hạn cỡ này lẽ ra không thể xảy ra.

Dữ liệu rõ ràng cho thấy rằng các biến cố cực hạn không hề hiếm gặp như mô hình chuyển động Brown tiên đoán. Phân bố xác suất không triệt tiêu dần theo hàm số mũ (hoặc nhanh hơn), mà nó triệt tiêu dần như một hàm lũy thừa x^{-a}, với a là số nguyên dương nào đó. Nói theo ngôn ngữ chuyên môn tài chính thì một phân bố như vậy được cho là có một *đuôi lớn* (béo). Các đuôi lớn chỉ ra mức độ tăng của rủi ro. Nếu đầu tư của bạn có lợi nhuận kỳ vọng là năm-sigma, thì giả sử rằng áp dụng mô hình chuyển động Brown, khả năng nó không xảy ra là nhỏ hơn một phần một triệu. Nhưng nếu đuôi của nó lớn, khả năng này cũng trở nên lớn hơn, có lẽ là một phần một trăm. Điều đó khiến nó thành một sự đặt cược tồi tệ hơn nhiều.

Một thuật ngữ có liên quan khác, được phổ biến rộng rãi bởi Nassim Nicholas Taleb, một chuyên gia của toán tài chính,

là "biến cố thiên nga đen". Cuốn *Thiên nga đen (The black Swan)* in năm 2007 của ông đã trở thành một cuốn sách bán rất chạy. Ở thời cổ đại, tất cả thiên nga được biết đến đều có màu trắng. Nhà thơ Juvenal đã ám chỉ một thứ gì đó như là "một loài chim hiếm hoi trên đất liền, và rất giống với một con thiên nga đen", với ý muốn nói điều đó là không thể. Cụm từ này được sử dụng rộng rãi trong thế kỷ 16. Nhưng năm 1697, khi nhà thám hiểm người Hà Lan, Willem de Vlamingh đi tới một địa điểm có cái tên rất hợp là Swan River (Sông thiên nga) ở miền đông Australia, ông đã thấy rất nhiều thiên nga đen. Từ đó cụm từ này đã thay đổi ý nghĩa của mình, và bây giờ được hiểu theo nghĩa một giả định có vẻ như có căn cứ, nhưng thực ra ở một thời điểm nào đó hóa ra lại cực kỳ sai lầm. Một thuật ngữ thường dùng khác nữa là biến cố-X, "biến cố cực hạn".

Những phân tích ban đầu của thị trường bằng ngôn ngữ toán học đã khuyến khích ý tưởng đầy hấp dẫn cho rằng thị trường có thể được mô hình hóa bằng toán học, được dựng nên một cách hợp lý và an toàn để tạo ra lợi nhuận một cách không giới hạn. Năm 1973, có vẻ như giấc mơ này đã có thể trở thành hiện thực, khi Fischer Black và Myron Scholes giới thiệu một phương pháp để định giá các quyền chọn: phương trình Black-Scholes. Cũng trong năm ấy, Robert Merton đã đưa ra một phân tích toán học cho mô hình của họ, và mở rộng nó. Phương trình ấy như sau:

$$\frac{1}{2}(\sigma S)^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$$

Nó bao gồm năm đại lượng phân biệt – thời gian t, giá S của hàng hóa, giá V của công cụ phái sinh phụ thuộc vào S và t, tỉ lệ

lãi suất không rủi ro *r* (lãi suất trên lý thuyết có thể kiếm được bằng những đầu tư gần như không có rủi ro, như trái phiếu chính phủ Mỹ chẳng hạn), và độ bất ổn định σ^2 của chứng khoán. Phương trình này cũng rất phức tạp về mặt toán học: đó là một phương trình đạo hàm riêng cấp hai, giống như các phương trình sóng và phương trình truyền nhiệt. Nó biểu diễn tốc độ thay đổi trong giá cả của công cụ phái sinh theo thời gian như một tổ hợp tuyến tính của ba số hạng: giá cả của bản thân công cụ phái sinh, nó thay đổi nhanh thế nào đối với giá của chứng khoán, và sự thay đổi ấy tăng tốc ra sao. Các biến số khác xuất hiện trong hệ số của những số hạng trên. Nếu bỏ qua các số hạng biểu diễn giá của công cụ phái sinh và tốc độ thay đổi của nó, thì phương trình trên trông sẽ giống hệt như phương trình truyền nhiệt, nó mô tả giá của quyền chọn phân tán trong không gian của giá chứng khoán như thế nào. Điều này có thể bắt nguồn từ giả định của Bachelier trong mô hình chuyển động Brown. Những số hạng khác của phương trình tính đến các nhân tố phụ khác nữa.

Phương trình Black-Scholes được rút ra như là một hệ quả của nhiều giả định tài chính được đơn giản hóa – chẳng hạn như giả định không có phí giao dịch hay không có giới hạn cho việc bán khống, và có thể vay hay cho vay tiền ở một mức lãi suất cố định, không rủi ro. Cách tiếp cận này được gọi là lý thuyết định giá chứng khoán, và cốt lõi toán học của nó cũng khởi nguồn từ Bachelier. Nó giả định rằng giá cả thị trường có dáng điệu thống kê như chuyển động Brown, trong đó cả tốc độ trôi và tính bất ổn của thị trường là hằng số. Trôi là sự di chuyển của giá trị kỳ vọng, và tính bất ổn là thuật ngữ tài chính chỉ độ lệch chuẩn, một thước đo sự rời xa trung bình đối với giá trị kỳ vọng. Giả định này quá quen thuộc trong các

tài liệu về tài chính đến mức nó đã trở thành một tiêu chuẩn công nghiệp.

Có hai loại quyền chọn chính. Trong một quyền chọn bán, người mua quyền chọn này sẽ mua quyền để bán một loại hàng hóa hay công cụ tài chính ở một thời điểm cố định với một mức giá được thỏa thuận, nếu họ muốn. Quyền chọn mua cũng tương tự như vậy, nhưng nó cho phép bạn có quyền mua thay vì bán. Phương trình Black-Scholes đã có các nghiệm tường minh: một công thức cho các quyền chọn mua, một công thức khác cho quyền chọn bán[1]. Nếu một công thức như thế không tồn tại, phương trình này sẽ được giải bằng phương pháp số và được thực hiện bởi một phần mềm. Tuy nhiên, các công thức giúp ta có thể tính toán trực tiếp giá cả được đề nghị, cũng như cung cấp cho ta những nhận thức sâu sắc, quan trọng về mặt lý thuyết.

Phương trình Black-Scholes đã được phát minh để đem đến cho thị trường hợp đồng tương lai một cấp độ hợp lý nhất định, và thực tế là nó đã làm được một cách rất hiệu quả trong điều kiện của thị trường thông thường. Nó cung cấp một phương pháp có hệ thống để tính toán giá trị của một quyền chọn trước khi quyền chọn ấy *đến kỳ hạn*. Khi đó nó có thể được đem đi bán. Chẳng hạn, giả sử rằng, một thương gia ký hợp đồng thương mại mua 1000 tấn gạo trên thời gian 12 tháng với giá 500 một tấn – một quyền chọn mua. Sau 5 tháng, thương gia này quyết định bán quyền chọn này cho bất kỳ ai muốn mua nó. Ai cũng biết giá gạo trong thị trường đã thay đổi như thế nào, vậy bây giờ hợp đồng này đáng giá bao nhiêu? Nếu bạn bắt đầu buôn bán những quyền chọn như thế mà không biết câu trả lời, bạn có thể gặp vấn đề đấy.

Nếu giao dịch thua lỗ, bạn sẽ bị cáo buộc rằng đã chọn sai giá, và công việc của bạn cũng có thể sẽ gặp rủi ro. Vậy giá thế nào mới là đúng? Mua bán dựa trên cảm tính không còn là một lựa chọn đúng đắn nữa khi tổng lượng tiền tham gia lên tới hàng tỉ. Phải có một phương cách được đồng thuận để định giá một quyền chọn ở bất kỳ thời điểm nào trước khi nó hết kỳ hạn. Phương trình Black-Scholes chính là một phương cách như thế. Nó cung cấp một công thức mà bất kỳ ai cũng có thể dùng được, và nếu ông chủ của bạn cũng dùng công thức này, ông ta cũng sẽ nhận được cùng một kết quả như bạn, với điều kiện bạn không phạm lỗi trong những tính toán số học. Trong thực tế, cả hai người cùng sử dụng một gói công thức chuẩn có sẵn trong máy tính.

Phương trình Black-Scholes hiệu quả tới mức nó đã mang lại cho Merton và Scholes giải thưởng Nobel về kinh tế năm 1997[2]. Khi ấy Black đã mất, và điều lệ của giải thưởng không cho phép trao giải cho người đã khuất, nhưng đóng góp của ông đã được Viện Hàn lâm Thụy Điển trích dẫn một cách tường minh. Sự hiệu quả của phương trình này phụ thuộc vào diễn biến của thị trường. Nếu các giả thiết đằng sau mô hình không xảy ra nữa, thì cũng không thể áp dụng công thức ấy một cách rộng rãi được. Nhưng theo thời gian và sự tăng tiến của niềm tin, rất nhiều chủ ngân hàng và thương nhân đã quên mất điều đó; họ sử dụng phương trình này như một loại bùa, một dạng ma thuật toán học để bảo vệ họ trước những lời chỉ trích. Phương trình Black-Scholes không chỉ đưa ra một mức giá hợp lý dưới những điều kiện chuẩn, mà nó còn chống lưng cho bạn nếu giao dịch thất bại. Xin đừng khiển trách tôi, thưa ông chủ, tôi đã sử dụng công thức chuẩn mực kia mà.

Khu vực tài chính đã nhanh chóng thấy được những lợi thế của phương trình Black-Scholes và các nghiệm của nó, và gần như đồng thời đã phát triển một tập hợp các phương trình có liên quan với các giả định khác nhau và nhắm đến những công cụ tài chính khác nhau. Thế giới bình yên khi đó của những giao dịch ngân hàng thông thường có thể sử dụng các phương trình ấy để biện hộ cho những vay mượn và buôn bán, nhưng vẫn luôn mở to mắt để canh chừng những trở ngại tiềm tàng. Nhưng những công việc kinh doanh đặc thù hơn sẽ nhanh chóng tiếp bước, và họ có niềm tin cho một cuộc chuyển đổi thực sự. Đối với họ, khả năng một mô hình dẫn đến kết quả sai là chuyện không thể tưởng tượng được. Nó được biết đến như công thức Midas – một công thức biến mọi thứ thành vàng. Nhưng khu vực tài chính đã quên mất câu chuyện về Vua Midas kết thúc thế nào.

Trong nhiều năm, đứa con cưng của khu vực tài chính là một công ty có tên Long Term Capital Management (LTCM). Đây là một quỹ đầu tư tư nhân, nó triển khai việc đầu tư của mình theo một cách nhằm bảo vệ nhà đầu tư khi thị trường trượt dốc và mang tới lợi nhuận cao khi thị trường phát triển. Công ty này chuyên về kinh doanh các chiến lược dựa trên các mô hình toán học bao gồm cả phương trình Black-Scholes và các mở rộng của nó, cùng với các kỹ thuật như kinh doanh chênh lệch giá hoặc tỉ giá, một kỹ thuật khai thác những khác biệt giữa giá cả của trái phiếu và giá trị thực tế mà nó mang lại. Ban đầu LTCM đã thành công ngoạn mục, mang lại lợi tức khoảng 40% mỗi năm cho tới năm 1998. Ở thời điểm đó, quỹ làm tổn thất 4,6 tỉ chỉ trong không đầy bốn tháng và Ngân hàng dự trữ liên bang đã động viên những

chủ nợ quan trọng của LTCM bảo lãnh cho nó với số tiền vào khoảng 3,6 tỉ đôla. Cuối cùng các ngân hàng liên quan cũng lấy lại được tiền, nhưng LTCM vẫn phá sản vào năm 2000.

Vậy sai lầm nằm ở đâu? Có rất nhiều lý thuyết cũng như các nhà bình luận tài chính, nhưng tất cả đều đồng thuận ở một điểm cho rằng nguyên nhân khả dĩ cho thất bại của LTCM là cuộc khủng hoảng kinh tế Nga năm 1998. Thị trường phương Tây đã đầu tư rất mạnh vào nước Nga, nước có nền kinh tế phụ thuộc nặng nề vào xuất khẩu dầu mỏ. Cuộc khủng hoảng kinh tế châu Á năm 1997 đã gây ra sự sụt giảm giá dầu mỏ, và nạn nhân chính là nền kinh tế của Nga. Ngân hàng thế giới đã cung cấp khoản vay 22,6 tỉ đôla để giúp Nga vực dậy nền kinh tế.

Nguyên nhân tối hậu dẫn đến việc phá sản của LTCM đã nằm sẵn ngay trong ngày nó bắt đầu giao dịch. Ngay khi thực tại không còn tuân theo các giả định của mô hình thì LTCM đã ngập sâu trong khó khăn. Cuộc khủng hoảng kinh tế Nga đã phá hủy toàn bộ các giả định đó. Một số nhân tố có ảnh hưởng lớn hơn số còn lại. Sự bất ổn tăng là một trong số các nhân tố đó. Một yếu tố khác là giả định rằng các thăng giáng cực hạn gần như không bao giờ xảy ra: tức là không có đuôi lớn. Nhưng cuộc khủng hoảng đã làm thị trường bị rối loạn, và trong khi hoang mang, giá cả đã trượt theo mức khổng lồ – đa-sigma – theo từng giây. Bởi vì tất cả các nhân tố liên quan đều có quan hệ với nhau, nên những sự cố này gây ra những sự thay đổi nhanh chóng khác, nhanh tới mức các nhà buôn không thể biết được trạng thái của thị trường ở bất kỳ thời điểm nào. Ngay cả khi họ muốn hành xử một cách hợp lý, thường người ta không thể làm được khi đang hoảng loạn, họ cũng không có cơ sở nào để bám víu hòng làm được như thế.

Nếu mô hình chuyển động Brown là phù hợp, những biến cố cực hạn như cuộc khủng hoảng kinh tế Nga sẽ không xảy ra hơn một lần trong một thế kỷ. Tôi nhớ rằng có bảy cuộc khủng hoảng như vậy trong 40 năm trở lại đây: đầu tư quá mức vào bất động sản, Liên bang Xô viết cũ, Brazil, bất động sản (lại nữa), bất động sản (phải, lại một lần nữa), các công ty trên internet, và... ồ vâng, lại bất động sản. Với những chậm trễ trong nhận thức, sự phá sản của LTCM là một cảnh báo. Những nguy hiểm của việc giao dịch chỉ dựa trên một công thức trong một thế giới không tuân theo những giả định dễ chịu đằng sau công thức đã được ghi nhận – nhưng đã nhanh chóng bị quên lãng. Nhận thức chậm trễ dù sao cũng vẫn còn tốt, nhưng ai cũng có thể thấy được sự nguy hiểm sau khi một cuộc khủng hoảng xảy ra. Nhưng còn việc dự đoán trước thì sao? Khẳng định chính thống về cuộc khủng hoảng kinh tế toàn cầu gần đây là, cũng giống như con thiên nga với bộ lông vũ màu đen, không ai nghĩ rằng nó sẽ xuất hiện cả.

Nhưng điều đó không hoàn toàn chính xác.

Đại hội toán học thế giới là hội nghị toán học lớn nhất toàn cầu, diễn ra bốn năm một lần. Tháng 8 năm 2002 nó được tổ chức ở Bắc Kinh, và Mary Poovey, giáo sư xã hội học, giám đốc Viện nghiên cứu các sản phẩm trí tuệ ở đại học New York đã trình bày một bài giảng có nhan đề "Các con số có đảm bảo tính trung thực hay không?"[3]. Phụ đề bên dưới là "những kỳ vọng không thực tế và scandal về kế toán tại Mỹ", và nó mô tả sự xuất hiện gần đây của "một trục quyền lực mới" trong các vấn đề của thế giới:

Trục quyền lực này chạy qua hầu hết các tập đoàn đa

quốc gia, rất nhiều trong số các tập đoàn đó trốn thuế quốc gia bằng cách kết hợp với nhau ở các thiên đường thuế như Hồng Kông. Nó chạy qua các ngân hàng đầu tư, qua các tổ chức phi chính phủ như Quỹ tiền tệ quốc tế, qua các bang và các quỹ hưu trí của các tập đoàn, và qua ví của các nhà đầu tư thông thường. Trục nguồn lực tài chính này góp phần vào các thảm họa kinh tế như cuộc khủng hoảng năm 1998 ở Nhật và vụ vỡ nợ của Argentina năm 2001, và nó đã để lại dấu vết trong những hồi chuyển hằng ngày của các chỉ số chứng khoán như chỉ số công nghiệp Dow Jones và Financial Times Stock Exchange 100 Index (the FTSE) của London.

Bà tiếp tục nói về trục quyền lực mới này, về bản chất không tốt cũng không xấu: điều quan trọng là nó sẽ sử dụng quyền lực của mình như thế nào. Nó giúp tăng mức sống của Trung Quốc, điều mà nhiều người trong số chúng ta sẽ cho là có lợi. Nó cũng khuyến khích sự từ bỏ các quỹ phúc lợi xã hội trên khắp toàn cầu, thay thế chúng bởi một nền văn hóa cổ đông, thứ mà nhiều người trong số chúng ta vẫn nghĩ là có hại. Một ví dụ ít gây tranh cãi hơn về một hệ quả xấu đó là vụ bê bối Enron, vỡ lở vào năm 2001. Enron là một công ty năng lượng ở Texas, và sự phá sản của nó dẫn tới cái mà sau này là vụ phá sản lớn nhất trong lịch sử nước Mỹ, và những cổ đông mất mát tầm 11 tỉ đôla. Enron là một lời cảnh báo khác, lần này là vì bãi bỏ kiểm soát luật kế toán. Một lần nữa lại thấy rằng, có rất ít người chú ý tới những lời cảnh báo.

Nhưng Poovey thì khác. Bà chú ý đến sự đối lập giữa hệ thống tài chính truyền thống dựa trên việc sản xuất những của cải thực sự, và hệ thống mới xuất hiện dựa trên đầu tư,

giao dịch tiền tệ và "sự đặt cược đầy phức tạp về sự lên hay xuống của giá cả trong tương lai". Cho tới năm 1995, nền kinh tế với tiền ảo này đã vượt qua nền kinh tế sản xuất thông thường. Trục quyền lực mới đã cố ý làm rối loạn hệ thống tiền thực và ảo: những con số tùy tiện trong các tài khoản công ty và tiền mặt hay những loại hàng hóa thực sự. Xu hướng này, bà lập luận, đã dẫn tới một nền văn hóa trong đó cả của cải và các công cụ tài chính đều trở nên cực kỳ mất ổn định, có khả năng bùng nổ hay suy sập chỉ sau một cú nhấp chuột.

Bài báo minh họa các quan điểm trên sử dụng năm kỹ thuật và công cụ tài chính quen thuộc, như "kế toán theo giá trị thị trường", trong đó một công ty thiết lập mối quan hệ đối tác với một công ty con. Công ty con mua một phần trong lợi tức tương lai của công ty mẹ; số tiền liên quan sẽ được ghi lại như lợi tức thu được của công ty mẹ trong khi rủi ro sẽ lại đẩy xuống cho bảng cân đối tài sản của công ty con. Enron đã sử dụng kỹ thuật này khi nó thay đổi phương án marketing từ bán năng lượng sang bán thỏa thuận mua bán năng lượng tương lai. Vấn đề lớn liên quan đến việc chuyển tiếp những lợi nhuận tiềm tàng trong tương lai theo cách đó là ở chỗ: chúng không thể được liệt kê là lợi tức trong năm tới được. Câu trả lời là phải tiếp tục lặp lại những thủ đoạn trên. Nó giống như việc thử lái một chiếc xe không có phanh bằng cách nhấn ngày một mạnh hơn lên chân ga. Kết quả tất yếu là một vụ phá sản.

Ví dụ thứ năm của Poovey là về các công cụ phái sinh, và là ví dụ quan trọng nhất vì tổng lượng tiền tham gia vào là cực kỳ khổng lồ. Phân tích của bà chủ yếu củng cố cho những gì mà tôi đã nhắc đến ở trên. Kết luận chính của bà như sau: "Những thỏa thuận tương lai và giao dịch phái sinh phụ

thuộc vào niềm tin rằng thị trường chứng khoán hành xử theo cách có thể dự đoán được bằng thống kê, nói cách khác, có các phương trình toán học chính xác mô tả được thị trường". Nhưng bà đã lưu ý rằng các bằng chứng lại dẫn tới một hướng hoàn toàn khác: đâu đó khoảng giữa 75% và 90% tất cả những nhà buôn thỏa thuận tương lai hằng năm đều bị thua lỗ.

Có hai loại công cụ phái sinh đặc biệt liên quan đến việc tạo ra các thị trường tài chính độc hại của những năm đầu thế kỷ 21: hợp đồng hoán đổi rủi ro tín dụng (CDS – *Credit default swap*) và nghĩa vụ nợ có thế chấp (*collateralised debt obligation*). Hợp đồng hoán đổi rủi ro tín dụng là một dạng bảo hiểm: bạn có thể trả phí bảo hiểm và nhận lại tiền từ công ty bảo hiểm nếu có ai đó bị vỡ nợ. Nhưng bất kỳ ai cũng có thể mua những bảo hiểm như vậy cho bất kỳ thứ gì. Họ không cần phải là công ty mang nợ, hay bị nợ. Do vậy một quỹ tự bảo hiểm, thực tế có thể cá cược rằng khách hàng của một ngân hàng sẽ không có khả năng trả được tín dụng thế chấp của họ, và nếu thực sự các khách hàng kia vỡ nợ, quỹ tự bảo hiểm có thể thu được một lượng lớn tiền, ngay cả khi nó không phải là một bên tham gia thỏa thuận thế chấp. Điều này càng khuyến khích những nhà đầu cơ gây ảnh hưởng xấu tới tình hình thị trường làm cho khả năng vỡ nợ tăng cao. Một nghĩa vụ nợ có thế chấp dựa trên một tập hợp (danh sách) các tài sản thế chấp. Chúng có thể là tài sản thực tế, như thế chấp bảo đảm đối với bất động sản thực tế, hay có thể là các công cụ phái sinh, hoặc có thể là hỗn hợp của cả hai loại. Chủ nhân của những tài sản thế chấp bán cho các nhà đầu tư quyền lấy một phần lợi nhuận từ những tài sản ấy. Các nhà đầu tư kia có thể vẫn mua bán được một cách an toàn, và đầu

tiên thu được lợi nhuận, nhưng chúng lấy đi của họ nhiều hơn thế. Hay họ có thể chấp nhận mạo hiểm, trả ít đi, và nằm ở cuối bảng danh sách được trả nợ từ người vay.

Cả hai dạng phái sinh đều được giao dịch bởi các ngân hàng, các quỹ tự bảo hiểm, và một số khác. Chúng được định giá bằng cách sử dụng các hậu duệ của phương trình Black-Scholes, do vậy chúng có quyền được coi như những tài sản. Các ngân hàng này vay tiền từ những ngân hàng kia, do vậy họ có thể cho những người muốn vay có thế chấp vay. Không lâu sau người nào cũng mượn một lượng tiền khổng lồ từ người khác, hầu hết trong đó được bảo đảm trên những công cụ tài chính phái sinh. Quỹ tự bảo hiểm và những nhà đầu cơ khác đã cố gắng làm ra tiền bằng cách phát hiện ra những thảm họa tiềm tàng, và đánh cược rằng chúng sẽ xảy ra. Giá trị những công cụ phái sinh có liên quan, và của những tài sản thực tế như bất động sản thường được tính toán dựa vào thị trường, điều rất dễ bị lạm dụng bởi vì nó sử dụng các thủ tục kế toán giả tạo và các công ty con ít vốn đầy rủ ro để biểu diễn lợi tức được ước tính trong tương lai như là lợi tức thực tế trong thời điểm hiện tại. Gần như ai tham gia kinh doanh cũng đoán định được mức độ rủi ro của những công cụ phái sinh theo cùng một phương pháp, được biết đến dưới cái tên "giá trị theo rủi ro". Nó tính toán xác suất để sự đầu tư có thể khiến bạn thua lỗ một khoản vượt một ngưỡng cụ thể nào đó. Chẳng hạn, nhà đầu tư có thể sẽ bằng lòng chấp nhận lỗ hàng triệu đô nếu xác suất xảy ra chuyện đó nhỏ hơn 5%, nhưng sẽ không đầu tư nếu có nhiều khả năng xảy ra hơn thế. Giống như phương trình Black-Scholes, giá trị theo rủi ro giả định rằng không có đuôi lớn. Có lẽ đặc điểm tồi tệ nhất là ở chỗ toàn bộ khu vực tài chính đã đánh giá các rủi ro của nó

bằng cách sử dụng chính xác cùng một phương pháp. Nếu như phương pháp này không chuẩn xác, nó sẽ tạo ra một ảo tưởng chung rằng rủi ro đang ở mức thấp trong khi thực tế thì nó lại cao hơn nhiều.

Đó là một vụ tai nạn chỉ còn chờ đợi để xảy ra, một nhân vật hoạt hình đã trượt khỏi mép vực một dặm và vẫn bị lơ lửng trong không trung chỉ vì anh ta thẳng thừng từ chối nhìn xuống xem cái gì ở dưới chân mình. Khi Poovey và nhiều người khác giống bà đã cảnh báo đi cảnh báo lại, các mô hình sử dụng để định giá các sản phẩm tài chính và đánh giá rủi ro của chúng đã kết hợp những giả thiết được đơn giản hóa, những thứ không biểu diễn chính xác thị trường thực tế và những nguy hiểm gắn với chúng. Những người tham gia thị trường tài chính lờ đi những cảnh báo ấy. Sáu năm sau, tất cả chúng ta đều thấy được tại sao đó lại là một sai lầm.

Có lẽ có cách nào đó khác tốt hơn.

Phương trình Black-Scholes làm thay đổi thế giới bằng cách tạo ra một ngành bùng nổ có giá trị hàng ngàn tỉ đôla; những tổng quát hóa của nó, được sử dụng một cách không thông minh bởi một nhóm phe phái các ngân hàng, đã làm thay đổi thế giới một lần nữa bằng cách đóng góp vào một vụ suy sụp tài chính hàng tỉ tỉ đôla, mà những ảnh hưởng cực kỳ tai hại của nó bây giờ mở rộng đến toàn bộ nền kinh tế của các quốc gia, và vẫn còn cảm nhận được trên phạm vi toàn cầu. Phương trình ấy thuộc về lĩnh vực toán học continumm cổ điển, có gốc gác trong các phương trình đạo hàm riêng của vật lý toán. Đó là một lĩnh vực trong đó các đại lượng có thể chia nhỏ vô hạn, thời gian trôi liên tục và các biến biến đổi trơn. Kỹ thuật ấy có hiệu lực trong vật lý toán, nhưng có vẻ

kém phù hợp hơn đối với thế giới tài chính, trong đó tiền xuất hiện dưới dạng các gói rời rạc, những giao dịch xảy ra mỗi cuộc một lần (mặc dù có thể rất nhanh), và rất nhiều biến có thể thay đổi một cách thất thường.

Phương trình Black-Scholes cũng dựa trên những giả định truyền thống của toán kinh tế: thông tin hoàn hảo, tính hợp lý hoàn hảo, cân bằng thị trường, luật cung và cầu. Chủ đề này đã được dạy trong nhiều thập kỷ, cứ như những giả định trên đều là tiên đề hết cả, và rất nhiều nhà kinh tế được đào tạo bài bản đã không bao giờ đặt câu hỏi về chúng. Nhưng chúng thiếu sự hỗ trợ từ thực nghiệm có tính thuyết phục. Trong rất ít trường hợp khi ai đó làm các thí nghiệm để quan sát xem người ta đã ra các quyết định về tài chính như thế nào, thì thấy những kịch bản cổ điển thường là thất bại. Cũng như câu chuyện của các nhà thiên văn, mặc dù họ đã dành hàng trăm năm trở lại đây để tính toán xem các hành tinh chuyển động thế nào dựa trên những cái mà họ cho là hợp lý, mà không nhìn xem họ đã thực sự làm gì.

Không phải lý thuyết cổ điển về kinh tế hoàn toàn sai. Nhưng nó sai lầm thường xuyên hơn những người khởi xướng nên nó khẳng định, và khi nó sai lầm, thì điều đó cực kỳ trầm trọng. Do vậy các nhà vật lý, các nhà toán học và các nhà kinh tế học đều muốn tìm kiếm những mô hình khác ưu việt hơn. Những mô hình hàng đầu sau những nỗ lực ấy đều dựa trên khoa học về sự phức hợp, một ngành mới của toán học thay thế cho tư duy continuum cổ điển bằng một tập hợp các tác nhân riêng rẽ, tương tác với nhau thông qua các luật cụ thể.

Chẳng hạn, một mô hình cổ điển mô tả sự vận động về giá của một mặt hàng nào đó, giả định rằng ở bất kỳ thời điểm

nào cũng có một mức giá "tốt", mà về nguyên tắc ai cũng biết rằng những người mua tương lai sẽ so sánh giá này với một hàm hữu ích (tức độ hữu ích của hàng hóa đó đối với họ) và sẽ mua nó nếu mức hữu ích vượt qua giá mua. Một mô hình hệ thống phức tạp thì rất khác. Nó có thể bao gồm, chẳng hạn, một ngàn tác nhân, mỗi tác nhân có quan điểm riêng về giá trị của hàng hóa và mức độ ham muốn sở hữu nó. Một số tác nhân có thể biết nhiều hơn những tác nhân khác, một số thì có thông tin chính xác hơn; nhiều tác nhân thuộc về một mạng lưới nhỏ buôn bán thông tin (chính xác hoặc không) cũng như tiền và hàng hóa vậy.

Một số đặc điểm thú vị đã đột sinh từ các mô hình như vậy. Một trong số đó là vai trò của bản năng bầy đàn. Những thương nhân thị trường thường có xu hướng sao chép từ những thương nhân thị trường khác. Nếu họ không làm thế, hóa ra những người khác đang hướng tới những thứ tốt đẹp hơn, và chủ nhân của họ sẽ không hài lòng. Mặt khác, nếu họ bước theo bầy đàn, và mọi người đều sai lầm, họ sẽ có một lý do tốt: đó là sai lầm mà mọi người khác cũng mắc phải. Phương trình Black-Scholes thật hoàn hảo đối với bản năng bầy đàn. Thực ra, hầu như mọi cuộc khủng hoảng kinh tế trong thế kỷ trước đều đã bị đẩy đến mức tột cùng bởi bản năng bầy đàn. Thay vì một số ngân hàng chỉ đầu tư vào bất động sản và những ngân hàng khác đầu tư vào sản xuất, thì ở đây *tất cả* đều lao vào bất động sản. Việc đó làm quá tải thị trường, vì quá nhiều tiền nhằm vào quá ít bất động sản, và thế là toàn bộ tan vỡ hết. Do vậy, giờ họ phải vội vã lao vào các khoản vay cho Brazil, hay cho Nga, hay quay trở lại với một thị trường bất động sản mới hồi sinh, hay nổi điên lên với các công ty.com những năm 2000 – ba đứa trẻ trong

phòng với một chiếc máy vi tính và một modem được định giá gấp mười lần giá trị của một nhà sản xuất lớn với một sản phẩm thật, những khách hàng thật, với những nhà máy và văn phòng có thật. Khi những thứ này thất bại, *tất cả* sẽ vội vã nhảy vào thị trường tín dụng thế chấp dưới chuẩn...

Những điều này không phải là giả thuyết. Thậm chí ngay khi hậu quả của cuộc khủng hoảng ngân hàng toàn cầu tác động trở lại thông qua đời sống của người dân thường, và sự loạng choạng của nền kinh tế các quốc gia, đã có những dấu hiệu cho thấy chưa ai học được bài học nào cả. Việc hoạt động trở lại của mốt các công ty dựa trên internet đang tiến triển, và giờ đây tập trung vào các website mạng xã hội: Facebook đã được định giá 100 tỉ đôla, và Twitter được định giá 8 tỉ đôla mặc dù nó chưa từng tạo ra lợi nhuận. Quỹ tiền tệ quốc tế (IMF) đã đưa ra một cảnh báo nghiêm trọng về các quỹ giao dịch chứng khoán (ETFs), một phương cách rất thành công để đầu tư vào những mặt hàng như dầu mỏ, vàng hay lúa mì mà không thực sự mua gì cả. Tất cả những quỹ đó đã làm cho giá cả tăng lên chóng mặt, mang lại lợi nhuận cao cho các quỹ hưu trí và những nhà đầu tư lớn khác, nhưng IMF đã cảnh báo rằng những phương tiện đầu tư như thế tất cả đều "được đóng dấu tiêu chuẩn cho một bong bóng chực vỡ... gợi nhớ lại những gì đã xảy ra trong thị trường được đảm bảo hóa trước khi xảy ra cuộc khủng hoảng". ETF rất ưa thích những công cụ phái sinh đã gây ra cuộc khủng hoảng tín dụng, nhưng được đảm bảo là cho hàng hóa chứ không phải là bất động sản. Cuộc tháo chạy tán loạn vào các ETF đã đẩy giá cả hàng hóa vượt trần, gây ra lạm phát vượt qua tất cả các tỉ lệ so với nhu cầu thực tế. Rất nhiều người trong thế giới thứ ba không thể có đủ điều kiện để mua thực phẩm thiết yếu bởi

vì những người đầu cơ trong các nước phát triển đang chơi một canh bạc lớn trên lúa mì. Cuộc lật đổ Hosni Mubarak tại Ai Cập ở một góc độ nào đó có nguyên nhân từ việc giá bánh mì tăng quá khủng khiếp.

Mối nguy chính yếu chính là ở chỗ các ETF đang bắt đầu được đóng gói thành những công cụ phái sinh khác nữa, giống như hợp đồng hoán đổi rủi ro tín dụng và nghĩa vụ nợ có thế chấp đã làm nổ tung bong bóng tín dụng thế chấp dưới chuẩn. Nếu bong bóng hàng hóa nổ, chúng ta có thể sẽ thấy sự sụp đổ một lần nữa: chỉ cần xóa cụm từ "bất động sản" đi và điền vào đó bằng cụm từ "hàng hóa". Giá cả các mặt hàng đều rất dễ thay đổi, vậy nên các ETF là những đầu tư có rủi ro cao – do đó không phải là một lựa chọn tuyệt vời cho một quỹ hưu trí. Như vậy, một lần nữa các nhà đầu tư lại được khuyến khích đặt những ván cược ngày càng phức tạp hơn, ngày càng nhiều rủi ro hơn, sử dụng tiền mà họ không phải mua cổ phần vào những thứ mà họ không muốn và không thể sử dụng, vào việc theo đuổi những lợi tức từ đầu cơ – trong khi những người muốn mua những thứ ấy không đủ khả năng để tiếp cận chúng.

Bạn chắc còn nhớ sàn giao dịch gạo ở Dojima chứ?

Kinh tế học không phải là lĩnh vực duy nhất để khám phá ra rằng những lý thuyết định giá cổ điển không còn vận hành được trong một thế giới ngày càng phức tạp, nơi mà những quy luật cũ không còn áp dụng được nữa. Một lĩnh vực khác đó là sinh thái học, ngành nghiên cứu những hệ tự nhiên như rừng rậm hay những rạn san hô. Thực tế, kinh tế học và sinh thái học ở nhiều khía cạnh lại giống nhau đến kỳ lạ. Một số mặt giống nhau chỉ là ảo tưởng: về mặt lịch sử, mỗi ngành

đều thường sử dụng ngành kia để biện hộ cho mô hình của mình, thay vì so sánh các mô hình với thế giới thực. Nhưng một số điểm giống nhau lại là thực: sự tương tác giữa số lượng lớn các cá thể là rất giống với những tương tác giữa một số lượng lớn những doanh nhân trong trị trường chứng khoán.

Sự giống nhau này có thể được sử dụng như một sự tương tự, trong trường hợp này điều đó thật nguy hiểm vì sự tương tự thường bị phá vỡ. Hay nó có thể được sử dụng như một nguồn cảm hứng, vay mượn các kỹ thuật lập mô hình từ sinh thái học và áp dụng chúng vào phiên bản đã sửa đổi cho phù hợp trong kinh tế học. Tháng 11 năm 2011, trên tạp chí Nature, Andrew Haldane và Robert May đã phác thảo một số khả năng[4]. Những luận điểm của họ củng cố cho một số thông điệp đã được nhắc đến trước đây trong chương này, và đề xuất các phương pháp để cải thiện sự ổn định của các hệ thống tài chính.

Haldane và May đã xét một khía cạnh của sự khủng hoảng tài chính mà tôi còn chưa đề cập tới: đó là các công cụ phái sinh ảnh hưởng tới sự ổn định của hệ thống tài chính như thế nào. Họ đã so sánh quan điểm chiếm ưu thế của các nhà kinh tế học chính thống, những người giữ vững ý kiến cho rằng thị trường sẽ tự động tìm kiếm một điểm cân bằng ổn định, với một quan điểm tương tự trong sinh thái học những năm 1960, cho rằng “sự cân bằng của tự nhiên” có xu hướng giữ cho hệ sinh thái ổn định. Thực tế, ở thời kỳ đó, rất nhiều nhà sinh thái học nghĩ rằng bất kỳ một hệ sinh thái đủ phức tạp nào cũng sẽ ổn định theo cách đó, và dáng điệu bất ổn định, như những dao động kéo dài, ngụ ý rằng hệ thống đang xét là chưa đủ phức tạp. Trong chương 16 chúng ta đã thấy rằng

điều này không chính xác. Thực tế, những hiểu biết hiện nay cho thấy kết quả là hoàn toàn ngược lại. Giả sử có một số lượng lớn các loài tương tác trong một hệ sinh thái. Khi mạng lưới các tương tác sinh thái trở nên phức tạp hơn thông qua những mối liên kết mới xuất hiện giữa các loài, hay những tương tác trở nên mạnh mẽ hơn, thì sẽ có một ngưỡng rạch ròi mà bên ngoài nó hệ sinh thái không còn ổn định nữa. (Ở đây hỗn độn cũng được coi như là ổn định; những thăng giáng có thể xảy ra với điều kiện chúng vẫn còn ở trong một giới hạn nhất định.) Khám phá này đưa các nhà sinh thái học tới việc tìm kiếm các loại mạng lưới tương tác đặc biệt, dẫn tới sự ổn định một cách khác thường.

Liệu có thể chuyển những khám phá trong sinh thái học này sang lĩnh vực tài chính toàn cầu hay không? Có những mối tương tự rất gần gũi, trong đó thức ăn hay năng lượng trong sinh thái học tương ứng với tiền trong một hệ thống tài chính. Haldane và May đã ý thức được rằng không nên sử dụng mối tương tự này trực tiếp, với lưu ý rằng: "Trong các hệ sinh thái tài chính, các lực lượng tiến hóa thường sống sót là những kẻ lớn nhất chứ không phải những kẻ phù hợp nhất với môi trường". Họ đã quyết định xây dựng các mô hình tài chính không phải bằng cách bắt chước các mô hình sinh thái học, mà bằng cách lợi dụng những nguyên lý lập mô hình tổng quát đã từng dẫn tới những hiểu biết tốt hơn về các hệ sinh thái.

Họ đã phát triển một số mô hình kinh tế, chỉ ra trong từng trường hợp rằng trong những hoàn cảnh thích hợp, hệ thống kinh tế sẽ trở nên bất ổn. Các nhà sinh thái học xử lý một hệ sinh thái bất ổn định bằng cách chế ngự nó theo cách tạo ra sự ổn định. Các nhà dịch tễ học cũng đã làm như vậy khi

xuất hiện dịch bệnh; ví dụ, năm 2001, chính phủ Anh đã phát triển chính sách kiểm soát dịch lở mồm long móng bằng cách nhanh chóng tiêu hủy gia súc tại các trang trại ở gần những vùng đã được khẳng định dương tính với bệnh dịch, và dừng tất cả việc vận chuyển gia súc khắp đất nước. Tương tự, câu trả lời của những người điều hành chính phủ đối với một hệ thống tài chính không ổn định là phải có những hành động để bình ổn nó. Ở một chừng mực nào đó, họ hiện cũng đang làm như thế sau cơn hoảng loạn lúc ban đầu khi họ đã ném đi một lượng khổng lồ tiền thuế của người dân vào các ngân hàng, nhưng lại quên không áp đặt các điều kiện ngoài những hứa hẹn mơ hồ, mà chắc chắn sẽ không giữ được.

Tuy nhiên, những điều chỉnh mới mẻ đã gần như hoàn toàn thất bại trong việc giải quyết vấn đề thực sự, đó là thiết kế quá ư yếu kém của chính bản thân hệ thống tài chính. Điều kiện thuận lợi để chuyển những khoản tiền hàng tỉ đôla chỉ sau một cú nhấp chuột có thể sẽ cho phép đạt được những lợi nhuận còn nhanh hơn thế, nhưng nó cũng cho phép những cơn sốc truyền nhanh hơn, và càng khuyến khích làm tăng độ phức tạp. Cả hai điều đó đều gây mất ổn định. Thất bại trong việc đánh thuế những giao dịch tài chính cho phép các thương nhân khai thác tốc độ đang gia tăng này bằng cách đặt cược lớn hơn vào thị trường, với một tốc độ nhanh hơn. Chính điều đó cũng có xu hướng tạo ra sự bất ổn. Các kỹ sư đều biết rằng cách để nhận được một đáp ứng nhanh chóng là sử dụng một hệ thống bất ổn định: tính ổn định, theo định nghĩa là một cản trở bẩm sinh đối với sự thay đổi, trong khi một đáp ứng nhanh chóng đòi hỏi điều ngược lại. Do vậy việc đi tìm lợi nhuận ngày một lớn hơn chính là nguyên nhân làm cho hệ thống tài chính tiến hóa ngày càng bất ổn hơn.

Tiếp tục xây dựng dựa trên sự tương tự với các hệ sinh thái, Haldane và May đã giới thiệu một số ví dụ cho biết tính ổn định có thể được cải thiện như thế nào. Một số ví dụ tương ứng với bản năng riêng của những cơ quan điều hành, như đòi hỏi các ngân hàng phải nắm giữ nhiều vốn hơn, làm đệm giúp họ chống lại những cú sốc. Một số khác thì không; một ví dụ là đề xuất rằng nhà điều hành không nên tập trung vào các rủi ro liên quan đến từng ngân hàng riêng biệt, mà vào những ngân hàng liên quan tới toàn bộ hệ thống tài chính. Độ phức tạp của thị trường phái sinh có thể được giảm thiểu bằng cách yêu cầu mọi giao dịch đều phải thông qua cơ quan thanh toán bù trừ tập trung. Việc này cần phải làm cực kỳ mạnh mẽ, phải được ủng hộ bởi tất cả các nước lớn, nhưng nếu thực hiện được thì việc lan truyền các cú sốc sẽ bị hãm lại.

Một đề xuất khác là tăng tính đa dạng của các phương pháp giao thương và định giá rủi ro. Một hệ sinh thái độc canh rất bất ổn định vì bất kỳ cú sốc nào xảy ra cũng gần như ảnh hưởng tới mọi thứ một cách đồng thời, theo cùng một cách. Khi tất cả các ngân hàng cùng sử dụng một phương pháp định giá rủi ro, thì cùng một vấn đề sẽ nảy sinh: khi họ mắc sai lầm, họ sẽ mắc sai lầm ở cùng một thời điểm. Cuộc khủng hoảng tài chính toàn cầu nổ ra một phần cũng bởi vì tất cả các ngân hàng chính đều nuôi dưỡng những khoản nợ tiềm tàng của họ theo cùng một cách, định giá giá trị tài khoản của họ theo cùng một cách, và định giá rủi ro có thể xảy ra với họ cũng theo cùng một cách.

Đề xuất cuối cùng đó là tính đơn nguyên (*modularity*). Người ta nghĩ rằng các hệ sinh thái tự làm ổn định mình bằng cách tổ chức (thông qua sự tiến hóa) thành các đơn nguyên

(*module*) khá độc lập, chúng kết nối với nhau một cách khá đơn giản. Tính đơn nguyên giúp ngăn chặn sự lan truyền của các cú sốc. Điều này giải thích tại sao các nhà điều hành trên toàn cầu đang xem xét một cách nghiêm túc việc phá vỡ các ngân hàng lớn và thay thế chúng bằng nhiều ngân hàng nhỏ hơn. Cũng như Alan Greenspan, một nhà kinh tế học Mỹ nổi tiếng, cựu chủ tịch Cục dự trữ liên bang Mỹ đã nói về các ngân hàng: “Nếu chúng đã quá lớn để không thể thất bại, thì tức là chúng đã quá đồ sộ rồi”.

Vậy có nên đổ lỗi cho một phương trình vì những đổ vỡ về tài chính không?

Một phương trình chỉ là một công cụ, và cũng giống như bất kỳ công cụ nào khác, nó phải được dùng bởi những người biết cách sử dụng nó, và sử dụng với mục đích đúng đắn. Phương trình Black-Scholes có thể đã góp phần vào những đổ vỡ ấy, nhưng chỉ bởi vì nó đã bị lạm dụng. Trách nhiệm của nó đối với thảm họa này không thể lớn hơn chiếc máy tính của một thương nhân nếu việc sử dụng nó gây ra những tổn thất nghiêm trọng. Những người có trách nhiệm trong việc sử dụng các công cụ nên ngừng đổ lỗi thất bại cho chúng. Có nguy cơ khu vực tài chính có thể sẽ quay lưng lại với những phân tích toán học, khi những thứ mà nó thực sự cần là một phạm vi các mô hình phù hợp hơn, và quan trọng là, một hiểu biết chắc chắn hơn về giới hạn của chúng. Hệ thống tài chính quá phức tạp để có thể vận hành trên những linh cảm và suy đoán mơ hồ của con người. Nó thực sự cần *nhiều* phân tích toán học hơn, chứ không phải ít đi. Nhưng cũng cần phải học cách sử dụng toán học một cách thông minh, chứ không phải như một thứ bùa chú ma thuật.

Tiếp theo sẽ là gì?

Khi một ai đó viết ra một phương trình thì đừng nghĩ rằng sẽ có một cú sét bất thình lình và sau đó mọi chuyện sẽ trở nên khác. Đa số các phương trình đều ít hoặc không có tác dụng gì (hãy tin tôi đi, ngày nào mà tôi chả viết ra chúng, tôi biết chứ). Nhưng ngay cả những phương trình vĩ đại nhất và có ảnh hưởng nhất cũng cần phải được giúp đỡ để làm thay đổi thế giới – đó là tìm ra cách có hiệu quả để giải chúng, con người giàu trí tưởng tượng và có đủ nghị lực để khai thác những điều mà các phương trình ấy nói với chúng ta, rồi các máy móc, nguồn lực, vật liệu và cả tiền bạc nữa. Hãy nhớ rằng, các phương trình đã nhiều lần mở ra các hướng mới cho nhân loại, và có tác dụng như những người dẫn đường của chúng ta khi chúng ta khám phá chúng.

Phải có nhiều hơn 17 phương trình mới đưa chúng ta đến được nơi mà chúng ta đang sống hôm nay. Danh sách của tôi là sự lựa chọn một số phương trình có ảnh hưởng nhất và mỗi phương trình đó đòi hỏi phải có rất nhiều các phương trình khác trước khi nó trở nên thực sự hữu ích. Nhưng tất cả 17 phương trình đều xứng đáng có mặt trong danh sách bởi vì chúng đều đóng vai trò then chốt trong lịch sử. Phương trình Pythagor đã dẫn tới những phương pháp thực tiễn để trắc đạc đất đai của chúng ta và dẫn đường cho chúng ta tới những vùng đất mới. Phương trình Newton cho chúng ta biết

các hành tinh chuyển động như thế nào và làm thế nào gửi các con tàu thăm dò vào không gian để khám phá chúng. Các phương trình Maxwell cung cấp một đầu mối quan trọng dẫn tới máy thu thanh, TV và các phương tiện truyền thông hiện đại. Shannon đã rút ra những hạn chế không tránh khỏi để giúp cho các phương tiện truyền thông trở nên hiệu quả.

Thường thì cái mà một phương trình dẫn tới hoàn toàn khác với cái mà các nhà sáng chế và phát minh quan tâm. Vào thế kỷ 15, ai có thể dự báo được rằng một con số gây bối rối, rõ ràng là bất khả mà người ta vấp phải khi giải các phương trình đại số lại liên kết một cách khăng khít với một thế giới thậm chí còn gây bối rối và rõ ràng bất khả hơn của vật lý lượng tử – chưa nói tới chuyện nó đã lát đường tới những dụng cụ kỳ diệu có thể giải được cả triệu phương trình đại số trong một giây, và cho phép chúng ta nhìn và nghe thấy tức thì những người bạn ở phía bên kia của hành tinh? Fourier sẽ phản ứng như thế nào nếu ông được cho biết rằng phương pháp mới của ông để nghiên cứu sự truyền nhiệt có thể được cài đặt trong các máy có kích thước chỉ bằng một cỗ bài lá mà lại có khả năng vẽ một cách chi tiết và cực kỳ chính xác bất cứ thứ gì nó được chỉ dẫn – cả về màu sắc, thậm chí cả chuyển động nữa với hàng ngàn các hình như thế được chứa trong một thứ có kích thước chỉ bằng một đồng xu?

Các phương trình khởi phát các sự kiện, và nói theo nguyên Thủ tướng Anh Harold Macmillan thì các sự kiện là cái giữ chúng ta thức suốt đêm. Khi một phương trình có tính cách mạng được tung ra, nó sẽ phát triển một đời sống riêng của nó. Những hệ quả có thể tốt hoặc xấu, thậm chí khi ý định ban đầu là hết sức nhân từ, như tất cả 17 phương trình của tôi. Vật

lý mới của Einstein cho chúng ta một sự hiểu biết mới về thế giới nhưng chúng ta lại sử dụng một trong những kết quả của nó để chế tạo ra các vũ khí hạt nhân. Tuy nó không trực tiếp như huyền thoại phổ biến tuyên bố, nhưng nó cũng đóng một vai trò trong đó. Phương trình Black-Scholes đã tạo ra một khu vực tài chính sôi động, nhưng rồi sau đó lại đe dọa phá hủy nó. Các phương trình là cái mà chúng ta tạo nên, còn thế giới thì có thể thay đổi theo chiều hướng xấu đi hoặc tốt lên theo chúng.

Các phương trình xuất hiện theo nhiều loại. Một số là các chân lý toán học, các hằng đúng: ví dụ như logarit của Napier. Nhưng các hằng đúng còn có thể là sự trợ giúp rất mạnh cho tư duy và nhu cầu của con người. Một số là những phát biểu về thế giới vật lý, mà theo tất cả những gì chúng ta biết thì chúng có thể khác nhau. Các phương trình thuộc loại này nói với chúng ta về các định luật của tự nhiên, và việc giải chúng cho chúng ta biết những hệ quả của các định luật đó. Một phương trình khác thì có cả hai yếu tố: phương trình Pythagor là một định lý của hình học Euclid, nhưng nó cũng chi phối các phép đo của các nhà trắc đạc cũng như của các nhà hàng hải. Một số nữa chỉ tốt hơn định nghĩa chút ít – nhưng số ảo i và thông tin nói với chúng ta rất nhiều điều một khi chúng ta đã định nghĩa nó.

Một số phương trình có giá trị phổ quát. Một số lại mô tả thế giới rất chính xác, nhưng không hoàn hảo. Một số kém chính xác hơn, hạn chế trong những lãnh địa giới hạn hơn, nhưng lại cho những nhận thức sâu sắc vô cùng quan trọng. Một số về cơ bản là sai, nhưng chúng lại có tác dụng như là bàn đạp để chuyển tới một cái gì đó tốt hơn. Chúng vẫn có thể có tác dụng to lớn.

Thậm chí một số còn mở ra những câu hỏi khó – thực chất là triết học – về thế giới chúng ta đang sống và vị trí của chính chúng ta trong thế giới đó. Vấn đề đo lượng tử, được bi kịch hóa bằng con mèo đáng thương của Schrödinger, là một vấn đề như vậy. Nguyên lý hai của nhiệt động lực học cũng đặt ra những vấn đề sâu xa về hỗn loạn và mũi tên thời gian. Trong cả hai trường hợp, một số nghịch lý biểu kiến có thể được giải quyết, một phần, bằng cách tư duy ít hơn về nội dung của phương trình và nhiều hơn về bối cảnh trong đó nó được áp dụng. Không phải về các ký hiệu mà về các điều kiện biên. Mũi tên thời gian không phải là vấn đề về entropy: nó là vấn đề về bối cảnh mà trong đó chúng ta *tư duy* về entropy.

Những phương trình hiện có cũng có thể có tầm quan trọng mới. Việc tìm kiếm năng lượng nhiệt hạch, như một phương án thay thế sạch cho năng lượng phân hạch và nhiên liệu hóa thạch, đòi hỏi phải có hiểu biết về chuyển động trong từ trường của khí cực nóng tạo thành plasma. Các nguyên tử của khí này mất electron và trở nên tích điện. Như vậy, đây là vấn đề thuộc lĩnh vực từ thủy động lực học, đòi hỏi phải kết hợp các phương trình hiện có cho dòng chất lưu và cho điện từ trường. Sự kết hợp này sẽ dẫn tới các hiện tượng mới gợi ý cách giữ ổn định plasma ở những nhiệt độ cần thiết để tạo ra các phản ứng nhiệt hạch. Các phương trình đã cũ nhưng vẫn được ưa chuộng.

Có (hoặc có thể có) một phương trình mà các nhà vật lý và vũ trụ học mỏi mắt trông chờ hơn hết thảy để được chạm tay vào, đó là lý thuyết của vạn vật (*theory of everything*) mà ở thời Einstein được gọi là lý thuyết trường thống nhất. Đó là một phương trình được trông chờ từ lâu nhằm thống nhất cơ

học lượng tử và thuyết tương đối, Einstein đã dành hết những năm tháng cuối đời của mình để tìm kiếm nhưng không thành công. Cả hai lý thuyết này đều thành công, nhưng là thành công ở hai địa hạt khác nhau: thế giới vô cùng bé và thế giới vô cùng lớn. Khi hai lý thuyết này xen phủ nhau thì chúng lại không tương thích. Ví dụ, cơ học lượng tử là tuyến tính, nhưng thuyết tương đối thì không. Cái mà người ta mong muốn là một phương trình giải thích được tại sao cả hai lại cực kỳ thành công, nhưng lại thực hiện được công việc riêng của chúng mà không có mâu thuẫn về logic. Có nhiều ứng viên cho lý thuyết của vạn vật, nổi tiếng nhất là lý thuyết dây. Ngoài những thứ khác, lý thuyết này còn đưa vào các chiều dư của không gian: 6 trong một phiên bản và 7 trong một số phiên bản khác. Dây rất đẹp về mặt toán học, nhưng không có bằng chứng thuyết phục nào về chúng như một sự mô tả của tự nhiên. Trong mọi trường hợp, cực khó thực hiện những tính toán cần thiết để rút ra những tiên đoán định lượng từ lý thuyết dây.

Theo tất cả những gì chúng ta biết thì không thể có một lý thuyết của vạn vật. Tất cả các phương trình của chúng ta mô tả thế giới vật lý có lẽ chỉ là các mô hình quá đơn giản, chúng chỉ mô tả được những địa hạt giới hạn của tự nhiên theo cách mà chúng ta có thể hiểu được, chứ chưa nắm bắt được cấu trúc sâu xa của thực tại. Ngay cả nếu tự nhiên có thực sự tuân theo các định luật chặt chẽ đi nữa, thì các định luật này cũng không thể được diễn đạt như các phương trình.

Và ngay cả nếu các phương trình là quan yếu đi nữa thì chúng cũng không cần thiết phải đơn giản. Chúng có thể phức tạp đến mức chúng ta thậm chí không thể viết ra được.

Ba tỉ các bazơ của ADN trong bộ gen con người, theo một nghĩa nào đó, là một phần của phương trình con người. Chúng là các tham số có thể được chèn vào một phương trình tổng quát hơn mô tả sự phát triển sinh học. Có thể in bộ gen ra giấy và phải cần tới 2000 cuốn sách với kích thước bằng cuốn sách này, hoặc nó có thể nằm trọn trong bộ nhớ của máy tính một cách dễ dàng. Nhưng đó mới chỉ là một phần nhỏ của bất kỳ phương trình giả thuyết nào của con người.

Khi các phương trình trở nên phức tạp như thế, chúng ta cần có sự trợ giúp. Máy tính sẽ trích xuất ra các phương trình từ những tập hợp lớn dữ liệu, trong những hoàn cảnh mà các phương pháp thông thường của con người thất bại hoặc quá mù mờ không sử dụng được. Một cách tiếp cận mới gọi là tính toán tiến hóa trích xuất ra những hình mẫu quan trọng: đặc biệt là các công thức cho các đại lượng bảo toàn – những thứ không bao giờ thay đổi. Một hệ thống như vậy gọi là Eureqa, do Michael Schmidt và Hod Lipson đề xuất, đã thu được một số thành công. Phần mềm giống như thế có thể trợ giúp, hoặc nó có thể chẳng đưa tới điều gì thực sự quan trọng.

Một số nhà khoa học, đặc biệt là những người có nền tảng về máy tính, nghĩ rằng đã đến lúc chúng ta phải vứt bỏ tất cả các phương trình truyền thống, đặc biệt là các phương trình *continuum* như các phương trình vi phân thường và đạo hàm riêng. Tương lai sẽ là gián đoạn, nó xuất hiện dưới dạng các số nguyên; và các phương trình sẽ nhường chỗ cho các thuật toán – những thủ tục tính toán mọi thứ. Thay vì giải các phương trình, chúng ta sẽ mô phỏng thế giới theo kiểu số hóa bằng cách cho chạy các thuật toán. Thực tế, bản thân

thế giới đã *là* thế giới số. Stephen Wolfram đã xét một trường hợp theo quan điểm này trong cuốn sách đầy tranh cãi nhan đề *Một loại khoa học mới (A New Kind of Science)*, cuốn sách bênh vực một loại hệ phức tạp gọi là *máy tự động tế bào* (cellular automaton). Đó là một mạng các tế bào, thường là các hình vuông nhỏ, mỗi cái tồn tại trong một tập hợp lớn các trạng thái khác nhau. Các tế bào này tương tác với các tế bào lân cận theo các quy tắc xác định. Chúng cũng tương tự như trò chơi trên máy tính vào những năm 80, với các khối màu đuổi bắt nhau trên màn hình.

Wolfram đưa ra một số nguyên nhân giải thích tại sao các máy tự động tế bào lại ưu việt hơn các phương trình toán học truyền thống. Đặc biệt, một số trong chúng có thể thực hiện bất kỳ tính toán nào mà một máy tính có thể thực hiện, đơn giản nhất là máy Rule 110 nổi tiếng. Nó có thể tìm được các chữ số liên tiếp của số π, giải được các phương trình ba vật bằng số, thực hiện đầy đủ công thức Black-Scholes cho một quyền chọn mua – nghĩa là hầu như tất cả. Các phương pháp truyền thống để giải phương trình hạn chế hơn nhiều. Tôi không thấy luận cứ đó thuyết phục lắm, bởi vì thực ra bất kỳ một máy tự động tế bào nào cũng có thể mô phỏng được bởi một hệ động lực truyền thống. Nhưng điều quan trọng không phải là một hệ toán học này có thể mô phỏng hệ toán học khác hay không, mà là cách hiệu quả nhất để giải các phương trình hay cung cấp sự hiểu biết sâu sắc. Và thực tế việc tính tổng của chuỗi biểu diễn số π bằng tay nhanh hơn là tính cùng số các chữ số của nó bằng cách dùng máy Rule 110.

Tuy nhiên, vẫn hoàn toàn có thể tin rằng chẳng bao lâu nữa chúng ta sẽ có thể tìm thấy các định luật mới của tự

nhiên dựa trên các cấu trúc và hệ thống số, gián đoạn. Tương lai có thể gồm các thuật toán, chứ không phải các phương trình. Nhưng cho tới ngày đó, nếu có, những hiểu biết sâu sắc vĩ đại nhất của chúng ta về các quy luật của tự nhiên vẫn phải có dạng các phương trình, và chúng ta còn phải học để hiểu và đánh giá được chúng. Các phương trình đã có nhiều thành tích trong quá khứ. Chúng thực sự đã làm thay đổi thế giới – và chúng vẫn sẽ tiếp tục làm thay đổi nó.

Chú thích

Chương 1

1 *Cuốn sách về những điều kỳ lạ và thú vị trong toán học của Penguin* của David Wells đã trích dẫn dưới dạng rút gọn của câu chuyện đùa: Một vị thủ lĩnh người Ấn Độ có ba người vợ chuẩn bị sinh nở, một người trên một tấm da trâu, một trên một tấm da gấu, và người cuối cùng trên tấm da hà mã. Theo đúng trình tự, người đầu tiên sinh cho ông một người con trai, người thứ hai sinh một người con gái, và người cuối cùng, sinh đôi, một trai một gái, bởi vậy câu chuyện này có thể dùng minh họa cho định lý Pythagor nổi tiếng với lý do rằng người đàn bà sinh nở trên tấm da hà mã thì bằng hai người đàn bà trên hai tấm da kia cộng lại. Câu chuyện vui này có lẽ đã xuất hiện chí ít từ giữa những năm 50 của thế kỷ trước, được phát trên đài BBC trong chương trình "My Word", được dàn dựng bởi hai nhà viết kịch bản hài là Frank Muir và Denis Norden.

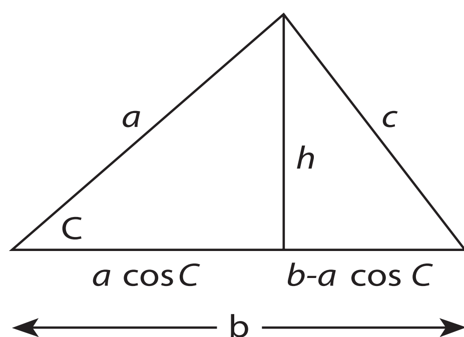
2 Trích dẫn mà không có nguồn tham khảo từ

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html

3 A. Sachs, A. Goetze, and O. Neugebauer. *Mathematical Cuneiform Texts*,

American Oriental Society, New Haven 1945.

4 Hình vẽ được nhắc lại để tiện dùng, hình 60:



Hình 60 Chia một tam giác thành hai tam giác vuông.

Đường cao chia cạnh *b* thành hai phần. Áp dụng lượng giác, một phần có độ dài là $a\cos C$, do vậy cạnh còn lại sẽ có độ dài là $b-a\cos C$. Gọi *h* là độ dài đường cao. Theo định lý Pythagor:

$$a^2 = h^2 + (a\cos C)^2$$
$$c^2 = h^2 + (b - a\cos C)^2$$

tức là,

$$a^2 - h^2 = a^2\cos^2 C$$
$$c^2 - h^2 = (b - a\cos C)^2 = b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos 2C$$

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất; thành phần không mong muốn h^2 sẽ bị triệt tiêu. Thành phần $a^2\cos^2 C$ cũng vậy, và chúng ta được:

$$c^2 - a^2 = b^2 - 2ab\cos C$$

phương trình này sẽ dẫn đến công thức được phát biểu ở trên.

Chương 2

1 http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html

2 Trích từ lá thư John Marr viết cho William Lilly.

3 Phương pháp *Prosthapheiresis* dựa trên một công thức lượng giác được phát minh bởi François Viète, đó là

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{2}$$

Nếu bạn có một bảng giá trị của sin, công thức trên sẽ cho phép bạn tính bất kỳ tích lượng giác nào mà chỉ sử dụng tổng, hiệu và phép chia cho 2.

Chương 3

1 Keynes chưa bao giờ giảng bài đó. Hội Hoàng gia đã có dự định kỷ niệm 300 năm Newton vào năm 1942, nhưng Thế chiến thứ II đã xảy ra, do vậy lễ kỷ niệm đã phải hoãn lại cho tới 1946. Những người thuyết trình bao gồm các nhà vật lý Edward da Costa Andrade và Niels Bohr, và hai nhà toán học Herbert Turnbull và Jacques Hadamard. Hội Hoàng gia cũng mời Keynes, người có hứng thú với các bản thảo của Newton cũng như với kinh tế. Ông đã viết một bài giảng với nhan đề "Newton, người đàn ông ấy", nhưng ông đã mất trước khi lễ kỷ niệm này diễn ra. Anh trai của ông là Geoffrey đã đọc bài giảng thay mặt ông.

2 Câu này xuất phát từ một lá thư mà Newton viết cho Hooke năm 1676. Nó không mới: năm 1159, John ở Salisbury đã viết: "Bernard ở Chartres thường nói rằng chúng ta giống như những chú lùn đứng trên vai những người khổng lồ, do vậy chúng ta có thể nhìn xa hơn họ". Cho tới thế kỷ 17 nó đã trở thành một câu nói quen thuộc.

3 Phép chia cho 0 dẫn tới những phép chứng minh ngụy biện. Chẳng hạn, chúng ta có thể "chứng minh" rằng mọi con số đều bằng 0. Giả sử rằng $a = b$. Do đó $a^2 = ab$ nên $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Phân tích thành nhân tử ta được $(a + b)(a - b) = b(a - b)$. Chia cả hai vế cho $(a - b)$ suy ra $a + b = b$. Bởi

vậy $a = 0$. Sai lầm ở đây là phép chia cho $(a - b)$, số bằng 0, vì ta đã giả sử $a = b$.

4 Richard Westfall. *Never at Rest*, Cambridge University Press, Cambridge 1980, p. 425.

5 Erik H. Hauri, Thomas Weinreich, Alberto E. Saal, Malcolm C. Rutherford, and James A. Van Orman. *High pre-eruptive water contents preserved in lunar melt inclusions*, Science Online (26 May 2011) 1204626. [DOI:10.1126/science.1204626]. Kết quả của họ đã gây nhiều tranh cãi.

6 Tuy nhiên, đây không phải một sự trùng hợp. Nó áp dụng được cho tất cả các hàm số khả vi: những hàm có đạo hàm liên tục. Những hàm số này bao gồm tất cả các đa thức và chuỗi lũy thừa hội tụ, như logarit, hàm số mũ và các hàm lượng giác khác.

7 Định nghĩa hiện đại như sau: một hàm số $f(h)$ tiến tới giới hạn L khi h tiến tới 0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(h) - L| < \varepsilon$ nếu $|h| < \delta$. Sử dụng tính chất với mọi $\varepsilon > 0$ bất kỳ giúp chúng ta tránh phải viện đến bất kỳ thứ gì trôi hay trở nên nhỏ hơn: nó xử lý tất cả các giá trị khả dĩ chỉ trong một bước.

Chương 4

1 Sách Sáng Thế đã dẫn về "bầu trời". Hầu hết các học giả tin rằng điều này được dẫn ra từ đức tin Do Thái rằng các vì sao là các đốm sáng nhỏ gắn cố định trên mái vòm của Thiên đàng, có hình dạng như một bán cầu. Đó chính là hình dạng khi nhìn bầu trời đêm: cách chúng ta trực quan hóa cảm nhận tương ứng với những vật ở xa khiến các vì sao trông giống như cùng cách chúng ta một khoảng vậy.

Rất nhiều nền văn hóa, đặc biệt là Trung và Viễn đông, đều coi thiên đàng như một cái bát quay chậm.

2 Sao chổi lớn xuất hiện năm 1577 không phải là sao chổi Halley mà là một sao chổi khác rất quan trọng về mặt sử học, ngày nay được gọi là C/1577 V1. Nó có thể quan sát bằng mắt thường vào năm 1577 trước công nguyên. Brahe đã quan sát sao chổi này và đưa ra kết luận rằng các sao chổi nằm ngoài khí quyển của Trái đất. Sao chổi này hiện tại cách Mặt Trời khoảng 24 tỉ kilomet.

3 Con số này chưa được biết cho đến năm 1798, khi Henry Cavendish thu được một kết quả chính xác nhất có thể trong một thí nghiệm thực hiện trong phòng thí nghiệm. Nó vào khoảng $6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

4 June Barrow-Green. *Poincaré và bài toán ba vật (Poincaré and the Three Body Problem,)*, American Mathematical Society, Providence 1997.

Chương 5

1 Năm 1535, hai nhà toán học Antonio Fior và Niccolò Fontana (biệt danh Tartaglia, "người nói lắp") đã tham gia vào một cuộc đấu tay đôi công khai. Họ đưa cho nhau các phương trình bậc ba để thách giải, và Tartaglia đã đánh bại Fior một cách thuyết phục. Ở thời đó, các phương trình bậc ba được phân thành ba loại riêng biệt, bởi vì các số âm vẫn chưa được tìm ra. Fior chỉ biết cách giải một loại trong số đó; ban đầu Tartaglia chỉ biết giải một loại khác, nhưng không lâu trước khi cuộc đấu diễn ra, ông đã khám phá ra cách giải tất cả các dạng còn lại. Ông đã đưa cho Fior chỉ những loại phương trình mà ông biết chắc Fior không thể giải được.

Cardano, lúc đó đang viết một cuốn sách về đại số, nghe tin về cuộc đấu và biết rằng Fior và Tartaglia đã giải được các phương trình bậc ba. Khám phá này chắc hẳn sẽ nâng cuốn sách của ông lên một tầm cao mới, do vậy Cardano đã thỉnh cầu Tartaglia tiết lộ các phương pháp của mình.

Cuối cùng thì Tartaglia cũng tiết lộ bí mật, và sau đó đã yêu cầu Cardano thề không được công bố. Nhưng phương pháp giải cũng đã xuất hiện trong *Ars Magna*, do đó Tartaglia đã buộc tội Cardano đạo văn. Tuy nhiên, Cardano đã xin lỗi và ông ta cũng tìm được một lý do chính đáng để chối quanh lời hứa của mình. Học trò của Cardano, Lodovico Ferrari đã tìm được phương pháp giải phương trình bậc bốn, một khám phá đầy mới lạ và ấn tượng không kém, và Cardano muốn phương pháp ấy cũng xuất hiện trong cuốn sách của mình. Tuy nhiên, phương pháp của Ferrari cũng đòi hỏi biết nghiệm của một phương trình bậc ba có liên quan, do vậy Cardano không thể công bố công trình của Ferrari mà không công bố công trình của Tartaglia.

Sau đó, ông ta biết rằng Fior là học trò của Scipio del Ferro, người được đồn là đã giải được tất cả các loại phương trình bậc ba, nhưng chỉ truyền lại cách giải một loại cho Fior. Các bài báo không công bố của del Ferro lại thuộc quyền sở hữu của Annibale del Nave. Vì thế, năm 1543, Cardano và Ferrari đã đến Bologna để thuyết phục del Nave, và trong những bài báo ấy, họ đã tìm ra phương pháp giải cả ba loại phương trình bậc ba. Do đó, Cardano có thể nói một cách trung thực rằng ông ta đã công bố phương pháp của del Ferro, chứ không phải của Tartaglia.

Tartaglia vẫn cảm thấy mình đã bị lừa bịp, và đã công bố một bài dài phê phán quyết liệt Cardano. Ferrari đã thách thức ông tham gia một cuộc tranh biện công khai và đã dễ dàng dành chiến thắng. Kể từ đó, Tartaglia đã không thể khôi phục danh tiếng của mình.

Chương 6

1 Được tổng hợp lại ở chương 12 trong cuốn: Ian Stewart, *Toán học của cuộc sống (Mathematics of Life)*, Profile, London, 2011.

Chương 7

1 Phải, tôi biết rằng đây là số nhiều của "die", nhưng ngày nay tất cả mọi người đều sử dụng nó ở dạng số ít, và tôi đã từ bỏ việc chống lại xu hướng đó. Nó có thể còn tồi tệ hơn: ai đó vừa mới cẩn thận gửi cho tôi một email sử dụng "dice" cho số ít và "die" cho số nhiều.

2 Có nhiều ngụy biện trong lập luận của Pascal. Sai lầm chính nằm ở chỗ nó có thể áp dụng được cho bất kỳ thế lực siêu nhiên mang tính giả thuyết nào.

3 Định lý này khẳng định rằng dưới những điều kiện phù hợp (khá chung), tổng của một số lượng lớn các biến ngẫu nhiên sẽ xấp xỉ phân bố chuẩn. Chính xác hơn, nếu ($x_1,\ldots, x_n$) là một dãy các biến ngẫu nhiên phân bố đồng nhất và độc lập với nhau và đều có phân bố chuẩn, mỗi biến có kỳ vọng μ và phương sai σ^2, thì định lý giới hạn trung tâm khẳng định rằng

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu\right)$$

sẽ hội tụ về một phân bố chuẩn với kỳ vọng bằng 0 và độ lệch chuẩn σ khi *n* lớn tùy ý.

Chương 8

1 Hãy xét ba khối lượng liên tiếp, được đánh số $n-1$, n, $n+1$. Giả sử rằng ở thời điểm *t* chúng đã dịch chuyển được một khoảng, $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ so với các vị trí ban đầu theo phương ngang. Áp dụng định luật hai Newton, gia tốc của mỗi vật sẽ tỉ lệ thuận với các lực tác dụng lên nó. Để đơn giản, giả sử rằng mỗi vật sẽ chuyển động được một khoảng cách rất nhỏ theo phương thẳng đứng. Với một phép gần đúng rất tốt, lực mà vật $n-1$ tác dụng lên vật *n* sẽ tỉ lệ với hiệu $u_{n-1}(t) - u_n(t)$ và tương tự lực mà vật $n+1$ tác dụng lên vật *n* tỉ lệ thuận với $u_{n+1}(t) - u_n(t)$. Cộng hai phương trình này với nhau, ta được lực tác dụng lên vật *n* tỉ lệ với $u_{n-1}(t) - 2\,u_n(t) + u_{n+1}(t)$. Đó chính là hiệu giữa $u_{n-1}(t) - u_n(t)$ và $u_n(t) - u_{n+1}(t)$, và mỗi biểu thức trong số hai biểu thức trên cũng chính là hiệu giữa các vị trí của các vật liên tiếp. Do đó lực tác dụng lên vật *n* là một *hiệu giữa các hiệu*.

Bây giờ giả sử rằng các vật ở rất gần nhau. Trong giải tích, một hiệu – chia cho một hằng số thích hợp đủ nhỏ – là một gần đúng của đạo hàm. Hiệu của các hiệu là một xấp xỉ của đạo hàm của đạo hàm, tức là đạo hàm cấp hai. Trong giới hạn của một số vô cùng lớn các chất điểm, ở cách nhau một khoảng vô cùng nhỏ, lực tác dụng lên một điểm đã cho trên lò xo do đó sẽ tỉ lệ với $\partial^2 u/\partial x^2$, với x là tọa độ không gian được đo dọc theo chiều dài của sợi dây. Theo định luật hai Newton, đại lượng này tỉ lệ với gia tốc lập một góc vuông với đường thẳng đó, mà gia tốc

này chính là đạo hàm cấp hai theo thời gian $\partial^2 u/\partial t^2$. Đặt hằng số tỉ lệ là c^2 ta được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

với $u(x,t)$ là vị trí theo phương thẳng đứng tại điểm x trên dây ở thời điểm t.

2 Có thể xem hình động ở đây http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation

3 Viết dưới dạng ký hiệu, các nghiệm của phương trình có dạng

$$u(x, t)=f(x - ct) + g(x + ct)$$

với f, g là hai hàm bất kỳ.

4 Hình động của một vài mode dao động chuẩn của một chiếc trống tròn có thể được tìm thấy tại http://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_circular_drum

Hình động của trống tròn và hình chữ nhật tại:

http://www.mobiusilearn.com/view/casestudies.aspx?id=2432

Chương 9

1. Giả sử rằng $u(x,t) = e^{-n^2\alpha t} \sin nx$. Khi đó:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -n^2 \alpha e^{-n^2 \alpha t}\ sinnx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Bởi vậy $u(x,t)$ thỏa mãn phương trình nhiệt.

2 Đây là dạng mã hóa JFIF sử dụng cho web, mã EXIF cho camera, cũng bao gồm các “metadata” mô tả các cài đặt của camera, như là ngày tháng, thời gian và độ phơi sáng.

Chương 10

1 http://www.nasa.gov/topics/earth/features/2010-warmest-year.html

Chương 11

1 Donald McDonald. How does a cat fall on its feet?, *New Scientist* 7 no. 189 (1960) 1647–9. Xem thêm http://en.wikipedia.org/wiki/Cat_righting_reflex

2 Áp dụng toán tử rot cho cả hai vế của phương trình thứ ba ta được:

$$\Delta \times \Delta \times \mathbf{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}$$

Giải tích vectơ cho ta biết rằng vế trái của phương trình này có thể rút gọn được thành:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla.\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$$

trong đó ta cũng đã sử dụng phương trình thứ nhất. Ở đây ∇^2 là toán tử Laplace. Dùng phương trình thứ tư, vế phải trở thành

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Khử hai dấu âm ở hai vế và nhân cả hai vế với c^2 ta được phương trình sóng cho **E**:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{E}$$

Bằng cách tính toán tương tự ta cũng thu được phương trình cho **H**.

Chương 12

1 Cụ thể $S_A - S_B = \int_A^B \frac{dq}{T}$ với S_A, S_B là entropy ở trạng thái *A* và *B*.

2 Nguyên lý thứ hai của nhiệt động lực học thực tế là một *bất đẳng thức*, chứ không phải một phương trình. Tôi đã đưa nguyên lý thứ hai vào cuốn sách này bởi vì vai trò trung tâm của nó trong khoa học đòi hỏi phải như thế. Không thể phủ nhận rằng nó là một *công thức* toán học, một cách giải thích phóng khoáng của thuật ngữ "phương trình" đã được phổ biến rộng rãi bên ngoài các tài liệu khoa học kỹ thuật. Công thức này ám chỉ tới chú thích 1 trong chương này, sử dụng một tích phân, nó là một phương trình đích thực. Nó xác định độ biến thiên của entropy, nhưng nguyên lý thứ hai cho ta biết đặc điểm quan trọng nhất của nó là gì.

3 Chuyển động Brown đã được dự đoán bởi nhà sinh lý học Jan Ingenhousz, người đã thấy chính hiện tượng này khi nhìn bụi than đá trôi nổi trên bề mặt rượu, nhưng ông không đề xuất lý thuyết nào để giải thích những gì đã thấy.

Chương 13

1 Tại phòng thí nghiệm quốc gia Gran Sasso, Italia, đã có một máy phát hiện hạt tên là OPERA (viết tắt của Oscillation project with emulsion-tracking apparatus). Sau hơn hai năm nó đã theo dấu 16.000 hạt neutrino bắn ra từ phía CERN, Trung tâm nghiên cứu hạt nhân châu Âu đặt tại Geneva. Các hạt neutrino đều là hạt hạ nguyên tử trung hòa về điện với khối lượng rất nhỏ, và chúng có thể dễ dàng đi xuyên qua vật chất thông thường. Những kết

quả thu được rất khó hiểu: trung bình các hạt neutrino đi được quãng đường dài 730km trong vòng 60 nano giây (một phần tỉ của một giây), nhanh hơn so với cả khi chúng đi với tốc độ ánh sáng. Các phép đo có độ chính xác tới 10 nano giây, nhưng vẫn còn khả năng mắc sai số hệ thống trong cách tính toán thời gian và giải thích, đó là những việc cực kỳ phức tạp.

Các kết quả đã được post lên Internet: 'Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam' by the OPERA Collaboration, http://arxiv.org/abs/1109.4897

Bài báo này không khẳng định là nó bác bỏ thuyết tương đối: nó chỉ thuần túy giới thiệu các quan sát của nó như những gì mà cả nhóm nghiên cứu đã không thể giải thích với những hiểu biết vật lý thông thường. Một bản báo cáo không mang tính kỹ thuật có thể được tìm thấy tại: http://www.nature.com/news/2011/110922/full/news.2011.554.html

Một nguồn sai số hệ thống khả dĩ, liên quan tới những khác biệt về lực hấp dẫn giữa hai phòng thí nghiệm, đã được đề xuất tại http://www.nature.com/news/2011/111005/full/news.2011.575.html nhưng nhóm thực nghiệm OPERA không đồng ý với đề xuất này.

Hầu hết các nhà vật lý nghĩ rằng, mặc dù các nhà nghiên cứu đã làm việc với sự cẩn trọng rất lớn, nhưng vẫn có thể có sai số hệ thống nào đó. Đặc biệt, những quan sát trước đó về neutrino từ một sao siêu mới có vẻ như mâu thuẫn với những quan sát mới nói trên. Giải pháp của vấn đề gây tranh cãi này đòi hỏi phải có những thí nghiệm độc

lập, và phải mất hằng năm. Các nhà vật lý lý thuyết đều đã sẵn sàng phân tích các giải thích tiềm năng từ những mở rộng nhỏ đã biết của mô hình chuẩn trong vật lý hạt tới một vật lý mới, xa lạ, trong đó vũ trụ có nhiều hơn bốn chiều thông thường. Khi bạn đang đọc những dòng này, câu chuyện có lẽ đã được bắt đầu rồi.

2 Một giải thích thấu đáo đã được Terence Tao đăng trên trang web của ông:

http://terrytao.wordpress.com/2007/12/28/einsteins-derivation-of-emc2/

Cách thức rút ra phương trình trên bao gồm năm bước

(a) Mô tả cách thức thay đổi cho các tọa độ không gian và thời gian khi hệ quy chiếu thay đổi.

(b) Sử dụng mô tả này để tìm ra cách biến đổi về tần số của photon khi hệ quy chiếu thay đổi.

(c) Sử dụng định luật Planck để tìm ra cách biến đổi của năng lượng và động lượng của photon.

(d) Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng và động lượng để tìm ra cách biến đổi của năng lượng và động lượng của một vật chuyển động.

(e) Xác định giá trị của một hằng số tùy ý khác trong tính toán bằng cách so sánh các kết quả thu được với vật lý Newton khi vận tốc của vật nhỏ.

3 Ian Stewart and Jack Cohen, *Những bịa đặt của thực tại (Figments of Reality)*, Cambridge University Press, Cambridge 1997, page 37.

4 http://en.wikipedia.org/wiki/Mass%E2%80%93energy_equivalence

5 Một số ít thì lại nghĩ khác. Henry Courten, người phân tích lại những bức ảnh của kỳ nhật thực năm 1970, đã thông báo về sự tồn tại của ít nhất bảy thiên thể cực nhỏ ở gần các quỹ đạo xung quanh Mặt trời – có lẽ là bằng chứng của một vành đai tiểu hành tinh mỏng. Nhưng không có bằng chứng thuyết phục nào đã được tìm thấy, và chúng có lẽ phải có bề rộng nhỏ hơn 60km. Các thiên thể được nhìn thấy trong các bức ảnh có lẽ chỉ là các sao chổi và các tiểu hành tinh rất nhỏ đang đi qua trên các quỹ đạo lệch tâm của chúng. Cho dù chúng có là gì đi chăng nữa thì cũng không phải là Vulcan.

6 Năng lượng chân không trong một cm khối trong không gian trống rỗng ước tính vào khoảng 10^{-15}J. Dựa trên điện động lực học lượng tử, về mặt lý thuyết, nó có thể lên tới 10^{107}J, sai lệch lên tới 10^{122}.

http://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_energy

7 Công trình của Penrose được thông báo trong: Paul Davies. *Trí tuệ của Chúa (The Mind of God)*, Simon & Schuster, New York 1992.

8 Joel Smoller and Blake Temple. Tham số gần đúng của giải pháp khai triển hàm sóng từ phương trình của Einstein gây ra sự tăng tốc bất thường trong mô hình chuẩn của vũ trụ học. http://arxiv.org/abs/0901.1639

9 R.S. MacKay and C.P. Rourke. *Mô hình mới của vũ trụ (A new paradigm for the universe)*, preprint, University of Warwick 2011. Chi tiết hơn có thể xem các bài báo được liệt kê tại

http://msp.warwick.ac.uk/~cpr/paradigm/

Chương 14

1 Cách giải thích Copenhagen thường được cho là xuất hiện sau những thảo luận giữa Niels Bohr, Werner Heisenberg, Max Born và một số người khác vào giữa những năm 20 của thế kỷ trước. Nó có tên gọi như thế bởi vì Bohr là người Đan Mạch, nhưng không có nhà vật lý nào liên quan lại sử dụng thuật ngữ ấy vào thời đó. Don Howard đã đề xuất cách gọi tên này, và quan điểm mà nó tóm lược, xuất hiện đầu tiên vào những năm 1950, có lẽ là qua Heisenberg. Xem thêm D. Howard. *Ai đã phát minh ra "Cách giải thích Copenhagen" (Who Invented the "Copenhagen Interpretation"? A Study in Mythology*), Philosophy of Science 71 (2004) 669–682.

2 Con mèo Harlequin thường được quan sát trong một chồng chập các trạng thái "ngủ" và "ngáy", nhưng điều đó có lẽ không quan trọng.

3 Hai tiểu thuyết khoa học viễn tưởng về đề tài này là *Người đàn ông trong tòa tháp cao (The Man in the High Castle)* của Philip K. Dick và *Giấc mơ sắt (The Iron Dream)* của Norman Spinrad. Cuốn *SS-GB* của nhà viết truyện trinh thám Len Deighton cũng đặt trong một nước Anh giả tưởng bị bọn phát xít cai trị.

Chương 15

1 Giả sử rằng tôi tung một quân xúc xắc (xem Chú thích 1 của Chương 7), và gán các ký hiệu *a, b, c* như sau:

a quân xúc xắc cho kết quả 1, 2, hay 3.

b quân xúc xắc cho kết quả 4 hay 5

c quân xúc xắc cho kết quả 6

Ký hiệu *a* xảy ra với xác suất 1/2, ký hiệu *b* với xác suất 1/3, và ký hiệu *c* với xác suất 1/6. Khi đó công thức của tôi, cho dù nó là gì đi nữa, sẽ gán một hàm lượng thông tin $H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$.

Tuy nhiên, tôi có thể nghĩ về thí nghiệm này theo một hướng khác. Đầu tiên tôi quyết định xem quân xúc xắc có cho kết quả nhỏ hơn hoặc bằng 3 hay lớn hơn. Gọi các xác suất này là *q* và *r* thì,

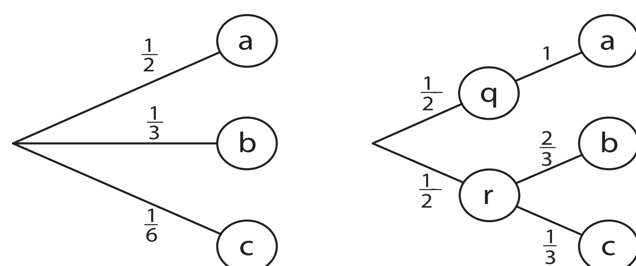
q con xúc xắc cho kết quả 1, 2, hoặc 3

r con xúc xắc cho kết quả 4, 5, hoặc 6

Bây giờ *q* có xác suất là 1/2 và *r* cũng có xác suất là 1/2. Nó truyền tải thông tin $H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Trường hợp *q* chính là trường hợp *a* đầu tiên của tôi, còn *r* là *b* và *c*. Tôi có thể chia trường hợp *r* thành *b* và *c*, và xác suất của chúng là $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$ *nếu r xảy ra*. Nếu bây giờ chúng ta chỉ xét trường hợp này, thông tin truyền tải bởi bất kỳ ký hiệu nào, *b* hay *c*, cũng là $H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. Shannon bây giờ nhấn mạnh rằng thông tin ban đầu phải liên hệ với thông tin trong những trường hợp nhỏ này như sau:

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)=H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$$

Xem hình 61.



Hình 61 Tổ hợp các lựa chọn theo các cách khác nhau. Thông tin cần phải như nhau trong mỗi trường hợp.

Thừa số 1/2 trước hàm *H* thứ hai ở vế phải phương trình trên xuất hiện là do lựa chọn thứ hai xảy ra chỉ trong một nửa thời gian, cụ thể là khi *r* đã được chọn sẵn ở bước đầu tiên. Không có thừa số nào như vậy ở trước hàm *H* ngay sau dấu bằng, bởi vì nó ngụ ý một lựa chọn luôn được thực hiện – giữa *q* và *r*.

2 Xem chương 2 của cuốn: C.E. Shannon and W. Weaver. *Lý thuyết toán học của thông tin (The Mathematical Theory of Communication)*, University of Illinois Press, Urbana 1964.

Chương 16

1 Nếu số lượng dân cư x_t tương đối nhỏ, tức là rất gần với 0, thì $1 - x_t$ sẽ gần với 1. Như vậy, thế hệ tiếp sau sẽ có số lượng gần với kx_t, tức là lớn gấp *k* lần số lượng hiện tại. Khi số lượng dân số tăng, thừa số phụ $1 - x_t$ sẽ khiến tỉ lệ tăng trưởng thực tế nhỏ đi, và dần về 0 khi số lượng dân cư tiến gần tới giá trị cực đại lý thuyết của nó.

2 R.F. Costantino, R.A. Desharnais, J.M. Cushing, and B. Dennis. *Chaotic dynamics in an insect population*, Science 275 (1997) 389–391.

3 J. Huisman and F.J. Weissing. *Biodiversity of plankton by species oscillations and chaos*, Nature 402 (1999) 407–410.

4 E. Benincà, J. Huisman, R. Heerkloss, K.D. Jöhnk, P. Branco, E.H. Van Nes, M. Scheffer, and S.P. Ellner. *Chaos in a long-term experiment with a plankton community*, Nature 451 (2008) 822–825.

Chương 17

1 Giá trị của một quyền chọn mua là

$$C(s,t) = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}$$

với

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + \left(r + \sigma^2/2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T} - t}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/K) + \left(r - \sigma^2/2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T} - t}$$

Giá trị tương ứng của một quyền chọn bán là

$$P(s,t) = [N(d_1) - 1]S + [1 - N(d_2)]Ke^{-r(T-t)}$$

với $N(d_j)$ là hàm phân bố tích lũy của phân bố chuẩn thông thường, $j=1, 2$, và $T - t$ là thời gian đến kỳ hạn.

2 Chính xác hơn, một giải thưởng Sveriges Risbank về Khoa học kinh tế để tưởng nhớ Alfred Nobel.

3 M. Poovey. *Can numbers ensure honesty? Unrealistic expectations and the U.S.accounting scandal*, Notices of the American Mathematical Society 50 (2003) 27–35.

4 A.G. Haldane and R.M. May. *Systemic risk in banking ecosystems*, Nature 469 (2011) 351–355

17 PHƯƠNG TRÌNH THAY ĐỔI THẾ GIỚI
Ian stewart
Phạm Văn Thiều - Nguyễn Duy Khánh *dịch*

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập NGUYỄN MINH NHỰT
Chịu trách nhiệm bản thảo: VŨ THỊ THU NHI
Biên tập và sửa bản in: TRẦN NGỌC NGÂN HÀ
Bìa: BÙI NAM
Trình bày: ĐỖ VẠN HẠNH

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ
161B Lý Chính Thắng - Quận 3 - Thành phố Hồ Chí Minh
ĐT: 39316289 - 39316211 - 38465595 - 38465596 - 39350973
Fax: 84.8.8437450 - E-mail: hopthubandoc@nxbtre.com.vn
Website: http://www.nxbtre.com.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN TRẺ TẠI HÀ NỘI
Số 21, dãy A11, khu Đầm Trấu, p. Bạch Đằng,
q. Hai Bà Trưng, Hà Nội
ĐT: (04)37734544 - Fax: (04)35123395
E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

Công ty TNHH Sách điện tử Trẻ (YBOOK)
161B Lý Chính Thắng, P.7, Q.3, Tp. HCM
ĐT: 08 35261001 – Fax: 08 38437450
Email: info@ybook.vn
Website: www.ybook.vn

"Trang sách chính là cửa sổ mở sang những cuộc đời khác, những thế giới khác. Và cũng là chỗ để ánh sáng mặt trời rọi vào cuộc đời mình".

—Nhà toán học Ngô Bảo Châu

Hai tập hợp – những con số và ký hiệu – được ngăn cách bởi một dấu bằng có thể thay đổi thế giới. Và không chỉ có vậy: chúng có thể phát lộ những quy luật của tự nhiên và giải mã những bí ẩn của vũ trụ.

Giáo sư Ian Stewart cho thấy cách thức 17 phương trình đặc biệt đã mở ra những lĩnh vực mới của cuộc sống, từ điện tử học và truyền thông toàn cầu đến radar, laser, tàu vũ trụ và bom nguyên tử. Ông dẫn dắt bạn đọc qua chặng đường dài hơn hai thiên niên kỷ, từ những người Hy Lạp cổ đại đến một công thức mê hoặc đã khiến cho hệ thống ngân hàng thế giới gần như sụp đổ. Ông đã chứng tỏ rằng những nhận thức sâu sắc trong quá khứ vẫn có thể có ảnh hưởng sau nhiều thế kỷ: định lý Pythagor truyền cảm hứng cho Einstein, và lạ lùng hơn, những tính toán vô tình của một tay cờ bạc thế kỷ 16 đã dẫn đến một con số bất khả, và chính nó lại trở thành chìa khóa để bước vào thế giới đầy bối rối của vật lý lượng tử.

"Ông không chỉ tìm ra những gì cần thiết để các phương trình trở nên thú vị, mà còn khiến cho khoa học trở nên hấp dẫn."

—New York Journal of Books



www.ybook.vn/ebook

nxbtre.com.vn